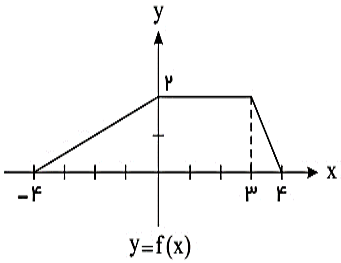
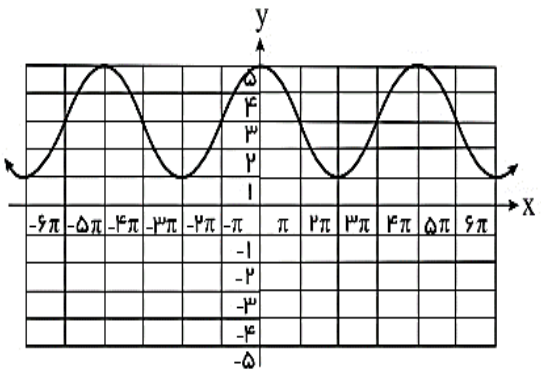
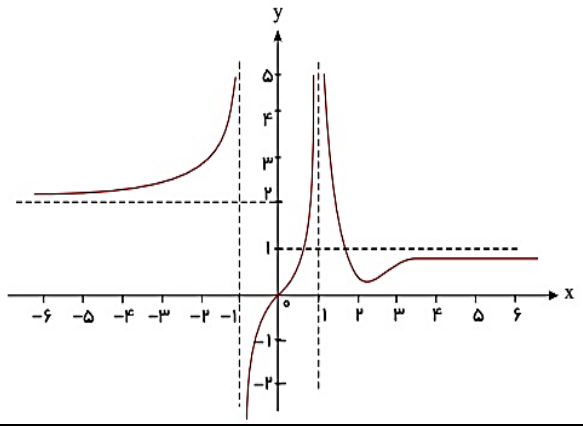
نام و نام خانوادگی:	رشته: علوم تجربی	تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۱۰/۱۱	
آزمون درس: ریاضی۳	کلاس: دوازدهم	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	
دبیرستان: دانشگاهیان و ایران دخت	شهرستان: بوشهر	نام دبیر: حمیدرضا عالی داعی	

ردیف	"این آزمون مشتمل بر ۱۴ سوال و در ۳ صفحه می باشد."	نمره

۱	مشخص کنید کدام‌یک از جملات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟ الف) اگر $f(x)=x^{۲}-۴$ و $g(x)=\sqrt{x^{۲}-۴}$؛ آنگاه $(fog)(۵)=-۲۵$. ب) برای دو تابع f و g که $f\neq g$ تساوی $(fog)(x)=(gof)(x)$ هیچ‌وقت برقرار نیست. پ) اگر $f(۷)=۵$ و $g(۴)=۷$، آنگاه $(fog)(۴)=۵$. ت) اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=۲x-۱$، آنگاه $(fog)(۵)=g(۲)$.	۱
۲	با استفاده از نمودار تابع $y=f(x)$، نمودار $y=\frac{۱}{۲}f(۴x)$ را رسم کنید. 	۱
۳	اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=۲x^{۲}-۱$ باشد، دامنهٔ تابع $fog(x)$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.	۱/۵
۴	اگر $f(x)=\frac{۱}{۸}x-۳$ و $g(x)=x^{۳}$ باشد، مقدار $g^{-۱}of^{-۱}(۵)$ را به‌دست آورید.	۱
۵	ضابطهٔ تابع وارون توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید. دامنه و برد هر تابع و وارون آن را با استفاده از نمودار مشخص کنید. $g(x)=۱+\sqrt{x-۲}$	۱/۵
۶	فرض کنید $\cos\alpha=\frac{۵}{۱۳}$ و α زاویه‌ای حاده باشد، حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید. الف) $\cos ۲\alpha$ ب) $\sin ۲\alpha$	۱/۵
۷	الف) دورهٔ تناوب و مقادیر ماکسیمم و مینیمم تابع $y=۲-۳\sin ۴x$ را به‌دست آورید. ب) دامنهٔ تابع $f(x)=\tan(۲x)$ را به‌دست آورید.	۱/۵
۸	**کدامیک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟** **الف- تابع تانژانت در دامنه اش صعودی است.** **ب- می توان بازه ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد.** **پ-می توان بازه ای یافت که تابع تانژانت در آن غیرصعودی باشد.** **ت- تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.**	۱

۹	نمودار زیر مربوط به تابعی با ضابطهٔ $y = a\cos bx + c$ است. با توجه به نمودار، ضابطهٔ آن را مشخص کنید.  	۱/۵
۱۰	معادلهٔ مثلثاتی $\cos x(۲\cos x - ۹) = ۵$ را حل کنید.	۱/۵
۱۱	**حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.** **الف** $\lim_{x\to ۳} \frac{x^۲ - ۵x + ۶}{۲x^۳ - ۱۳x^۲ + ۲۴x - ۹}$ **ب** $\lim_{x\to ۱} \frac{x - \sqrt{x}}{x^۲ + x - ۲}$	۲
۱۲	نمودار تابع f به شکل مقابل است. حدود خواسته شده را بنویسید: الف) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ ت) $\lim_{x\to ۱^-} f(x)$ ب) $\lim_{x\to (-۱)^-} f(x)$ ث) $\lim_{x\to ۱^+} f(x)$ پ) $\lim_{x\to (-۱)^+} f(x)$ ج) $\lim_{x\to +\infty} f(x)$  	۱/۵
۱۳	**حدهای زیر را تعیین کنید.** **الف** $\lim_{x\to -۶} \frac{۹}{(x+۶)^۲}$ **ب** $\lim_{x\to (-۲)^-} \frac{-۳x}{x^۲ - ۴}$ **پ** $\lim_{x\to \frac{\pi^+}{۲}} \tan x$	۲

نام و نام خانوادگی:	رشته: علوم تجربی	تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۱۰/۱۱	
آزمون درس: ریاضی۳	کلاس: دوازدهم	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	
دبیرستان: دانشگاهیان و ایران دخت	شهرستان: بوشهر	نام دبیر: حمیدرضا عالی داعی	

ردیف	"این آزمون مشتمل بر ۱۴ سوال و در ۳ صفحه می باشد."	نمره

	ت $\lim_{x\to ۳^-} \frac{[x]-۳}{x-۳}$	
۱۴	حدود زیر را محاسبه کنید. الف $\lim_{x\to+\infty} \frac{۲x^۳-۵x+۴}{۷x^۳-۱۱x^۲-۶x}$ ب $\lim_{x\to-\infty} \frac{۵x+۴}{x^۳+x-۸}$ پ $\lim_{x\to-\infty} \frac{-۴x^۷+۵x^۲}{۲x^۳+۹}$	۱/۵

موفق باشید...

نام و نام خانوادگی:	رشته: علوم تجربی	تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۱۰/۱۱	
آزمون درس: ریاضی۳	کلاس: دوازدهم	مدت امتحان:	
دبیرستان: دانشگاهیان و ایران دخت	شهرستان: بوشهر	نام دبیر: حمیدرضا عالی داعی	

ردیف	پاسخبرگ	نمره

۱ - الف)این مورد نادرست است. زیرا حاصل $fog(۵)$ برابر ۱۷ است نه ۲۵-.

$$\begin{cases} f(x)=x^۲-۴ \\ g(x)=\sqrt{x^۲-۴} \end{cases} \rightarrow fog(۵)=f(\underbrace{g(۵)}_{g(۵)=\sqrt{۲۵-۴}=\sqrt{۲۱}})=f(\sqrt{۲۱})=(\sqrt{۲۱})^۲-۴=۲۱-۴=۱۷$$

ب)این مورد هم نادرست است. چراکه با فرض $f(x)=\frac{۱}{x}$ و $g(x)=x$ شرط $f\neq g$ برای هر $x\neq \pm ۱$ برقرار بوده و داریم:

$$fog(x)=f(g(x))=f(x)=\frac{۱}{x}\ ,\ gof(x)=g(f(x))=g(\frac{۱}{x})=\frac{۱}{x}$$

می‌بینیم که علی‌رغم برابر نبودن f و g توابع fog و gof برابرند.

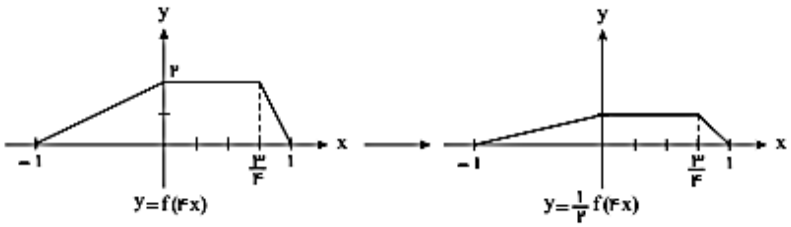
پ)این مورد درست است. زیرا $fog(۴)=f(\underbrace{g(۴)}_{۷})=f(۷)=۵$

ت)این مورد نیز درست است. زیرا:

$$fog(۵)=f(g(۵))\xrightarrow[g(۵)=۲(۵)-۱=۹]{g(x)=۲x-۱} f(۹)\xrightarrow{f(x)=\sqrt{x}}\sqrt{۹}=۳$$

از طرف دیگر با توجه به $g(x)=۲x-۱$، $g(۲)=۲(۲)-۱=۳$ می‌باشد. یعنی تساوی $fog(۵)=g(۲)$ برقرار است.

۲ - کافی است طول نقاط را $\frac{۱}{۴}$ برابر کرده و سپس عرض نقاط را نصف کنیم.



۳ -

$$f(x)=\sqrt{x-۱}\rightarrow D_f: x-۱\geq ۰\rightarrow x\geq ۱$$

$$g(x)=۲x^۲-۱\rightarrow D_g=\mathbb{R}$$

$$D_{fog}=\{x|x\in D_g, g(x)\in D_f\}=\{x|x\in\mathbb{R}, ۲x^۲-۱\geq ۱\}=\{x|x\in\mathbb{R}, ۲x^۲\geq ۲\}=\{x|x\in\mathbb{R}, x^۲\geq ۱\}$$

$$=x\geq ۱ \text{ یا } x\leq -۱=(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$$

۴ - می‌دانیم اگر $f(a)=b$ باشد، آن‌گاه $f^{-۱}(b)=a$ است.

$$g^{-۱}of^{-۱}(۵)=g^{-۱}(f^{-۱}(۵))=g^{-۱}(۶۴)=۴$$

نام و نام خانوادگی:	رشته: علوم تجربی	تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۱۰/۱۱	
آزمون درس: ریاضی۳	کلاس: دوازدهم	مدت امتحان:	
دبیرستان: دانشگاهیان و ایران دخت	شهرستان: بوشهر	نام دبیر: حمیدرضا عالی داعی	

ردیف	پاسخبرگ	نمره

علت: $\begin{cases} f^{-1}(۵)=\alpha \to f(\alpha)=۵ \to \frac{۱}{۸}\alpha-۳=۵ \to \frac{۱}{۸}\alpha=۸ \to \alpha=۶۴ \\ g^{-1}(۶۴)=\beta \to g(\beta)=۶۴ \to \beta^{۳}=۶۴ \to \beta=۴ \end{cases}$

۵-

الف

$$g(x)=۱+\sqrt{x-۲} \to y=۱+\sqrt{x-۲} \xrightarrow{-۱} y-۱=\sqrt{x-۲} \xrightarrow[(x\geq ۲)]{\text{به توان ۲}} (y-۱)^{۲}=x-۲$$

$$\to x=(y-۱)^{۲}+۲ \longrightarrow f^{-۱}(x)=(x-۱)^{۲}+۲$$

$$\begin{cases} D_f \text{ برای } : x-۲\geq ۰ \to x\geq ۲ \to D_f=[۲,+\infty)=R_{f^{-۱}} \\ R_f \text{ برای } : y=۱+\underbrace{\sqrt{x-۲}}_{\min=۰} \to \min(y)=۱+۰=۱ \to y\geq ۱ \to R_f=[۱,+\infty)=D_{f^{-۱}} \end{cases}$$

۶-

$$\sin^{۲}\alpha=۱-\cos^{۲}\alpha=۱-\frac{۲۵}{۱۶۹}=\frac{۱۴۴}{۱۶۹} \to \sin\alpha=\pm\frac{۱۲}{۱۳} \xrightarrow{\alpha \text{ حاده است}} \sin\alpha=\frac{۱۲}{۱۳}$$

الف) $\cos ۲\alpha=۲\cos^{۲}\alpha-۱=۲(\frac{۲۵}{۱۶۹})-۱=\frac{۵۰}{۱۶۹}-۱=\frac{-۱۱۹}{۱۶۹}$

ب) $\sin ۲\alpha=۲\sin\alpha\cos\alpha=۲(\frac{۱۲}{۱۳})(\frac{۵}{۱۳})=\frac{۱۲۰}{۱۶۹}$

۷- الف)

$$y=a\sin bx+c \to \begin{cases} T=\frac{۲\pi}{|b|} \\ Max=|a|+c \\ Min=-|a|+c \end{cases}$$

پس:

$$T=\frac{۲\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}$$

$$Max=|a|+c=|-۳|+۲=۳+۲=۵$$

$$Min=-|a|+c=-|-۳|+۲=-۳+۲=-۱$$

ب)

$$y=\tan f(x) \to f(x)\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}$$

پس:

$$f(x)=\tan ۲x \to ۲x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲} \to x\neq \frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$$

۸-

الف نادرست، تابع تانژانت در دامنه‌اش غیریکنواست.

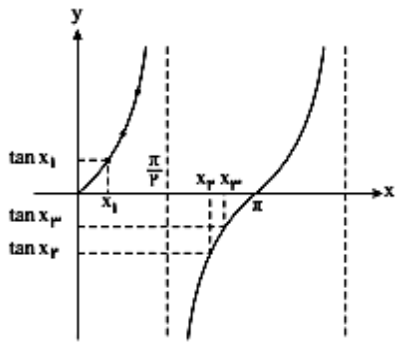
ب نادرست، تابع تانژانت در هیچ بازه‌ای نزولی نمی‌باشد.

پ درست، به‌عنوان مثال با توجه به نمودار تانژانت اگر بازهٔ $[۰,\pi]$ را در نظر بگیریم داریم:

$x_۱<x_۲ \Rightarrow \tan x_۱>\tan x_۲$

بنابراین تابع تانژانت در این بازه غیرصعودی است. توجه کنید که این بدان معنی نیست که تابع تانژانت در این بازه نزولی است زیرا برای $x_۲$ و $x_۳$ از این بازه داریم:

$$x_۲ < x_۳ \Rightarrow \tan x_۲ < \tan x_۳$$



در کل تابع تانژانت در هر بازه‌ای که شامل مجانب قائم باشد، غیریکنواست.

ت درست، تابع تانژانت در هر بازه‌ای که شامل مجانب قائم نباشد یعنی بازه‌ای که تابع تانژانت در آن بازه تعریف شده باشد، صعودی (اکیداً صعودی) است.

۹-

$$c = \frac{۵+۱}{۲} = ۳$$

$$|a| = \frac{۵-۱}{۲} = ۲ \, , a > ۰ , a = ۲$$

$$\Rightarrow \text{دوره تناوب} : T = \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow ۴\pi = \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{۲\pi}{۴\pi} = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow y = ۲\cos(\frac{x}{۲}) + ۳ \quad \text{یا} \quad y = ۲\cos(-\frac{x}{۲}) + ۳$$

۱۰-

$$\cos x(۲\cos x - ۹) = ۵ \rightarrow ۲\cos^۲ x - ۹\cos x - ۵ = ۰ \xrightarrow{\cos x = A} ۲A^۲ - ۹A - ۵ = ۰$$

$$\rightarrow \Delta = b^۲ - ۴ac = ۸۱ + ۴۰ = ۱۲۱$$

$$\rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} = \dfrac{۹+۱۱}{۴} = ۵ \rightarrow \cos x = ۵ \quad \text{(امکان ندارد)} \\ A = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a} = \dfrac{۹-۱۱}{۴} = -\dfrac{۱}{۲} \rightarrow \cos x = -\dfrac{۱}{۲} = \cos(\pi - \dfrac{\pi}{۳}) = \cos\dfrac{۲\pi}{۳} \xrightarrow{\cos x = \cos a \rightarrow x = ۲k\pi \pm a} x = ۲k\pi \pm \dfrac{۲\pi}{۳} \end{cases}$$

۱۱-

الف

$$\lim_{x\to ۳} \frac{x^۳ - ۵x + ۶}{۲x^۳ - ۱۳x^۲ + ۲۴x - ۹} = \frac{۰}{۰} \text{ مبهم}$$

برای رفع ابهام، مخرج را بر عامل ابهام یعنی $x - ۳$ تقسیم می‌کنیم و برای تجزیهٔ صورت از اتحاد جملهٔ مشترک کمک می‌گیریم.

$$۲x^۳ - ۱۳x^۲ + ۲۴x - ۹ \quad \Big| \; x - ۳ \;\; \Big/ \;\; ۲x^۲ - ۷x + ۳$$

$$\frac{-۲x^۳ + ۶x^۲}{-۷x^۲ + ۲۴x - ۹}$$

$$\frac{۷x^۲ - ۲۱x}{۳x - ۹}$$

$$\frac{-۳x + ۹}{\text{صفر}}$$

$$\text{پس: } \lim_{x\to ۳} \frac{(x-۲)(x-۳)}{(x-۳)(۲x^۲ - ۷x + ۳)} = \lim_{x\to ۳} \frac{x-۲}{۲x^۲ - ۷x + ۳}$$

به‌ازای $x = ۳$ مخرج صفر می‌شود پس مخرج را بر $x - ۳$ تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{r|l} ۲x^۲ - ۷x + ۳ & x - ۳ \\ \hline -۲x^۲ + ۶x & ۲x - ۱ \\ \hline -x + ۳ & \\ x - ۳ & \\ \hline \text{صفر} & \end{array}$$

$$\text{پس: } \lim_{x\to ۳} \frac{(x-۲)}{(x-۳)(۲x-۱)} \begin{cases} \lim\limits_{x\to ۳^+} \dfrac{(x-۲)}{(x-۳)(۲x-۱)} = \dfrac{۱}{(۰^+)(۵)} = \dfrac{۱}{۰^+} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to ۳^-} \dfrac{(x-۲)}{(x-۳)(۲x-۱)} = \dfrac{۱}{(۰^-)(۵)} = \dfrac{۱}{۰^-} = -\infty \end{cases} \rightarrow \text{حد ندارد}$$

ب

$$\lim_{x\to ۱} \frac{x-\sqrt{x}}{x^۲+x-۲} = \frac{۰}{۰} \text{ مبهم}$$

برای رفع ابهام، عبارت را در مزدوج صورت، ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\text{پس: } \lim_{x\to ۱} \frac{x-\sqrt{x}}{x^۲+x-۲} \times \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = \lim_{x\to ۱} \frac{x^۲-x}{(x^۲+x-۲)(x+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x\to ۱} \frac{x(x-۱)}{(x+۲)(x-۱)(x+\sqrt{x})} = \lim_{x\to ۱} \frac{x}{(x+۲)(x+\sqrt{x})} = \frac{۱}{(۳)(۲)} = \frac{۱}{۶}$$

۱۲ -

با توجه به شکل داریم:

الف) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = ۲$

ب) $\lim\limits_{x\to (-۱)^-} f(x) = +\infty$

پ) $\lim\limits_{x\to (-۱)^+} f(x) = -\infty$

ت) $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x) = +\infty$

ث) $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x) = +\infty$

ج) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = ۱$

۱۳ -

الف

$$\lim_{x\to -۶} \frac{۹}{(x+۶)^۲} \begin{cases} \lim\limits_{x\to (-۶)^+} \dfrac{۹}{(x+۶)^۲} = \dfrac{۹}{(۰^+)^۲} = \dfrac{۹}{۰^+} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to (-۶)^-} \dfrac{۹}{(x+۶)^۲} = \dfrac{۹}{(۰^-)^۲} = \dfrac{۹}{۰^+} = +\infty \end{cases}$$

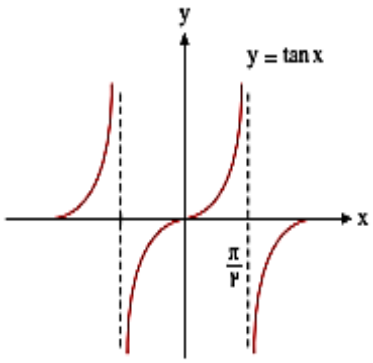
حد تابع در $x = -۶$ برابر $+\infty$ است.

ب

$$\lim_{x\to (-۲)^-} \frac{-۳x}{x^۲-۴} = \frac{-۳(-۲)}{((-۲)^-)^۲ - ۴} = \frac{۶}{۴^+ - ۴} = \frac{۶}{۰^+} = +\infty$$

پ

به شکل توجه نمایید:



$$\Rightarrow \lim_{x \to \frac{\pi^+}{۲}} \tan x = -\infty$$

ت

$$\lim_{x \to ۳^-} \frac{[x] - ۳}{x - ۳} = \frac{[۳^-] - ۳}{۳^- - ۳} = \frac{۲ - ۳}{۰^-} = \frac{-۱}{۰^-} = +\infty$$

- ۱۴

الف

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{۲x^۳ - ۵x + ۴}{۷x^۳ - ۱۱x^۲ - ۶x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{۲x^۳}{۷x^۳} = \frac{۲}{۷}$$

ب

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{۵x + ۴}{x^۳ + x - ۸} = \lim_{x \to -\infty} \frac{۵x}{x^۳} = \lim_{x \to -\infty} \frac{۵}{x^۲} = \frac{۵}{+\infty} = ۰$$

پ

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-۴x^۷ + ۵x^۲}{۲x^۳ + ۹} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-۴x^۷}{۲x^۳} = \lim_{x \to -\infty} -۲x^۴ = -\infty$$