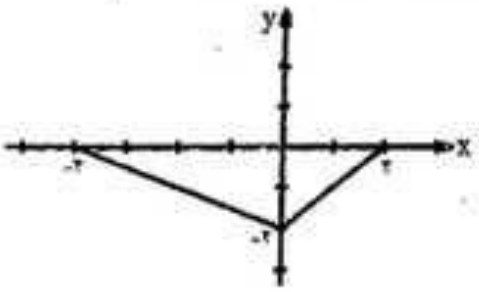
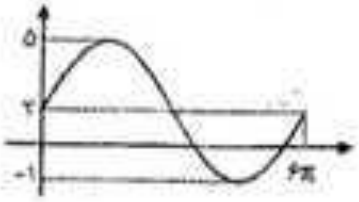
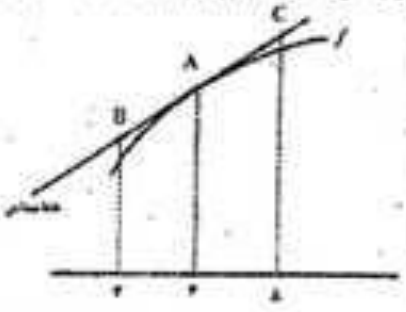
| | | |
|---|---|---|
| نام و نام خانوادگی دانش آموز:<br>رشته: علوم تجربی  کلاس: دوازدهم<br>تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۱۰/۱۰ | جمهوری اسلامی ایران<br>اداره کل آموزش و پرورش استانی مازندران<br>مدیریت آموزش و پرورش شهرستان بهشهر<br>دبیرستان استعدادهای درخشان شهید بهشتی | سوالات عربی: ریاضی (۳)<br>مدت امتحان: ۸۵ دقیقه<br>ساعت شروع امتحان: ۱۰ صبح |
| امتحانات داخلی نوبت اول: دیماه ۱۴۰۱ | | |

## سوالات

| ردیف | لطفا پاسخ سوالات را روی همین برگ بنویسید | بارم |
|---|---|---|
| ۱ | نمودار $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ را به کمک انتقال رسم کنید. | ۱ |
| ۲ | تابع زیر را رسم کنید و سپس مشخص کنید در چه بازه‌ی حداکثری:<br>الف) صعودی  ب) اکیداً نزولی  ج) نزولی  د) هم صعودی و هم نزولی<br>$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 1 \\ 1 & 0 \leq x < 1 \\ -x + 2 & x < 0 \end{cases}$ | ۲ |
| ۳ | توابع f و g با ضابطه‌های $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ و $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$ مفروضند. اولاً دامنه‌ی توابع f ، g ، gof را تعیین کنید.<br>سپس ضابطه‌ی gof را بنویسید. | ۱/۵ |
| ۴ | فرض کنید نمودار تابع $y = f\left(-\frac{1}{2}x\right)$ به صورت زیر باشد. نمودار تابع $y = 3f(-2x)$ را رسم کنید.<br> | ۲ |
| ۵ | اگر $f(x) = \frac{1}{8}x - 2$ و $g(x) = x^3$ باشد، مقدار $g^{-1}of^{-1}(5)$ را به دست آورید. | ۱ |
| ۶ | اگر $f(x) + f^{-1}(x) = 2x + 10$ باشد، مقدار $\frac{1 + f(1)}{2 - f^{-1}(0)}$ را حساب کنید. | ۱/۵ |

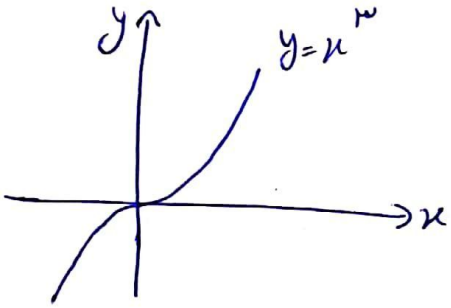
موفق باشید

| | | |
|---|---|---|
| ۷ | با توجه به نمودار داده شده جدول زیر را کامل کنید<br><br><br>تناوب: ... ، می‌نیمم: ... ، ماکزیمم: ... ، ضابطه تابع: ... | ۱ |
| ۸ | معادله‌ی مثلثاتی زیر را حل کنید و سپس جواب‌های آن را در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ به‌دست آورید<br>$\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ | ۲ |
| ۹ | حاصل حد زیر را حساب کنید<br>$\lim_{x \to 1} \frac{7}{x-1} - \frac{12}{x^2+4x-5}$ | ۱ |
| ۱۰ | حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید<br>الف) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{2-\sqrt{x+1}}$<br>ب) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{[x]-2}{\lvert 2x-1 \rvert}$<br>پ) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2-5x+1}{6x^3-11x^2-3}$ | ۳ |
| ۱۱ | اگر $\lim_{x \to -\infty} \frac{ax^n}{3x+\sqrt{4x^2+1}} = 5$ باشد، $n$ و $a$ را حساب کنید. | ۱ |
| ۱۲ | اگر $f(x) = x^2 - 3x$ باشد با استفاده از تعریف مشتق $f'(1)$ را حساب کنید. | ۱/۵ |
| ۱۳ | برای تابع $f$ در شکل روبه‌رو داریم $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 24$ با توجه به شکل، مختصات نقاط B و C را بیابید.<br><br> | ۱/۵ |

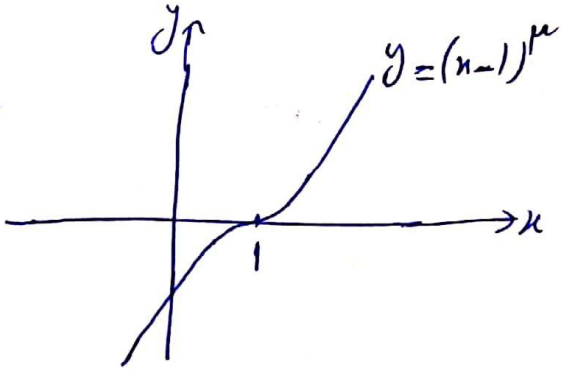
پاسخ تشریحی ریاضی ۳ تجربی - فرزانان - پیشنهاد  تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۱۰/۱۰  احسان غنی زاده

سئوال ۱)

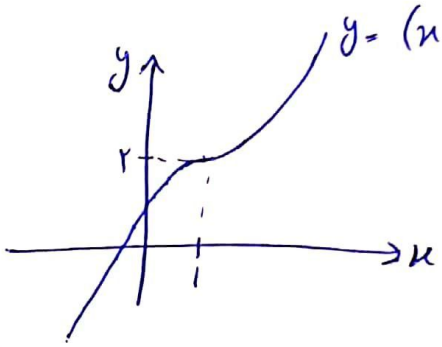
$$y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 2 = (x-1)^3 + 2$$




یک واحد به راست انتقال می‌دهیم



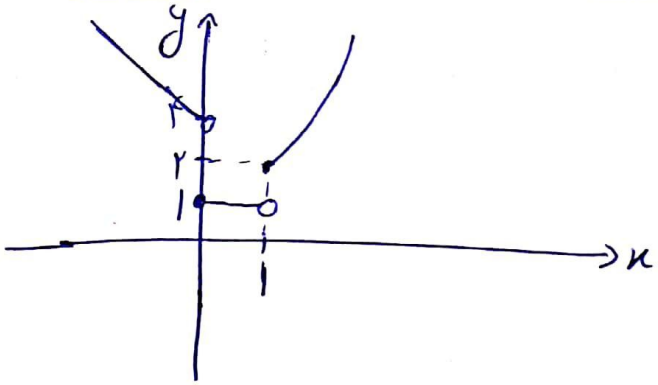

۲ واحد به بالا انتقال می‌دهیم




---

سئوال ۲)

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x \geq 1 \\ 1 & 0 \leq x < 1 \\ -x+2 & x < 0 \end{cases}$$




الف) صعودی: $[0, +\infty)$

ب) اکیداً نزولی: $(-\infty, 0)$

ج) نزولی: $(-\infty, 1)$

د) صعودی و هم نزولی: $[0, 1)$

---

سئوال ۳)

$$f(x) = \sqrt{4-x^2}, \quad g(x) = \frac{x+3}{x-1} \rightarrow D_f: 4-x^2 \geq 0 \rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{1\}$$

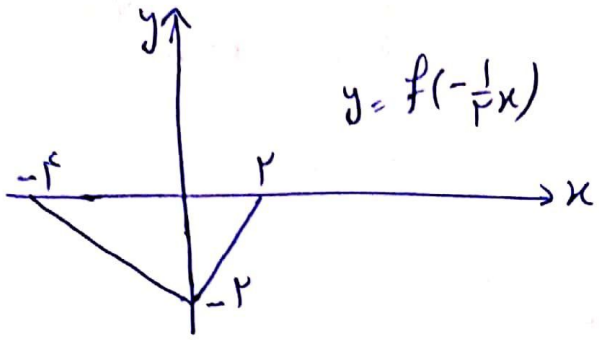
$$D_{g\circ f} = \{x \mid x \in D_f, f(x) \in D_g\} \Rightarrow D_{g\circ f} = \{x \mid -2 \leq x \leq 2, \sqrt{4-x^2} \neq 1\}$$

$$g\circ f = g(f(x)) = g(\sqrt{4-x^2}) = \frac{\sqrt{4-x^2}+3}{\sqrt{4-x^2}-1} \Rightarrow D_{g\circ f} = [-2,2] - \{\pm\sqrt{3}\}$$

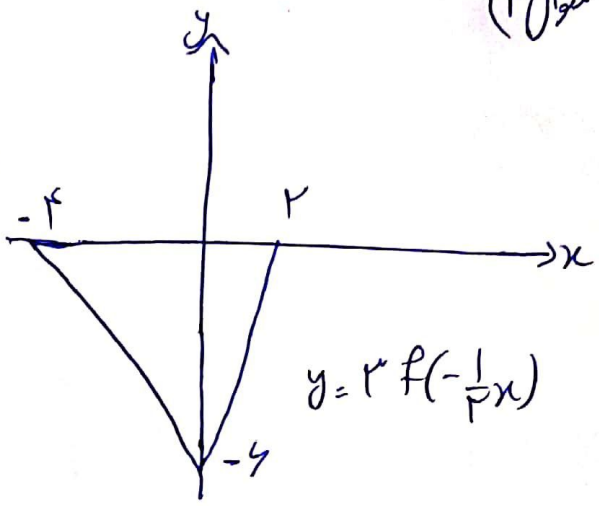
$4-x^2 \neq 1 \rightarrow x \neq \pm\sqrt{3}$

Scanned with CamScanner

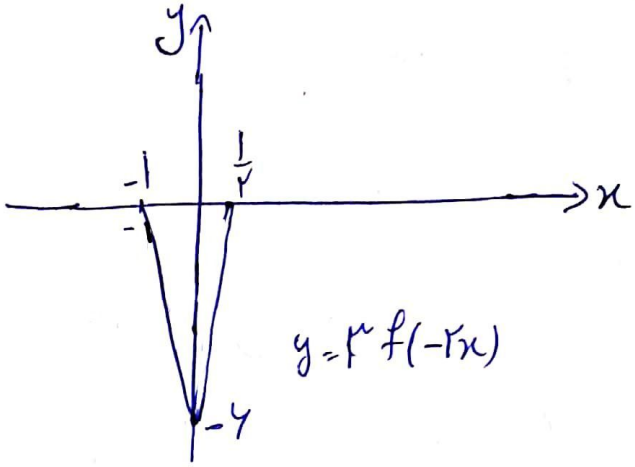
سوال ۴)




عرض را ۲ برابر می‌کنیم




دامنه‌ها را $\frac{1}{۲}$ برابر می‌کنیم




---

سوال ۵)

$f(x)=\frac{1}{۸}x-۳$ ، $g(x)=x^{۳}$ $\quad fog(x)=f(g(x))=f(x^{۳})=\frac{1}{۸}x^{۳}-۳$

$g^{-1}of^{-1}(a)=(fog)^{-1}(a)=a \rightarrow fog(a)=a \Rightarrow \frac{1}{۸}a^{۳}-۳=a \rightarrow \frac{1}{۸}a^{۳}=۸$

$\Rightarrow a^{۳}=۶۴ \Rightarrow a=\sqrt[۳]{۶۴}=۴ \Rightarrow (fog)^{-1}(a)=۴$

---

سوال ۶)

$f(x)+f^{-1}(x)=۲x+۱۰$ $\quad f^{-1}of(۶)=۶$

$f(a)+a=۲a+۱۰$ $\quad f^{-1}(۶)=a \rightarrow f(a)=۶$

$f(a)=a+۱۰ \Rightarrow ۶=a+۱۰ \Rightarrow \boxed{a=-۴} \Rightarrow f^{-1}(۶)=-۴$

$\Rightarrow f(x)-۴=۲x+۱۰ \Rightarrow f(x)=۲x+۱۴ \rightarrow$ $\quad f^{-1}(x)=\frac{x-۱۴}{۲}$

$\Rightarrow \frac{۱+f(۱)}{۳-f^{-1}(۰)}=\frac{۱+۲(۱)+۱۴}{۳-\frac{-۱۴}{۲}}=\frac{۱+۲+۱۴}{۳+۷}=\frac{۱۷}{۱۰}$

---

سوال ۷)

$T=۶\pi \rightarrow \frac{۲\pi}{|b|}=۶\pi$ $\quad f(x)=a\sin bx+c$ $\quad \rightarrow f(x)=۳\sin\frac{1}{۳}x+۲$

$\Rightarrow |b|=\frac{1}{۳}$

$\boxed{min=-۱} \Rightarrow -|a|+c=-۱ \Rightarrow |a|-c=۱$

$\boxed{max=۵} \Rightarrow |a|+c=۵ \Rightarrow$ $\begin{array}{l} |a|+c=۵ \\ |a|=۳ \end{array}$ (+) $\Rightarrow c=۲$

Scanned with CamScanner

(۸ سوال)

$\cos 2x - \cos x + 1 = 0 \rightarrow 2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0$

$\Rightarrow 2\cos^2 x - \cos x = 0 \rightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x = k\pi & ① \\ 2\cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} & ② \end{cases}$

① $\rightarrow x = k\pi \longrightarrow x \in \{0, \pi, 2\pi\}$

② $\rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \rightarrow x \in \{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$

---

(۹ سوال)

$$\lim_{x\to 1} \frac{5}{x-1} - \frac{24}{x^2+4x-5} = \frac{\infty - \infty}{\frac{0}{0}} \rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{5}{x-1} - \frac{24}{(x-1)(x+5)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{5x+25-24}{(x-1)(x+5)} = \lim_{x\to 1} \frac{5(x-1)}{(x-1)(x+5)} = \lim_{x\to 1} \frac{5}{x+5} = \frac{5}{6}$$

---

(۱۰ سوال)

ج) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{2-\sqrt{x+1}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هوپیتال}} \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{2-\sqrt{x+1}} \times \frac{2+\sqrt{x+1}}{2+\sqrt{x+1}}$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-3)(x+3)(2+\sqrt{x+1})}{4-(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-3)(x+3)(2+\sqrt{x+1})}{-(x-3)} = -18-12\sqrt{2}$$

د) $\lim_{x\to \frac{1}{2}^+} \frac{[x]-3}{|2x-1|} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$

ه) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4 - 5x + 1}{5x^3 - 11x^2 - 3} = \frac{1}{3}$

Scanned with CamScanner

سوال ۱۱)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^n}{3x+\sqrt{4x^2-1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^n}{3x+2|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^n}{x}=0$$

$\Rightarrow n=1 \Rightarrow a=0$

---

سوال ۱۲)

$f(x)=x^2-3x \quad f'(1)=? \quad f(1)=1^2-3=1-3=-2$

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x-(-2)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=-1$$

---

سوال ۱۳)

$f'(4)=1,0 \; , \; f(4)=25$

$$f'(4)=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{y_C-25}{5-4}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{y_C-25}{1}=\frac{3}{2}\Rightarrow y=1,0+25$$

$\Rightarrow y_C=29,5 \rightarrow C\left|\begin{matrix}5\\29,0\end{matrix}\right.$

$$f'(3)=f'(4)=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{25-y_B}{4-3}=25-y_B=1,0\Rightarrow y_B=23,5$$

$\Rightarrow B\left|\begin{matrix}3\\23,0\end{matrix}\right.$

Scanned with CamScanner