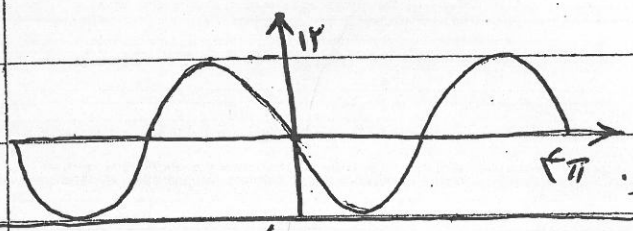
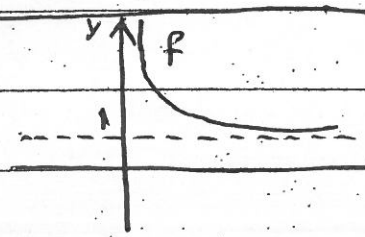
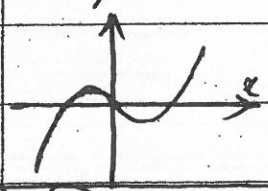
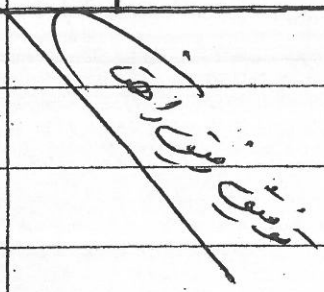
| | | |
|---|---|---|
| نام و نام خانوادگی:<br>نام پدر:<br>پایه: دوازدهم رشته: تجربی<br>شماره دانش آموزی:<br>تعداد سوالات: ۱۳<br>تعداد صفحه: ۲<br>پاسخ نامه نیاز دارد ☑ ندارد ☐ | مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان<br>اداره آموزش و پرورش شهرستان سمنان<br>مرکز استعدادهای درخشان شهید بهشتی سمنان<br>(دوره دوم) | نوبت برگزاری: اول<br>نام درس: ریاضی ۳<br>نام دبیر: واعظی نژاد<br>تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۱۱/۱۱<br>مدت پاسخگویی: ۱۰۰ دقیقه<br>ماشین حساب نیاز دارد ☐ ندارد ☑ |

| ردیف | نمره با عدد: نمره با حروف: امضاء | بارم |
|---|---|---|
| ۱ | اگر $f(x)=x^2-3x+8$ و $g(x)=1-2x$ باشند و بدانیم $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $(f\circ g)(x)=12$ هستند، مقدار $\alpha\beta-\alpha-\beta$ را بیابید | ۲ |
| ۲ | نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^3$ با انتقال بر نمودار تابع $g(x)=x^3+3x^2+3x$ منطبق می‌شود. در این انتقال نقطهٔ بطول ۲ واقع بر نمودار $f$ به نقطه‌ای با کدام عرض بر نمودار $g$ قرار می‌گیرد؟ | ۱/۵ |
| ۳ | به ازای چند عدد صحیح $x$، تابع $f=\{(x^2,9),(x^2,5),(-2,4x-3)\}$ معتبر است؟ | ۱/۵ |
| ۴ | تابع با ضابطهٔ $f(x)=x-1x-2+1$ در بازهٔ داروی پذیراست. ضابطهٔ وارون آن در بازهٔ مذکور را بدست آورید. | ۲ |
| ۵ | شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع<br>$f(x)=b\cos(\frac{\pi}{2}-ax)$<br>است. کمترین مقدار $a+b$ را بدست آورید.   | ۱ |
| ۶ | حداکثر مقدار $a$ چقدر باشد تا تابع $f(x)=\tan(\frac{\pi x}{4})$ در بازهٔ $(a,2a)$ اکیداً صعودی باشد | ۱ |
| ۷ | اگر دورهٔ تناوب تابع $f(x)=2-3a\cos(\frac{\pi}{a}x+1)$ بصورت $T=4$ باشد،<br>بیشترین مقدار تابع (Max) چقدر است؟ | ۱ |
| ۸ | مجموع جوابهای معادلهٔ مثلثاتی $2\cos x(\cos x-\sin x)=1$ در بازهٔ $(0,2\pi)$ را بیابید | ۲ |
| ۹ | حاصل حدهای زیر را بیابید:<br>الف) $\lim_{x\to(-1)^-}\frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{1+\sin(\frac{\pi}{2}x)}$<br>ب) $\lim_{x\to 2^-}\frac{3x^2-8x+4}{x^2-4x+4}$<br>ج) $\lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{2x-1}}{x^2-x}$ | ۲/۵ |

ادامهٔ سوالات در صفحه دوم

| | | |
|---|---|---|
| ۱۰ | اگر $\lim_{x\to -۴} \frac{\sqrt{x+۴}+۲}{x^۲+۲ax+b} = +\infty$ باشد حاصل $\lim_{x\to\infty} \frac{ax^۳+۲x+۵}{۷-bx^۳}$ را بیابید. | ۲ |
| ۱۱ | شکل مقابل نمودار تابع $f$ است. حاصل $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-\sqrt{f(x)}}{۱-f(x)}$ را بدست آورید.   | ۱ |
| ۱۲ | معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{x-۱}$ را در نقطه‌ای بطول ۲ واقع بر آن بنویسید. | ۱/۵ |
| ۱۳ | با توجه به نمودار مقابل مطلوبست :   | ۱ |
| الف) | نقطهٔ A را روی نمودار طوری بیابید که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن مثبت باشند. | |
| ب) | نقاط B و C را طوری بیابید که مقدار تابع در آن‌ها قرینه و مشتق مساوی داشته باشند. | |




جمع بارم ۲۰ نمره

بنام خدا

پاسخ از: نریمان فتح اللهی

۱ | اگر $f(x)=x^2-3x+8$ و $g(x)=1-2x$ باشند و بدانیم $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $(f\circ g)(x)=12$ هستند، مقدار $|\alpha-\beta|$ را بیابید.

روش اول:

$$f(g(x))=12=g^2-3g+8\rightarrow g^2-3g-4=0$$

$$(g-4)(g+1)=0 \begin{cases} g_1=-1=1-2x\rightarrow x=1=\alpha \\ g_2=4=1-2x\rightarrow x=-\frac{3}{2}=\beta \end{cases}$$

$$|\alpha-\beta|=\left|1+\frac{3}{2}\right|=\frac{5}{2}$$

روش دوم:

$$f(g(x))=(1-2x)^2-3(1-2x)+8=1-4x+4x^2-3+2x+8$$

$$(f\circ g)(x)=4x^2+2x+5=12\rightarrow 2x^2+2x-5=0$$

$$\xrightarrow{a+b+c=0} x_1=1\ ,\ x_2=\frac{c}{a}=-\frac{3}{2}$$

$$\rightarrow |\alpha-\beta|=\left|1+\frac{3}{2}\right|=\frac{5}{2}$$

| | |
|---|---|
| ۲ | نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^3$ با انتقال بر نمودار تابع $g(x)=x^3+3x^2+3x$ منطبق می‌شود. در این انتقال نقطه‌ی به طول ۲ واقع بر نمودار $f$ به نقطه‌ای با کدام عرض بر نمودار $g$ قرار می‌گیرد؟ |

$f(x)=x^3 \qquad A(2,8)$

$g(x)=x^3+3x^2+3x=x^3+3x^2+3x+1-1$

$g(x)=(x+1)^3-1$

| $f(x)$ | $x^3$ | $(x+1)^3$ | $(x+1)^3-1$ | |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | $(2,8)$ | $(1,8)$ | $(1,7)$ | ⟵ ۷ نقطه‌ای به عرض |

| | |
|---|---|
| ۴ | به ازای چند عدد صحیح $x$، تابع $f=\{(-2,4x-3),(0,x^2),(x^2,9)\}$ صعودی است؟ |

$f=\{(-2,4x-3),(0,x^2),(x^2,9)\}$

$x\neq 0$

صعودی : $x_2\geq x_1 \longrightarrow f(x_2)\geq f(x_1)$

$x^2\geq 4x-3 \longrightarrow x^2-4x+3\geq 0 \longrightarrow x\leq 1 \cup x\geq 3$ ⟵ A

$9\geq x^2 \xrightarrow{\sqrt{}} |x|\leq 3 \longrightarrow -3\leq x\leq 3$ ⟵ B

$A\cap B: [-3,1]\cup\{3\}-\{0\} \longrightarrow$ اعداد صحیح : $\{-3,-2,-1,1,3\}$

شامل ۵ عدد صحیح

| | |
|---|---|
| ۴ | تابع با ضابطه $f(x)=x-\lvert x-2\rvert+1$ در بازه‌ی داده شده دارای چند ضابطه‌ی وارون پذیر است. ضابطه‌ی وارون آن در بازه‌ی مذکور را بدست آورید. |

$$f(x)=\begin{cases} 3 & ; \quad x>2 \\ \boxed{2x-1 \quad ; \quad x\leq 2} \end{cases}$$

دارای ضابطه‌ی نابدیهی

چون یک به یک نیست

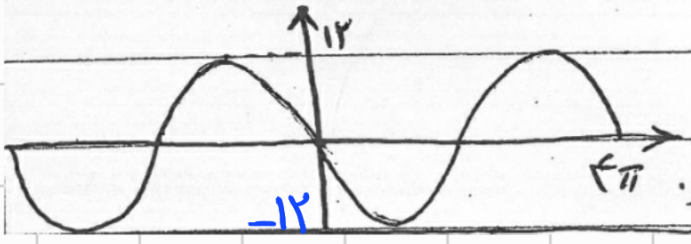
$x\leq 2 \rightarrow 2x\leq 4 \rightarrow 2x-1\leq 3 \rightarrow y\leq 3 \rightarrow D_{f^{-1}}=(-\infty,3]$

$y=2x-1 \rightarrow y+1=2x \rightarrow x=\frac{1}{2}(y+1)$

جای $x$ و $y$ عوض

$\rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(x+1) \quad ; \quad x\in(-\infty,3]$

| | |
|---|---|
| ۵ | شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $f(x)=b\cos\left(\frac{\pi}{2}-ax\right)$ است. کمترین مقدار $a+b$ را بدست آورید. |




$f(x)=b\sin ax \rightarrow T=\frac{2\pi}{|a|}=4\pi \rightarrow |a|=\frac{1}{2}$

$\max(f(x))=|b|=12$

نمودار در $x=0$ نزولی است. $\rightarrow ab<0 \rightarrow$

$$\boxed{a=\frac{1}{2},\ b=-12} \quad \text{یا} \quad \boxed{a=-\frac{1}{2},\ b=12}$$

$$\min(a+b)=\frac{1}{2}-12=\frac{-23}{2}$$

| ۶ | حداکثر مقدار a چقدر باشد تا تابع $f(x)=\tan(\frac{\pi x}{a})$ در بازهٔ $(2,a)$ اکیداً صعودی باشد |
|---|---|

دورهٔ تناوب $\Rightarrow T=\frac{\pi}{\frac{\pi}{4}}=4$

$\cos\frac{\pi}{4}x\neq 0 \rightarrow \frac{\pi}{4}x\neq k\pi+\frac{\pi}{2} \rightarrow x\neq 4k+2 \rightarrow x\neq \dots,-2,2,6,10,\dots$

بنابراین تابع $f(x)$ در بازهٔ $(2,6)$ تعریف نشده و لذا اکیداً صعودی است.

پس حداکثر مقدار a برابر ۶ است.

| ۷ | اگر دورهٔ تناوب تابع $f(x)=2-3a\cos(\frac{\pi}{a}x+1)$ بصورت $T=4$ باشد، بیشترین مقدار تابع (Max) چقدر است؟ |
|---|---|

$T=\frac{2\pi}{|\frac{\pi}{a}|}=2|a|=4 \rightarrow |a|=2$

$\max(f(x))=2+|-2a|=2+3|a|=2+3(2)=8$

| ۸ | مجموع جوابهای معادلهٔ مثلثاتی $2\cos x(\cos x-\sin x)=1$ در بازهٔ $(0,2\pi)$ را بیابید |
|---|---|

$2\cos^2 x-2\sin x\cos x=1 \rightarrow 2\cos^2 x-1=2\sin x\cos x$

$\cos 2x=\sin 2x=\cos(\frac{\pi}{2}-2x) \rightarrow 2x=2k\pi\pm(\frac{\pi}{2}-2x)$ ✓ ✗

$2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}-2x \rightarrow 4x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$

$x\in(0,2\pi)$ $\boxed{x=\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8},\frac{9\pi}{8},\frac{13\pi}{8}}$ ←

روش دوم: $\cos 2x=\sin 2x \rightarrow \tan 2x=1 \rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{4} \rightarrow x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$

حاصل حدهای زیر را بیابید :

ب) $\lim_{x \to (-1)^-} \dfrac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{1+\sin(\frac{\pi}{2}x)}$

$\star$ $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = \dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$= \lim_{u \to (-1)^-} \dfrac{1-\sin(\frac{\pi}{2}u)}{\cos(\frac{\pi}{2}u)} = \dfrac{1-(-1)}{0^-} = \dfrac{2}{0^-} = -\infty$

ج) $\lim_{x \to 2^-} \dfrac{2x^2-8x+6}{x^2-4x+4} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

$\lim_{u \to 2^-} \dfrac{(u-2)(2u-2)}{(u-2)^2} = \lim_{u \to 2^-} \dfrac{2u-2}{u-2} = \dfrac{4}{0^-} = -\infty$

د) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x-\sqrt{2x-1}}{x^2-x} = \dfrac{0}{0}$ مبهم

$\lim_{u \to 1} \dfrac{u-\sqrt{2u-1}}{u^2-u} = \lim_{u \to 1} \dfrac{(u-\sqrt{2u-1})(u+\sqrt{2u-1})}{u(u-1)(u+\sqrt{2u-1})}$

$= \lim_{u \to 1} \dfrac{u^2-2u+1=(u-1)^2}{u(u-1)(u+\sqrt{2u-1})} = \lim_{u \to 1} \dfrac{u-1}{u(u+\sqrt{2u-1})} = 0$

۱۰ اگر $\lim_{x\to -۲} \frac{\sqrt{x+۶}+۲}{x^۲+۲ax+b} = +\infty$ باشد حاصل $\lim_{x\to\infty} \frac{ax^۳+۲x+۵}{۷-bx^۳}$ را بیابید.

$$\lim_{x\to -۲} \frac{\sqrt{x+۶}+۲}{x^۲+۲ax+b} = \frac{۴}{۰^+} = +\infty$$

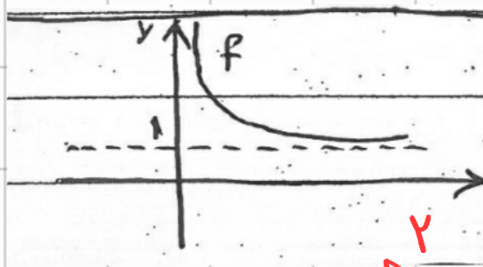
حد داده شده در ۲- دارای ریشه مضاعف است پس:

$$(x+۲)^۲ = x^۲+۴x+۴ = x^۲+۲ax+b$$

$$۲a=۴ \to a=۲ \quad , \quad b=۴$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{۳x^۳+۲x+۵}{۷-۹x^۳} = \lim_{x\to\infty} \frac{۳x^۳}{-۹x^۳} = -\frac{۱}{۳}$$

۱۱ شکل مقابل نمودار تابع f است. حاصل $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-\sqrt{f(x)}}{۱-f(x)}$ را بیابید.




$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-\sqrt{f(x)}}{۱-f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f^۲(x)-f(x)}{(۱-f(x))(f(x)+\sqrt{f(x)})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)(f(x)-۱)}{-(f(x)-۱)(f(x)+\sqrt{f(x)})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-f(x)}{f(x)+\sqrt{f(x)}}$$

$$= \frac{-۱}{۱+۱} = -\frac{۱}{۲}$$

۱۲ | معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{x-1}$ را در نقطه‌ای به طول ۲ و تعیین کنید.

$A(2,2)$

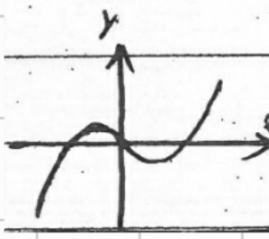
$$f'(x)=\frac{1\times(x-1)-1\times x}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$f'(2)=\frac{-1}{(2-1)^2}=-1 \xrightarrow{A} y-2=f'(2)(x-2)$$

$$y-2=-(x-2) \rightarrow y=-x+4$$

معادله خط مماس

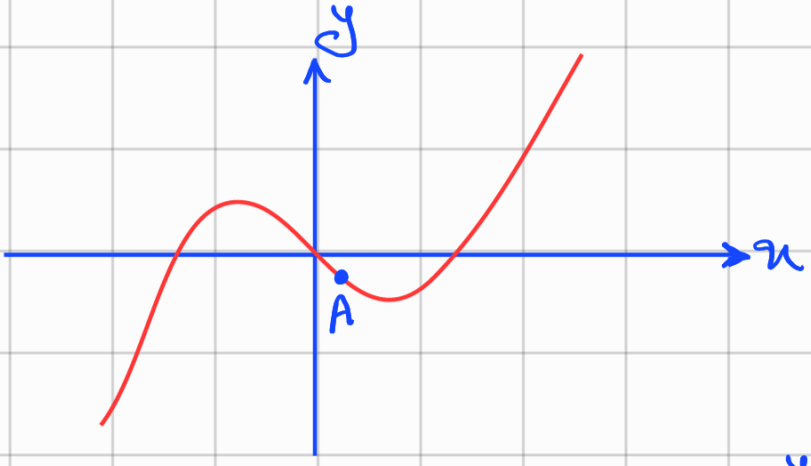
۱۳ | با توجه به نمودار مقابل مطلوب است:



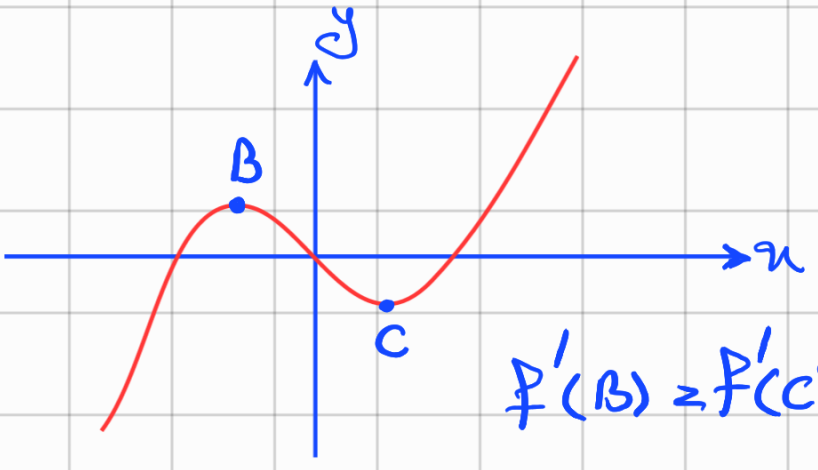

الف) نقطهٔ A را روی نمودار طوری بیابید که مقدار تابع و مقدار مشتق در آن مثبت باشد.

ب) نقاط B و C را طوری بیابید که مقدار تابع در آن‌ها قرینه و مشتق مساوی داشته باشند.

الف)




ب)




$f'(B)=f'(C)=0$