نام و نام خانوادگی :	باسمه تعالی اداره کل آموزش و پرورش استان گیلان مدیریت آموزش و پرورش ناحیه ۲ رشت دبیرستان غیردولتی اندیشه های شریف	نوبت اول دی ماه ۱۴۰۱	محل مهر آموزشگاه
پایه تحصیلی : دوازدهم رشته : تجربی کلاس : اقاقیا – نرگس - ارغوان		تاریخ امتحان : ۱۴۰۱/۱۰/۰۴	
سوالات درس : ریاضی ۳		مدت امتحان : ۹۰ دقیقه	

نام ونام خانوادگی دبیر و امضا : نمره با عدد : نمره با حروف : نمره پس از تجدید نظر :

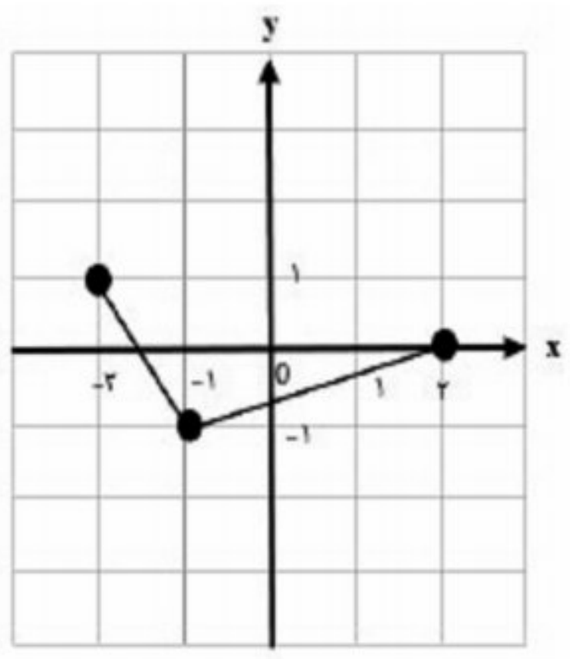
ردیف	سوالات	بارم
۱	نمودار تابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن‌را مشخص نمایید. $y = (x - ۱)^{۳} - ۱$	۱/۵
۲	با رسم نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^{۲} & x \geq ۰ \\ -۳x & -۱ < x < ۰ \end{cases}$ تعیین کنید، تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی می‌باشد.	۱/۵
۳	اگر $f(x) = \sqrt{x - ۷}$ و $g(x) = x^{۲} - ۹$ باشد، ضابطه fog را بیابید و دامنه آن را با استفاده از تعریف بیابید .	۱/۵

ادامه ی سوالات در صفحه ی دوم

CamScanner

۴

نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. نمودار $g(x) = ۲f(x + ۱)$ را رسم کرده و دامنه و برد تابع g را تعیین کنید.



۱/۵

۵

اگر $f(x) = \frac{x}{۲} - ۱$ و $g(x) = x^{۳} + x$ باشد، مقدار $(g^{-۱} of^{-۱})(۱۴)$ را حساب کنید.

۱/۵

۶

دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را به دست آورید. (راه‌حل نوشته شود.)

$$y = -\pi Sin\left(\frac{x}{۲}\right) - ۲$$

۱/۵

۷

نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویه $۲۲/۵^{\circ}$ به دست آورید.

۱/۵

ادامه ی سوالات در صفحه ی سوم

CamScanner

۸	معادله مثلثاتی $\cos ۲x - \sin x + ۱ = ۱$ را حل کنید.	۱/۵
۹	مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $p(x) = x^{۳} + ax^{۲} + bx + ۲$ بر $(x + ۲)$ و $(x - ۱)$ بخش‌پذیر باشد.	۱/۵
۱۰	حد توابع زیر را به دست آورید. ([ ] نماد جزء صحیح است.) الف) $\lim_{x \to ۳^{-}} \frac{[x] - ۳}{x - ۳}$ ب) $\lim_{x \to ۳} \frac{x^{۲} - ۹}{\sqrt{x + ۱} - ۲}$	۱/۵

ادامه ی سوالات در صفحه ی چهارم

CamScanner

۱۱

حد تابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

$$\lim_{x \to ۸} \frac{\sqrt[۳]{x} - ۲}{x^{۲} - ۵x - ۲۴}$$

۱/۵

۱۲

حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \to (-۱)^{-}} \frac{[x] + ۱}{x + ۱}$

ب) $\lim_{x \to -\infty} \frac{۵x - x^{۲}}{۳x^{۲} + ۲}$

۱/۵

۱۳

با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x) = -x^{۲} + ۱۰$ را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن به دست آورید.

۲

۱) $y = (x-1)^3 + 2$



بردش همه $\mathbb{R}$ و گسسته هم هست

۲) الف) نادرست (نمی تابع سهمی) ب) درست ج) درست

۳) الف) $(f \circ g)(-2) = f(g(-2)) = f(-1) = (-1)^3 + 1 = -2$

$g(-2) = \frac{1}{-2+1} = -1$

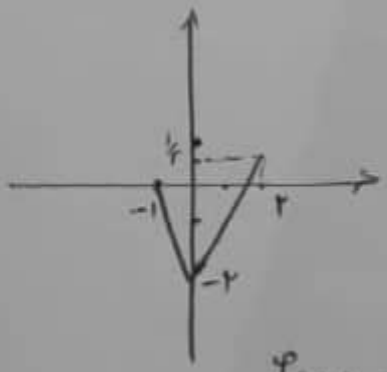
$D_{f \circ g} = \{ x \in D_g \mid g(x) \in D_f \}$

$= \{ \mathbb{R} - \{-1\} \mid \frac{1}{x+1} \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R} - \{-1\}$

۴) $R_f = [-1, 3] \longrightarrow -1 \leq f \leq 3$

$\xrightarrow{\times(-\frac{1}{2})} \frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2} f \geq -2$

عرض هر نقطه روی نمودار f باید $\frac{1}{2}$ برابر شود:



۵) $f(x) = 2 + \sqrt[3]{x}$

$y = 2 + \sqrt[3]{x} \longrightarrow y - 2 = \sqrt[3]{x}$

$\longrightarrow (y-2)^3 = x \longrightarrow f^{-1}(x) = (x-2)^3$

۶) الف) زیرا روی بازه‌ی $(-2, +\infty)$ و $(-\infty, -1)$ یک‌به‌یک است.

۷) $(f^{-1} \circ g^{-1})(0) = f^{-1}(g^{-1}(0)) = f^{-1}(2) = 5$

$g^{-1}(0) = ? \longrightarrow 0 = x^3 - 8 \longrightarrow x = 2$

$f^{-1}(2) = ? \longrightarrow 2 = x - 3 \longrightarrow x = 5$

(۸ $y = ۲\sin(۱۲x) + ۳$

$T = \frac{۲\pi}{|۱۲|} = \frac{\pi}{۶}$ $\quad Max = |a| + c = ۲ + ۳ = ۵$

$min = -|a| + c = -۲ + ۳ = ۱$

(۹ $\cos ۲x - \cos x = ۰$

$\cos ۲x = \cos x$ ↗ $۲x = ۲k\pi + x \longrightarrow x = ۲k\pi$

↘ $۲x = ۲k\pi - x \longrightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳}$

(۱۰ $\cos\alpha = \frac{۵}{۱۳} \longrightarrow \sin\alpha = \sqrt{۱ - \cos^۲\alpha}$

$\sin\alpha = \sqrt{۱ - (\frac{۵}{۱۳})^۲} = \frac{۱۲}{۱۳}$

$\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha \longrightarrow \sin ۲\alpha = ۲ \times \frac{۱۲}{۱۳} \times \frac{۵}{۱۳} = \frac{۱۲۰}{۱۶۹}$

(۱۱ $\lim_{x\to ۱} \frac{x - \sqrt{x}}{x^۲ - ۱} \times \frac{x + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} = \lim_{x\to ۱} \frac{x^۲ - x}{(x^۲ - ۱)(x + \sqrt{x})}$

$= \lim_{x\to ۱} \frac{x(x-۱)}{(x-۱)(x+۱)(x+\sqrt{x})} = \frac{۱}{۲ \times ۲} = \frac{۱}{۴}$

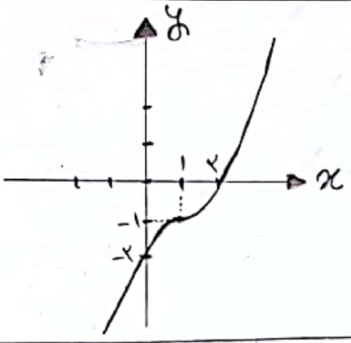
$\lim_{x\to ۴^-} \frac{۳}{x - ۴} = \frac{۳}{۰^-} = -\infty$

$\lim_{x\to\infty} \frac{۹x^۳(۱ + \frac{۲}{۹x^۲})}{-۳x^۳(۱ - \frac{۱}{۲x^۳})} = \lim_{x\to\infty} \frac{۹x^۳}{-۳x^۳} = -۳$

(۱۲ $f'(۱) = \lim_{x\to ۱} \frac{f(x) - f(۱)}{x - ۱}$ $\quad f(۱) = ۱^۲ + ۱ = ۲$

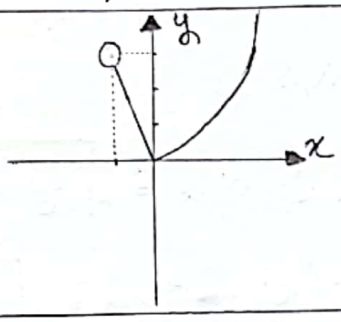
$= \lim_{x\to ۱} \frac{x^۲ + x - ۲}{x - ۱}$

$= \lim_{x\to ۱} \frac{(x-۱)(x+۲)}{x - ۱} = ۳ \longrightarrow f'(۱) = ۳$



① $D_y = \mathbb{R}$

$R_y = \mathbb{R}$



② * در بازه‌ی $(0, +\infty]$ اکیداً صعودی است.

* در بازه‌ی $(-1, 0)$ اکیداً نزولی است.

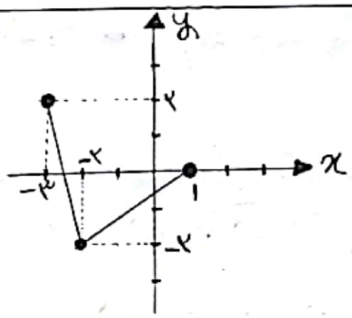
③ $(f \circ g)(x) = f(g(x)) \xrightarrow[g(x)=x^2-9]{f(x)=\sqrt{x-7}} f \circ g(x) = \sqrt{x^2-9-7} = \sqrt{x^2-16}$

$$D_{f \circ g} = \{x \mid x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$$

I) $x \in D_g \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

II) $g(x) \in D_f \Rightarrow g(x) - 7 \geq 0 \rightarrow g(x) \geq 7 \rightarrow x^2 - 9 \geq 7 \rightarrow x^2 \geq 16 \rightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq -4 \end{cases}$

$\xrightarrow{I \cap II}$ $D_{f \circ g}: x \geq 4 \wedge x \leq -4$



④ $D_g = [-4, 1]$

$R_g = [-2, 2]$

⑤ $(g^{-1} \circ f^{-1})(16) = (f \circ g)^{-1}(16) = \left(f(g(16))\right)^{-1} = f(g(x)) = 16$

$\xrightarrow[g(x)=x^3+x]{f(x)=\frac{x}{2}-1}$ $\frac{x^3+x}{2} - 1 = 16 \rightarrow x^3 + x - 2 = 32 \rightarrow x^3 + x - 30 = 0$

$x = 3$

Powered by CamScanner

④

$y = -2\sin\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \longrightarrow a = -2 \quad b = \frac{1}{2} \quad c = -1$

$max = +|a| + c \rightarrow max = |-2| - 1 = 2 - 1$

$min = -|a| + c \rightarrow min = -|-2| - 1 = -2 - 1$

$T = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

---

⑦

$\cos 2\theta$: $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \rightarrow \cos 4\theta = 2\cos^2 2\theta - 1$

$\rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos^2 2\theta - 1 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{4} + 1 = 2\cos^2 2\theta \rightarrow \cos 2\theta = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}}$

$\sin 2\theta$: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$

$\rightarrow \sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}}$

---

⑧

$\cos 2x - \sin x + 1 = 1 \rightarrow \cos 2x - \sin x = 0 \xrightarrow{\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x} 1 - 2\sin^2 x - \sin x = 0$

$\rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \xrightarrow{\sin x = t} 2t^2 + t - 1 = 0 \begin{cases} t = -1 \rightarrow \sin x = -1 \\ t = \frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} \sin x = -1 \rightarrow x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$

---

⑨

$x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \rightarrow P(-2) = 0 \rightarrow -8 + 4a - 2b + 2 = 0$

$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow P(1) = 0 \rightarrow 1 + a + b + 2 = 0$

$\begin{cases} 4a - 2b = 6 \\ a + b = -3 \end{cases} \rightarrow a = 0 \quad , \quad b = -3$

Powered by CamScanner

(۱۰) الف) $\lim_{x\to ۳^-} \frac{[x]-۳}{x-۳} = \lim_{x\to ۳^-} \frac{۲-۳}{x-۳} = \frac{-۱}{۰^-} = +\infty$

ب) $\lim_{x\to ۳} \frac{x^۲-۹}{\sqrt{x+۱}-۲} \times \frac{\sqrt{x+۱}+۲}{\sqrt{x+۱}+۲} = \lim_{x\to ۳} \frac{(x-۳)(x+۳)(\sqrt{x+۱}+۲)}{(x-۳)}$

$\to \lim_{x\to ۳} (x+۳)(\sqrt{x+۱}+۲) = ۶(۲+۲) = ۶(۴) = ۲۴$

---

(۱۱) $\lim_{x\to ۱} \frac{\sqrt[۳]{x}-۱}{x^۲-۵x+۴} \times \frac{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴}{\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴} = \lim_{x\to ۱} \frac{(x-۱)}{(x-۱)(x+۳)(\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴)}$

$\to \lim_{x\to ۱} \frac{۱}{(x+۳)(\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴)} = \frac{۱}{(۱۱)(۴+۴+۴)} = \frac{۱}{۱۳۲}$

---

(۱۲) الف) $\lim_{x\to (-۱)^-} \frac{[x]+۱}{x+۱} = \lim_{x\to (-۱)^-} \frac{-۲+۱}{x+۱} = \frac{-۱}{۰^-} = +\infty$

ب) $\lim_{x\to -\infty} \frac{۵x-x^۲}{۳x^۲+۲}$ هم‌ارز $\to \lim_{x\to -\infty} \frac{-x^۲}{۳x^۲} = \frac{-۱}{۳}$

---

(۱۳) $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \to f'(۲) = \lim_{x\to ۲} \frac{-x^۲+۱۰-۶}{x-۲} = \lim_{x\to ۲} \frac{(۲-x)(۴+x)}{-(۲-x)}$

$\to \lim_{x\to ۲} -(۴+x) = -۶$

تابع دهنده : مجانب‌های افقی

Powered by CamScanner