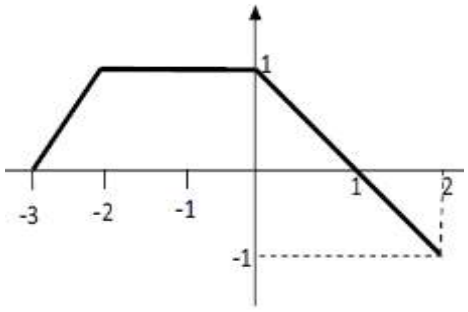
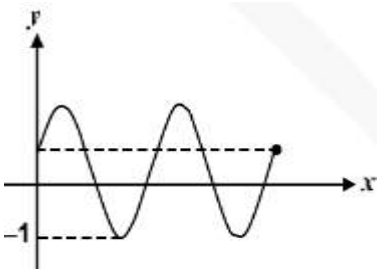
تاریخ آزمون : 3 / 10 / 1401		ساعت برگزاری : 8 صبح
سال تحصیلی : 1402-1401	بسمه تعالی	نوبت : دیماه
نام ونام خانوادگی :	اداره کل آموزش و پرورش استان یزد	سوالات درس : ریاضی 3
نام پدر :	مدیریت آموزش و پرورش شهرستان میبد	تعداد صفحات :4
رشته تحصیلی : تجربی	اداره استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان	تعداد سوالات : 15
پایه تحصیلی : دوازدهم	دبیرستان دوره دوم شهید رحیمی فر	مدت پاسخگویی : 120 دقیقه

نام و نام خانوادگی دبیر :	نمره به عدد : نمره به حروف :	امضاء دبیر :

ردیف	سوال	بارم
1	درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را بررسی نمایید. الف- اگر $f(x)=3$ و $g(x)=x^2-3$ آن گاه $(f^{-1}\,o\,g^{-1})^{-1}(1)=-6$ ب- تابع $y=x+\sqrt{x+1}$ یک تابع اکیدا یکنواست. ج- نمودار $y=(x-1)^3$ برای تمام x های نامنفی بالای نمودار $y=x^2-1$ قرار دارد. د- تابع کتانژانت در بازه $\left(-\pi,-\frac{2\pi}{3}\right)$ اکیدا نزولی است.	1
2	جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. باقیمانده تقسیم $5x^3-3x+3$ بر $x+1$ برابر است با ..... وارون تابع $y=-x^2-3$ در بازه $(-\infty\,,0)$ برابر است با ..... اگر دامنه تابع $g(x)=f(2x+3)-3$ برابر $[-1,3]$ باشد دامنه تابع $f(-x)$ برابر است با..... بیشترین مقدار تابع $y=2-5cos^2(\frac{\pi}{2}x)$ برابر است با	2
3	گزینه مناسب را انتخاب کنید کدام گزینه در مورد بازه $(-5\,,3)$ صحیح است. الف- یک همسایگی راست عدد -5.1 است. ب- یک همسایگی چپ عدد 2.9 است. ج- یک همسایگی عدد 0 است. د- یک همسایگی محذوف عدد $-1/5$ است. حاصل $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{[x-2]}{\{x\}-1}$ کدام است. الف- $+\infty$ ب- $-\infty$ ج- صفر د- وجود ندارد. دوره تناوب تابع $y=2m\sin(mx)+1$ برابر با $\frac{\pi}{3}$ است. کمترین مقدار تابع برابر است با الف- 5 ب- -5 ج- 6 د- -6	1/25

4	نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}3x+2 & x\le -2\\ 2 & -2<x<1\\ x^3+1 & x\ge 1\end{cases}$ را رسم کنید و مشخص کنید تابع در چه بازه هایی صعودی ، نزولی یا ثابت می باشد.	1/25
5	اگر $f=\{(4,1),(3,2),(5,3)\}$ و $g=\{(2,5),(3,7),(4,4)\}$ آنگاه تابع fog^{-1} و gof را مشخص کنید.	1/5
6	توابع $f(x)=\sqrt{16-2x}$ و $g(x)=\frac{2x+1}{x-2}$ را در نظر بگیرید. مطلوبست الف- ضابطه $(fog)(x)$ ب- دامنه $(gof)(x)$	1/25
7	ضابطه وارون تابع $y=f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)$ را به دست آورید.	1

8	با استفاده از نمودار تابع $f(x)$ در روبرو نمودار تابع $-f(-2x)+2$ را رسم کنید.  	1
9	نسبتهای مثلثاتی زاویه 75 درجه را بدست آورید.	1
10	معادله مثلثاتی $cos(2x)+3sin(x)-2=0$ را حل کنید.	1/5
11	حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید. الف - $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{4x}-2}{3-\sqrt{x+7}}$ ب - $\lim_{x\to 1^-}\frac{-2x^2-[x^2]}{x-1}$ ج - $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x}-x$ د - $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{1-[sin(x)]}{1+tan(x)}$	3

12	شکل زیر نمودار تابع $y = 1 + a\ sin(b\pi x)$ در بازه $\left[0 \text{ و } \frac{4}{3}\right]$ می باشد حاصل a+b را به دست آورید.  	1
13	اگر $f(x) = x^2 - 5x + 1$ با استفاده از تعریف مشتق، مقدار مشتق تابع را درنقطه ای به طول $x = -1$ به دست آورید و سپس معادله خط مماس بر منحنی تابع f در این نقطه بنویسید.	1/25
14	مشتق پذیری تابع روبرو را با استفاده از تعریف مشتق در x=4 بررسی کنید. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 1, & x < 4 \\ 3, & x \geq 4 \end{cases}$	1
15	اگر $\lim_{x \to -\infty} \frac{(2a-b)x^4+4x^3+5}{(3a-b)x^3+(b+5)x^2-2x^2} = \frac{1}{2}$ مقدار $a - b$ را بنویسید	1
جمع		20

پاسخ تشریحی سوالات امتحان نوبت دوم ریاضی دهم سال تحصیلی ۰۰-۰۱ (استعدادهای درخشان)

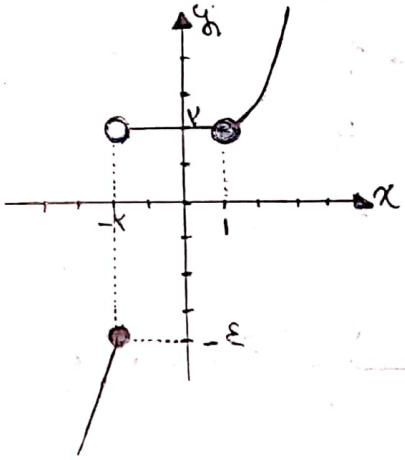
① الف) نادرست ب) درست ج) نادرست د) درست

② الف) $\frac{1}{2}$ ب) در هیچ‌کدام از بازه‌های مشتق‌پذیر شده تابع علامت تغییر نشده است.

ج) $[-1, -9]$ د) $\frac{1}{2}$

③ س۱- الف ... س۲- ب ... س۳- -11 ...

④



* تابع در بازه‌ی $(-\infty, -2]$ صعودی است.
* تابع در بازه‌ی $[-2, 1]$ ثابت است.
* تابع در بازه‌ی $[1, +\infty)$ صعودی است.

⑤ $g \circ f = \{(3,5), (5,7)\}$ $\quad f \circ g^{-1} = \{(7,2), (4,1)\}$

⑥ الف) $f \circ g = f(g(x)) = \sqrt{14 - 2\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)}$

ب) $D_{f \circ g} = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\}$

I) $14 - 2x \geq 0 \rightarrow 2x \leq 14 \rightarrow x \leq 7$

II) $D_g = \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \sqrt{14-2x} \neq 2 \rightarrow x \neq 5$

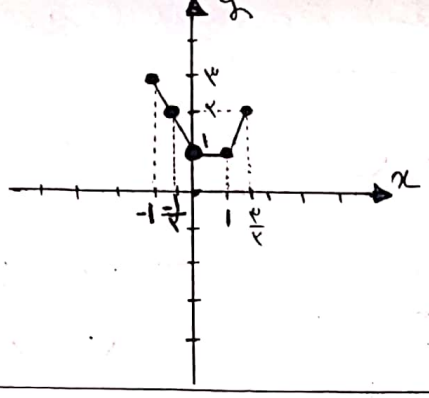
$\xrightarrow{I \cap II}$ $D_{g \circ f} = (-\infty, 7] - \{5\}$

⑦ $y = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2+\varepsilon}) \rightarrow 2y = x + \sqrt{x^2+\varepsilon} \rightarrow 2y - x = \sqrt{x^2+\varepsilon}$

$\xrightarrow{(\,)^2} \varepsilon y^2 - \varepsilon xy + x^2 = x^2 + \varepsilon \rightarrow 4y^2 = \varepsilon + \varepsilon xy \rightarrow y^2 = xy + 1$

$\rightarrow y^2 - 1 = xy \rightarrow x = \frac{y^2-1}{y} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^2-1}{x}$

Powered by CamScanner



(۱)

$\sin 75 = \sin(45+30) = \sin 45\cos 30 + \sin 30\cos 45 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (۹)

$\cos 75 = \cos(45+30) = \cos 45\cos 30 - \sin 45\sin 30 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\tan 75 = \tan(45+30) = \frac{\tan 45 + \tan 30}{1 - \tan 45\tan 30} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}$

$\cot 75 = \frac{1}{\tan 75} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}$

$\cos 2x = 1-2\sin^2 x$ $\rightarrow 1-2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0 \rightarrow 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ (۱۰)

$\sin = t$ $\rightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0$ $\begin{cases} t = \sin x = 1 \\ t = \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} \sin x = 1 \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x < \frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$

الف) -2 ب) $+\infty$ ج) 1 د) 0 (۱۱)

$\min = -|a| + c \rightarrow -|a| + 1 = -1 \rightarrow -|a| = -2 \rightarrow |a| = 2 \rightarrow a = 2$ (۱۲)

$T = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow \frac{2\pi}{b\pi} = \frac{4}{4} = \frac{2}{2} \rightarrow \frac{2\pi}{b\pi} = \frac{2}{3} \rightarrow b = 3$

$a + b = 2 + 3 = 5$

$f'(-1) = \lim_{x\to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} \Rightarrow \lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-4)}{x+1} = -5$ (۱۳)

$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - 5 = -5(x+1)$

Powered by CamScanner

؟ توانا بود

(۱۴) می‌دانیم تابع در نقطه $x=4$ پیوسته است.

$$f'_+(4) = \lim_{x\to 4^+} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = 0$$

$$f'_-(4) = \lim_{x\to 4^-} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4^-} \frac{\sqrt{x+1}-3}{x-4} = \lim_{x\to 4^-} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$$

مزدوج بستن $\lim_{x\to 4^-} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4^-} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$

$f'_-(4) \neq f'_+(4)$ ⇐ تابع در نقطه $x=4$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

---

(۱۵)

صورت x^4 باید صفر شود $\to 2a-b=0 \to b=2a$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^3+5}{ax^4+(2a+3)x^2-4x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^3+5}{ax^4+(2a+3)x^2}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4\left(4+\frac{5}{x^3}\right)}{x^4\left(a+\frac{2a+3}{x}\right)} = \frac{4}{a} \Rightarrow \frac{4}{a}=\frac{1}{2} \Rightarrow a=8$$

$$a=8 \longrightarrow 2(8)=b=16 \to a-b=8-16=\boxed{-8}$$

پاسخ دهنده: مهرا مین (سری)

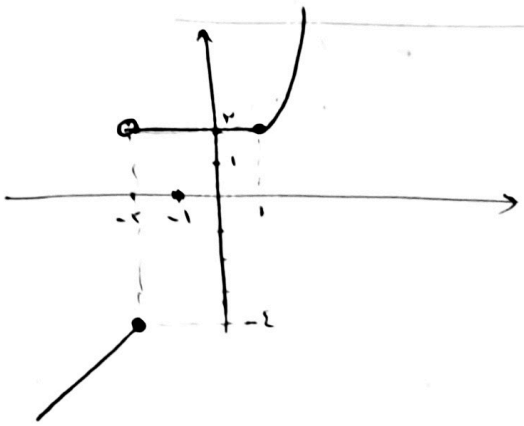
Powered by CamScanner

۱- الف) نادرست ب) درست ج) نادرست د) درست

۲- الف) ۱ ب) $\sqrt{-x-2}$ ج) $[-2,1]$ د) ۲

۳- الف) ج ب) ب ج) همه‌ی گزینه‌ها درست

۴-



صعودی : $(-\infty,0)$

ثابت : $[-2,1]$

نزولی : $[-2,1]$

۵-

$f=\{(6,1),(4,2),(5,3)\}$

$g=\{(2,5),(3,7),(4,4)\}$

$g^{-1}=\{(5,2),(7,3),(4,4)\}$

$\longrightarrow$ $gof=g(f(x))=\{(4,5),(5,7)\}$

$fog^{-1}=f(g^{-1}(x))=\{(7,2),(4,1)\}$

۶-

$f(x)=\sqrt{14-2x}$ $\quad D_f=(-\infty,8]$

$g(x)=\frac{2x+1}{x-2}$ $\quad D_g=\mathbb{R}-\{2\}$

الف) $fog(x)=f(g(x))=\sqrt{14-2\times\frac{2x+1}{x-2}}=\sqrt{\frac{12x-34}{x-2}}$

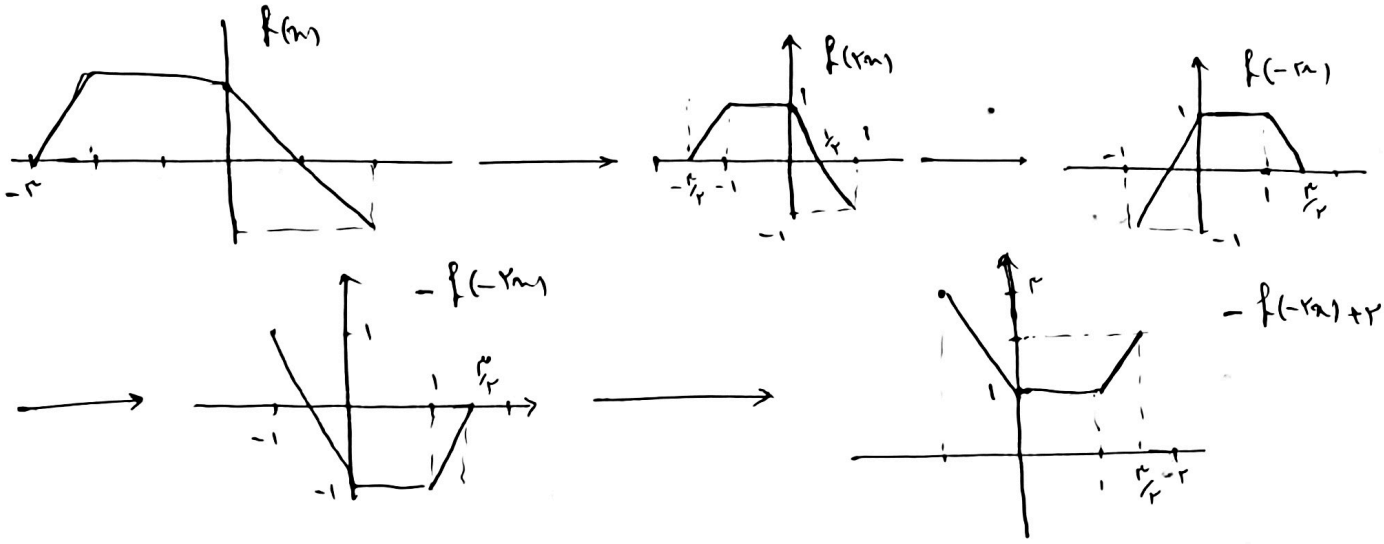
ب) $D_{gof}=D_{g(f(x))}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in(-\infty,8] \mid \sqrt{14-2x}\in\mathbb{R}-\{2\}\}$

$\sqrt{14-2x}\neq 2 \xrightarrow{\uparrow 2} 14-2x\neq 4 \longrightarrow 2x\neq 12 \longrightarrow x\neq 6$

$D_{gof}=(-\infty,6)\cup(6,8]$

۷-

۸-



۹-

$$\sin 75 = \sin(45+30) = \sin 45\cos 30 + \cos 45 \sin 30 = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 75 = \cos(45+30) = \cos 45\cos 30 - \sin 45 \sin 30 = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan 75 = \frac{\sin 75}{\cos 75} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = 2+\sqrt{3}$$

$$\cot 75 = \frac{1}{\tan 75} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$$

۱۰-

$$\cos 2x + 3\sin x - 2 = 0 \longrightarrow 1 - 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

$$\longrightarrow 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 \longrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \longrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \longrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

۱۱-

الف)
$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{4x}-2}{2-\sqrt{x+7}} \times \frac{\sqrt[3]{14x^2}+2\sqrt[3]{4x}+4}{\sqrt[3]{14x^2}+2\sqrt[3]{4x}+4} \times \frac{2+\sqrt{x+7}}{2+\sqrt{x+7}}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(4x-8)(2+\sqrt{x+7})}{(9-x-7)(\sqrt[3]{14x^2}+2\sqrt[3]{4x}+4)} = \lim_{x\to 2} \frac{4(x-2)(2+\sqrt{x+7})}{-(x-2)(\sqrt[3]{14x^2}+2\sqrt[3]{4x}+4)} = \frac{64}{-12} = -2$$

ب)
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{-2x^2-[x^2]}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-2x^2-0}{x-1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

ج)
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x}-x \times \frac{\sqrt{x^2+2x}+x}{\sqrt{x^2+2x}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$

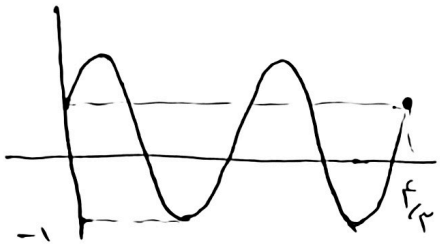
تقسیم بر x

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{2x} = 1$$

ادامه ۱۱ـ

$$\text{د) } \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1-[\sin x]}{1+\tan x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1-0}{1+\tan x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

۱۲ـ



$$۴T = \frac{۴}{۳} \longrightarrow T = \frac{۲}{۳}$$

$$T = \frac{۲\pi}{|b\pi|} = \frac{۲}{۳} \longrightarrow |b| = ۳$$

$$۱ - |a| = -۱ \longrightarrow |a| = ۲$$

$$\begin{cases} a = -۲ \\ b = -۳ \end{cases} \longrightarrow a+b = -۵$$

$$\begin{cases} a = ۲ \\ b = ۳ \end{cases} \longrightarrow a+b = ۵$$

حاصل $a+b$ می‌تواند ۵ و یا ۵- باشد

۱۳ـ

$$f'(-۱) = \lim_{x \to -۱} \frac{f(x)-f(-۱)}{x-(-۱)} = \lim_{x \to -۱} \frac{x^۲ - ۵x + ۱ - ۷}{x+۱} = \lim_{x \to -۱} \frac{(x+۱)(x-۶)}{x+۱} = -۷$$

$$A\Big|_{-۷}^{-۱} \longrightarrow y - ۷ = -۷(x+۱) \longrightarrow \boxed{y = -۷x}$$

$$m = f'(-۱) = -۷$$

۱۴ـ

$$\lim_{x \to ۴^+} f(x) = ۳$$

$$\lim_{x \to ۴^-} f(x) = \lim_{x \to ۳^-} \sqrt{x+۱} = ۳$$

تابع در $x=۴$ پیوسته است

$$f(۴) = ۳$$

$$f'_-(۴) = \lim_{x \to ۴^-} \frac{f(x)-f(۴)}{x-۴} = \lim_{x \to ۳^-} \frac{\sqrt{x+۱}-۳}{x-۴} \times \frac{\sqrt{x+۱}+۳}{\sqrt{x+۱}+۳} = \lim_{x \to ۳^-} \frac{(x-۳)}{(x-۴)(\sqrt{x+۱}+۳)} = \frac{۱}{۶}$$

$$f'_+(۴) = \lim_{x \to ۴^+} \frac{f(x)-f(۴)}{x-۴} = \lim_{x \to ۴^+} \frac{x-۳}{x-۴} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty$$

$$f'_-(۴) \neq f'_+(۴)$$

تابع در $x=۴$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد

۱۵-

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{(2a-b)x^4 + 2x^3 + 5}{(2a-b)x^3 + (b+5)x^2 - 2x^2} = \frac{1}{2}$$

با توجه به این که حاصل حد در بینهایت عددی مخالف است پس بزرگترین توان صورت و مخرج یکی است پس

$$2a-b = 0 \quad \frac{4}{3a-b} = \frac{1}{2} \longrightarrow \begin{cases} 2a-b=0 \\ 3a-b=4 \end{cases}$$

$$\boxed{a=4}, \boxed{b=12} \longrightarrow a-b = 4-12 = -4$$