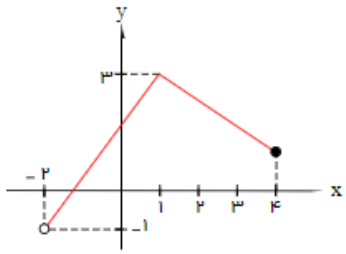
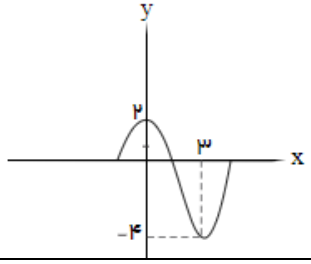
۱۴۰۳/۱۰/۰۲

بسمه تعالی

اداره آموزش و پرورش منطقه ۶

امتحانات دی ماه ۱۴۰۳

نام:	آزمون درس: ریاضی ۳	تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۳
نام خانوادگی:	تعداد صفحه:۲	مدت آزمون: .....۱۲۰..... دقیقه
کلاس:	پایه: دوازدهم رشته: تجربی	سرکارخانم :
نمره به عدد:	نمره به حروف:	امضای دبیر:

	سوالات	بارم
۱	اگر دامنه و برد تابع $y=f(x)$ به‌صورت $D_f=[-۲,۶]$ و $R_f=[۳,۱۰]$ باشد، دامنه و برد تابع $g(x)=۲f(x-۴)$ را بیابید.	۱
۲	نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت مقابل است، دامنه و برد تابع $y=-۳f(۱-\frac{x}{۲})+۱$ را بیابید. 	۱
۳	نمودار تابع مقابل را رسم کنید. $y=x^۳-۶x^۲+۱۲x-۹$	۱
۴	دو تابع $f(x)=\sqrt{x-۴}$ و $g(x)=\frac{۱}{x^۲-۱}$ را در نظر بگیرید. دامنهٔ تابع gof را با استفاده از تعریف به‌دست آورید.	۱
۵	اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی و $f(-۲)=۰$ باشد، دامنهٔ تابع زیر را بیابید. $g(x)=\sqrt{(x^۲-۸۱)f(x)}$	۱
۶	ضابطهٔ تابع $y=(f^{-۱}og^{-۱})(x)$ را با فرض $(gof)(x)=\sqrt[۳]{x}$ به‌دست آورید.	۱
۷	تابع $y=x^۳$ را ابتدا نسبت به محور yها قرینه کرده، سپس نمودار حاصل را دو واحد به چپ منتقل کرده و در نهایت آن را ۵ واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا تابع f حاصل شود، ضابطهٔ تابع وارون تابع f را بیابید.	۱
۸	مقدار عددی عبارت $(\frac{۱}{۲}-\sin\frac{\pi}{۱۲})(\frac{۱}{۲}+\cos\frac{۵\pi}{۱۲})$ را حساب کنید.	۱
۹	دورهٔ تناوب، ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را بیابید. ۱) $f(x)=۴\sin ۵x$ ۲) $g(x)=-\frac{۳}{۲}\cos(\frac{۱}{۴}x)$	۱
۱۰	اگر $\tan\alpha\le -۱$، آنگاه حدود α را در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ بیابید.	۱
۱۱	نمودار تابع $f(x)=a\cos bx+c$ بصورت زیر است، ضابطهٔ این تابع را بیابید. 	۱

www.konkoon.ir

۱۲ معادلهٔ مثلثاتی $\cos(۲\cos x - ۹) = ۵$ را حل کنید. ۱

۱۳ m و n را چنان بیابید که $f(x) = x^۳ + mx - n$ بر $x - ۱$ بخش‌پذیر باشد و باقی‌ماندهٔ آن بر $x + ۲$ برابر -۳ باشد. ۱

۱۴ به سوالات زیر پاسخ دهید. ۱

الف

آ) $\lim\limits_{x \to ۰^-} \dfrac{[x]}{\sin x}$

ب) $\lim\limits_{x \to ۱} \dfrac{x - \sqrt{x}}{(x-۱)(x+۲)}$

۱۵ حدهای زیر را محاسبه کنید: ۱

الف) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{۴x^۴ - ۲x^۲}{-x^۳ + ۲}$

ب) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{۵x^{۱۰} - ۲x + ۳}}{\sqrt{x^۶ + ۲}}$

۱۶ حدود زیر را محاسبه کنید. ۱

الف

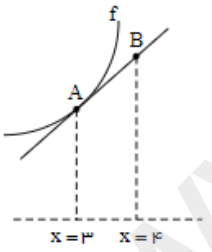
$\lim\limits_{x \to \pi^+} \dfrac{[\cos ۴x]}{\tan x}$

ب

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{(x-۶)(۲x-۷)(۴x+۱)}{۱۷x^۳ + ۵}$

۱۷ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در یک همسایگی محذوف -۲ تعریف شده باشد. به طوری که $\lim\limits_{x \to (-۲)^+} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to (-۲)^-} f(x) = +\infty$ ۱

۱۸ در نمودار شکل مقابل اگر $f(۳) = ۷$، $f'(۳) = ۶$ باشد، مختصات نقطهٔ B را بیابید. ۱



۱۹ مشتق تابع $f(x) = x^۳ - ۲$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه‌ای به طول $x = -۱$ به‌دست آورید. ۱

۲۰ اگر $f(x) = ۳x^۲ - ۲x + ۱$، $f'(۲)$ را به‌دست آورید و معادلهٔ خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید. ۱

" موفق و سربلند باشید"

www.konkoon.ir

پاسخ‌نامه تشریحی

۱

$D_f = [-۲, ۶] \Rightarrow -۲ \le x \le ۶$

$g(x) = ۲f(x-۴) \Rightarrow -۲ \le x-۴ \le ۶ \xrightarrow{+۴} ۲ \le x \le ۱۰ \Rightarrow D_g = [۲, ۱۰]$

$R_f = [۳, ۱۰] \Rightarrow ۳ \le f(x) \le ۱۰$

برد تابع‌های $y = f(x)$ و $y = f(x-۴)$ یکسان است، پس داریم:

$۳ \le f(x-۴) \le ۱۰ \xrightarrow{\times ۲} ۶ \le ۲f(x-۴) \le ۲۰ \Rightarrow ۶ \le g(x) \le ۲۰ \Rightarrow R_g = [۶, ۲۰]$

۲ با توجه به نمودار تابع f، دامنه و برد آن به‌صورت زیر است:

$D_f = (-۲, ۴] \Rightarrow -۲ < x \le ۴$

$y = -۳f(۱ - \frac{x}{۲}) + ۱ \Rightarrow -۲ < ۱ - \frac{x}{۲} \le ۴ \xrightarrow{-۱} -۳ < -\frac{x}{۲} \le ۳$

$\xrightarrow{\times(-۲)} ۶ > x \ge -۶ \Rightarrow -۶ \le x < ۶ \Rightarrow D_y = [-۶, ۶)$

$R_f = (-۱, ۳] \Rightarrow -۱ < f(x) \le ۳$

برد توابع $y = f(x)$ و $y = f(۱ - \frac{x}{۲})$ یکسان است، پس داریم:

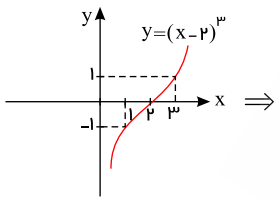
$-۱ < f(۱ - \frac{x}{۲}) \le ۳ \xrightarrow{\times(-۳)} ۳ > -۳f(۱ - \frac{x}{۲}) \ge -۹ \xrightarrow{+۱} ۴ > -۳f(۱ - \frac{x}{۲}) + ۱ \ge -۸$

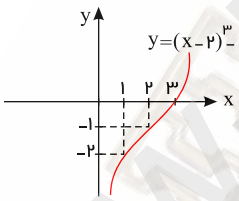
$\Rightarrow -۸ \le y < ۴ \Rightarrow R_y = [-۸, ۴)$

۳ با تشکیل اتحاد مکعب دوجمله‌ای یعنی $(a-b)^۳ = a^۳ - ۳a^۲b + ۳ab^۲ - b^۳$ داریم:

$y = x^۳ - ۶x^۲ + ۱۲x - ۹ = x^۳ - ۶x^۲ + ۱۲x - ۸ - ۱ = (x-۲)^۳ - ۱$

برای رسم $(x-۲)^۳ - ۱$ باید $y = x^۳$ را دو واحد به راست و سپس یک واحد به پایین منتقل کنیم.





۴

$f(x) = \sqrt{x-۴} \to D_f : x - ۴ \ge ۰ \to x \ge ۴$

$g(x) = \frac{۱}{x^۲ - ۱} \to D_g = \mathbb{R} - \{\pm ۱\}$

$D_{gof} = \{x \in D_f \ , \ f(x) \in D_g\} = \{x \ge ۴ \ , \ \sqrt{x-۴} \ne \pm ۱\} = \{x \ge ۴ \ , \ x \ne ۵\} = [۴, ۵) \cup (۵, +\infty)$

۵

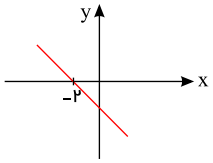
$g(x) = \sqrt{(x^۲ - ۸۱)f(x)} \Rightarrow (x^۲ - ۸۱)f(x) \ge ۰$

چون f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی و $f(-۲) = ۰$ است، داریم:

برای $x < -۲$ تابع f مثبت است. $x < -۲ \Rightarrow f(x) > f(-۲) \Rightarrow f(x) > ۰ \Rightarrow$

برای $x > -۲$ تابع f منفی است. $x > -۲ \Rightarrow f(x) < f(-۲) \Rightarrow f(x) < ۰ \Rightarrow$

نمودار f تقریباً به‌صورت مقابل است.



$x^۲ - ۸۱ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۹$

www.kanoon.ir

x		-۹		-۲		۹	
$x^۲-۸۱$	$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$
$f(x)$	$+$		$+$	۰	$-$		$-$
$(x^۲-۸۱)f(x)$	$+$	۰	$-$	۰	$+$	۰	$-$

$\Rightarrow x \le -۹$ یا $-۲ \le x \le ۹ \Rightarrow D_g = (-\infty, -۹] \cup [-۲, ۹]$

۶ ضابطهٔ تابع $y = (f^{-۱}og^{-۱})(x) = (gof)^{-۱}(x)$ مدنظر بوده و با فرض $h(x) = (gof)(x) = \sqrt[۳]{x}$، ضابطهٔ $y = h^{-۱}(x)$ هدف مسأله می‌باشد. برای دست‌یابی به معکوس $h(x)$ کافی است از رابطهٔ $y = \sqrt[۳]{x}$، x را برحسب y بیابیم:

$$y = \sqrt[۳]{x} \xrightarrow{\text{به توان ۳ می‌رسانیم.}} y^۳ = x \to y = h^{-۱}(x) = x^۳$$

۷

$$y = x^۳ \xrightarrow[x \to -x]{\text{قرینه نسبت به محور } y \text{ ها}} y = (-x)^۳ = -x^۳ \xrightarrow[x \to x+۲]{۲ \text{ واحد چپ}} y = -(x+۲)^۳$$
$$\xrightarrow{۵ \text{ واحد بالا}} y = f(x) = -(x+۲)^۳ + ۵ \Rightarrow (x+۲)^۳ = ۵ - y$$
$$\Rightarrow x + ۲ = \sqrt[۳]{۵-y} \Rightarrow x + ۲ = -\sqrt[۳]{y-۵} \Rightarrow x = -۲ - \sqrt[۳]{y-۵}$$
$$\Rightarrow y = f^{-۱}(x) = -۲ - \sqrt[۳]{x-۵}$$

۸

$$A = (\frac{۱}{۲} - \sin\frac{\pi}{۱۲})(\frac{۱}{۲} + \cos\frac{۵\pi}{۱۲})$$

می‌دانیم: $\frac{\pi}{۱۲} + \frac{۵\pi}{۱۲} = \frac{۶\pi}{۱۲} = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \cos\frac{۵\pi}{۱۲} = \sin\frac{\pi}{۱۲} \Rightarrow A = (\frac{۱}{۲} - \sin\frac{\pi}{۱۲})(\frac{۱}{۲} + \sin\frac{\pi}{۱۲}) \Rightarrow A = \frac{۱}{۴} - \sin^۲\frac{\pi}{۱۲}$

از طرفی $\xrightarrow{}$ $\sin^۲\alpha = \frac{۱ - \cos ۲\alpha}{۲}$

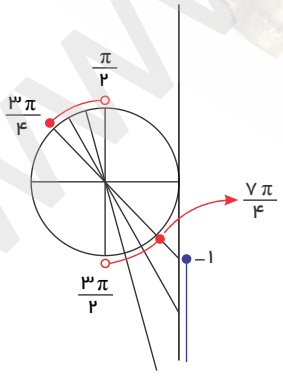
$$\Rightarrow \sin^۲\frac{\pi}{۱۲} = \frac{۱ - \cos\frac{\pi}{۶}}{۲} = \frac{۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲} \Rightarrow \sin^۲\frac{\pi}{۱۲} = \frac{۱}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۴} \Rightarrow A = \frac{۱}{۴} - (\frac{۱}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۴})$$
$$A = \frac{-۱}{۴} + \frac{\sqrt{۳}}{۴} = \frac{\sqrt{۳}-۱}{۴}$$

۹ دورهٔ تناوب توابع $y = a\sin bx$ و $y = a\cos bx$ برابر با $T = \frac{۲\pi}{|b|}$ و ماکزیمم آن‌ها $|a|$ و مینیمم آن‌ها $-|a|$ است.

۱) $f(x) = ۴\sin ۵x \to T = \frac{۲\pi}{۵}$ ، $max = ۴$ ، $min = -۴$

۲) $g(x) = -\frac{۳}{۲}\cos(\frac{۱}{۴}x) \to T = \frac{۲\pi}{\frac{۱}{۴}} = ۸\pi$ ، $max = |-\frac{۳}{۲}| = \frac{۳}{۲}$ ، $min = -|-\frac{۳}{۲}| = -\frac{۳}{۲}$

۱۰ در دایرهٔ مثلثاتی مقابل باید زوایایی را بیابیم که تانژانت آن‌ها کوچک‌تر یا مساوی -۱ است.



$$\tan\alpha \le -۱ \Rightarrow \frac{\pi}{۲} < \alpha \le \frac{۳\pi}{۴} \quad \text{یا} \quad \frac{۳\pi}{۲} < \alpha \le \frac{۷\pi}{۴}$$

۱۱ تفاضل طول نقاط ماکزیمم و مینیمم متوالی برابر با نصف دورهٔ تناوب است.

$$\frac{T}{۲} = ۳ \Rightarrow T = ۶ \Rightarrow \frac{۲\pi}{|b|} = ۶ \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{۳} \xrightarrow{b>۰} b = \frac{\pi}{۳}$$
$$\left.\begin{matrix} max\ f = |a| + c = ۲ \\ min\ f = -|a| + c = -۴ \end{matrix}\right\} \Rightarrow ۲c = -۲ \Rightarrow c = -۱ \to |a| = ۳ \xrightarrow{a>۰} a = ۳$$
$$f(x) = ۳\cos(\frac{\pi}{۳}x) - ۱$$

۱۲

$$\cos x(۲\cos x - ۹) = ۵ \to ۲\cos^۲ x - ۹\cos x - ۵ = ۰ \xrightarrow{\cos x = A} ۲A^۲ - ۹A - ۵ = ۰ \to \Delta = b^۲ - ۴ac = ۸۱ + ۴۰ = ۱۲۱$$

$$\rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\dfrac{۹+۱۱}{۴}=۵\rightarrow \cos x=۵ \text{ (امکان ندارد)} \\ A=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\dfrac{۹-۱۱}{۴}=-\dfrac{۱}{۲}\rightarrow \cos x=-\dfrac{۱}{۲}=\cos(\pi-\dfrac{\pi}{۳})=\cos\dfrac{۲\pi}{۳} \xrightarrow{\cos x=\cos\alpha\rightarrow x=۲k\pi\pm\alpha} x=۲k\pi\pm\dfrac{۲\pi}{۳} \end{cases}$$

۱۳

$f(x)=x^{۳}+mx-n$

$x-۱=۰\Rightarrow x=۱\Rightarrow$ باقی‌مانده $=f(۱)=۰\Rightarrow ۱+m-n=۰\Rightarrow m-n=-۱$

$x+۲=۰\Rightarrow x=-۲\Rightarrow$ باقی‌مانده $=f(-۲)=-۳$

$\Rightarrow -۸-۲m-n=-۳\Rightarrow ۲m+n=-۵$

$$\begin{cases} m-n=-۱ \\ ۲m+n=-۵ \end{cases}$$

$۳m=-۶\Rightarrow m=-۲\Rightarrow -۲-n=-۱\Rightarrow n=-۱$

۱۴

الف

آ) $\lim\limits_{x\to ۰^{-}}\dfrac{[x]}{\sin x}=\dfrac{-۱}{۰^{-}}=+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x-\sqrt{x}}{(x-۱)(x+۲)}=\dfrac{۰}{۰}\rightarrow \lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x-\sqrt{x}}{(x-۱)(x+۲)}\times\dfrac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{(x^{۲}-x)}{(x-۱)(x+۲)(x+\sqrt{x})}$

$=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x(x-۱)}{(x-۱)(x+۲)(x+\sqrt{x})}=\dfrac{۱}{(۳)(۲)}=\dfrac{۱}{۶}$

۱۵

الف) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{۴x^{۴}-۲x^{۲}}{-x^{۳}+۲}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{۴x^{۴}}{-x^{۳}}=\lim\limits_{x\to -\infty}(-۴x)=-۴(-\infty)=+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{۵x^{۱۰}-۲x+۳}}{\sqrt{x^{۶}+۲}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{۵x^{۱۰}}}{\sqrt{x^{۶}}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{۵}x^{۲}=\sqrt{۵}(+\infty)=+\infty$

۱۶

الف

$\lim\limits_{x\to \pi^{+}}\dfrac{[\cos ۴x]}{\tan x}=\dfrac{[۱^{-}]}{۰^{+}}=\dfrac{۰}{۰^{+}}=۰$

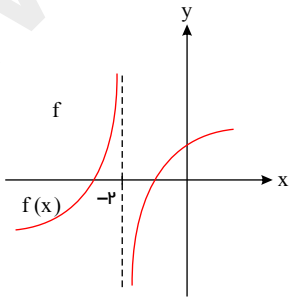
دقت کنید $\cos ۴\pi=۱$ است و در مسائل حدی هرکجا سینوس و کسینوس یک شوند منظور ۱^{-} است و $\tan\pi=۰$ است و π^{+} در ناحیهٔ سوم است و در این ناحیه، تانژانت مثبت است یعنی $\tan\pi^{+}=۰^{+}$ است.

ب

$\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{(x-۶)(۲x-۷)(۴x+۱)}{۱۷x^{۳}+۵}\overset{\text{توان بیشتر}}{=\!=\!=}\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{(x)(۲x)(۴x)}{۱۷x^{۳}}=\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{۸x^{۳}}{۱۷x^{۳}}=\dfrac{۸}{۱۷}$

۱۷

برای مثال تابعی مانند f مطابق شکل روبرو را در نظر بگیرید.



چون همسایگی محذوف -۲ تعریف شده است پس تابع در نقطهٔ $x=-۲$ تعریف نشده است و داریم:

$\lim\limits_{x\to (-۲)^{-}}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to (-۲)^{+}}f(x)=-\infty$

۱۸

$m_{AB}=۶\rightarrow\dfrac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=۶\rightarrow\dfrac{۷-y_B}{۳-۴}=۶\rightarrow ۷-y_B=-۶\rightarrow y_B=۱۳\rightarrow B\begin{vmatrix}۴\\۱۳\end{vmatrix}$

۱۹

$$\lim_{x\to x_۰}\frac{f(x)-f(x_۰)}{x-x_۰}=\lim_{x\to -۱}\frac{x^۳-۲-f(-۱)}{x-(-۱)}=\lim_{x\to -۱}\frac{x^۳-۲+۳}{x+۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{x^۳+۱}{x+۱}$$

$$=\lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(x^۲-x+۱)}{x+۱}=۱+۱+۱=۳$$

۲۰

۱) $x=۲\to y=۱۲-۴+۱=۹\to \left|\begin{matrix}۲\\ ۹\end{matrix}\right.$

۲) $m_{\text{مماس}}=f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{۳x^۲-۲x+۱-f(۲)}{x-۲}$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{۳x^۲-۲x-۸}{x-۲}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow[\text{یعنی } x-۲]{\text{تقسیم بر عامل ابهام}}\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(۳x+۴)}{x-۲}=۶+۴=۱۰$$

۳) $y-y_۱=m(x-x_۱)\to y-۹=۱۰(x-۲)\to y=۱۰x-۱۱$