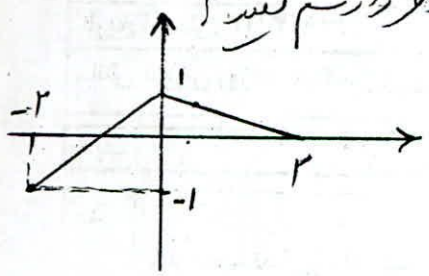
سوالات آزمون درس: ریاضی (۳)
نام و نام خانوادگی:

پایه دوازدهم دوره متوسطه دوم مرز استعدادها دبیرستان حضرت آیت ا... خامنه‌ای
مدت امتحان: ۹۰ دقیقه
تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۱۰/۱۱

سیرجان

۱) اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر باشد نمودار تابع $y=2f(1-\frac{x}{2})-2$ را رسم کنید؟



۲) از دو سوال زیر یک را دلخواه پاسخ دهید؟

الف) اگر $f(x)$ یک تابع اکیداً نزولی باشد و بدانیم $f(x^2-x)>f(2x-2)$ آنگاه محدوده x کدام است؟

ب) نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & ; x\geq 1 \\ -x+6 & ; x<1 \end{cases}$ را رسم کنید. این تابع در کدام بازه‌ها صعودی و در کدام بازه‌ها نزولی می‌باشد؟

۳) اگر $f(x)=\frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x)=\sqrt{x-x^2}$ باشد دامنه‌ی تابع gof را از طریق تعریف بیابید؟

۴) اگر $f(x)=2x-5$ ، $g(x)=x^2-3x+8$ و معادله‌ی $(f\circ g)(x)=7$ را حل کنید؟

---

۵) با محدود کردن دامنه‌ی تعریف تابع $f(x)=x^2-4x+5$ تابعی یک به یک ساخته و سپس وارون آن را بدست آورید؟

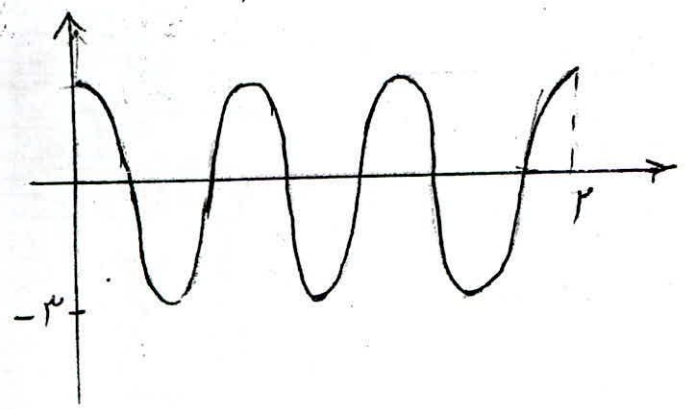
---

۱) از دو سوال زیر یکی را به دلخواه پاسخ دهید؟

الف) اگر $a=\frac{\pi}{12}$ مقدار $\sin a\cos a\cos 2a\cos 4a$ را بدست آورید؟

ب) مقدار $\sin 75^\circ$ را بدست آورید؟

۷) شکل روبرو قسمتی از نمودار تابع $y=a\sin\pi(\frac{x}{2}-bx)$ است حاصل a.b کدام است؟



---

۸) معادله مثلثاتی $\cos x(2\cos x-9)=5$ را حل کنید؟

---

۹) حاصل حدود زیر را بدست آورید؟

الف) $\lim_{x\to(-1)} \frac{x^2-1}{x+\sqrt{2x+3}}$

ب) $\lim_{x\to 3^+} \frac{1-5x}{x^2-9}$

ج) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-\sqrt{x^2-x-1}}{\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{x}}$

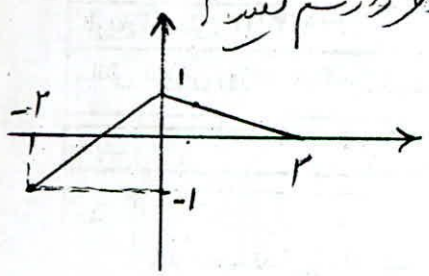
د) $\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \frac{\cos x}{1-\sin x}$

بنام خدا

پاسخ از : فتح اللهی

سوالات امتحان درس: ریاضی (۳) | پایه دوازدهم دوره متوسطه دوم مرکز استعدادهای درخشان حضرت آیت ا... خامنه‌ای
نام و نام خانوادگی: | مدت امتحان: ۹۰ دقیقه | تاریخ امتحان: ۱۴۰۱/۱۰/۱۱
سیرجان

۱) اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر باشد نمودار تابع $y=2f(1-\frac{x}{2})-2$ را رسم کنید؟



پاسخ در صفحه بعدی

۲) از دو سوال زیر یک را به دلخواه پاسخ دهید؟

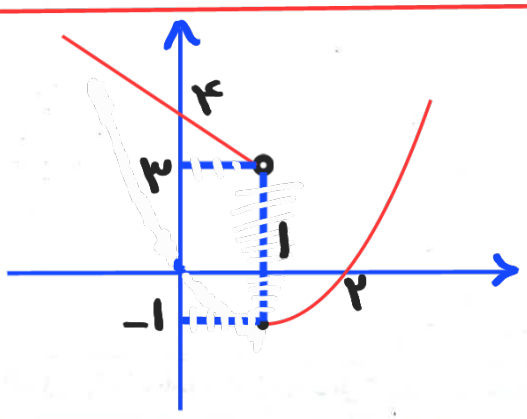
الف) اگر $f(x)$ یک تابع اکیداً نزولی باشد و بدانیم $f(x^2-x)>f(2x-2)$ آنگاه محدوده x کدام است؟

ب) نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & ; x\geq 1 \\ -x+2 & ; x<1 \end{cases}$ را رسم کنید. این تابع در کدام بازه‌ها صعودی و در کدام بازه‌ها نزولی می‌باشد؟

تابع اکیداً نزولی: $x_2>x_1 \leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$

الف $x^2-x<2x-2 \rightarrow x^2-3x+2<0 \rightarrow$ $1<x<2$

ب



۳) اگر $f(x)=\frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x)=\sqrt{x-x^2}$ باشد دامنه‌ی تابع gof را از طریق تعریف بیابید؟

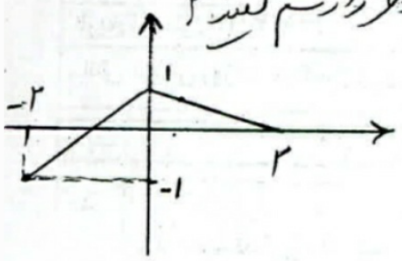
$D_f: \mathbb{R}-\{\pm 1\} \rightarrow D_g: x-x^2\geq 0 \rightarrow 0\leq x\leq 1 \rightarrow D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$

$D_{gof}=\{x\in \underbrace{\mathbb{R}-\{\pm 1\}}_{A} \mid \underbrace{\frac{1+x^2}{1-x^2}}_{B} \in \underbrace{0\leq x\leq 1}_{B}\}=A\cap B$

$0\leq \frac{1+x^2}{1-x^2}\leq 1 \rightarrow \begin{cases} \frac{1+x^2}{1-x^2}\geq 0 \rightarrow 1-x^2>0 \rightarrow -1<x<1 \\ \frac{1+x^2}{1-x^2}\leq 1 \rightarrow x<-1 \cup x>1 \cup \{0\} \end{cases} \rightarrow \cap \rightarrow x=0$

$D_{gof}=A\cap B=\mathbb{R}-\{\pm 1\}\cap\{0\}=\{0\}$

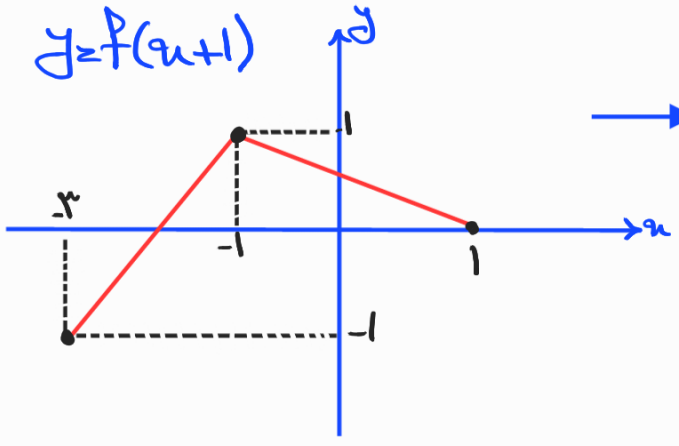
۱) اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر باشد نمودار تابع $y=2f(1-\frac{x}{2})-2$ را رسم کنید؟

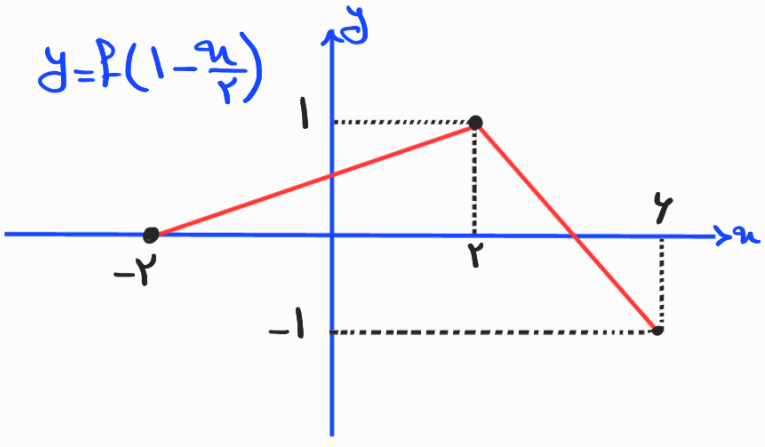


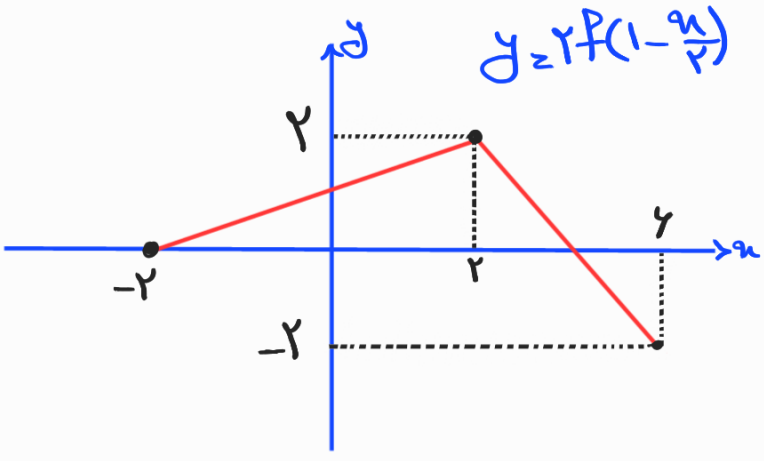
$f(x) \xrightarrow[\text{یک واحد به چپ}]{\text{انتقال افقی}} f(1+x) \xrightarrow[\text{طول‌ها ۲ برابر می‌شه}]{\text{عرض نقاط ثابت}} f(1-\frac{x}{2})$

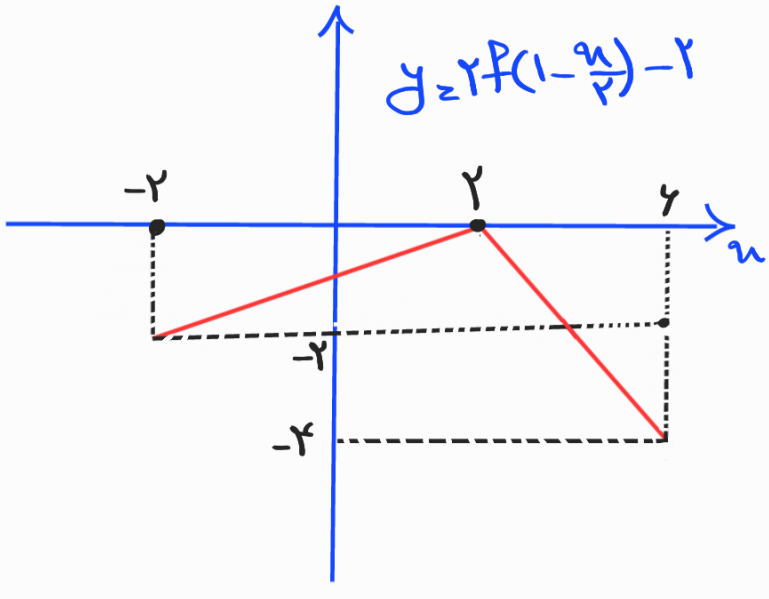
طول نقاط ثابت و عرض‌ها ۲ برابر می‌شه

$2f(1-\frac{x}{2})-2 \xleftarrow[\text{۲ واحد به پایین}]{\text{انتقال عمودی}} 2f(1-\frac{x}{2})$









۴) اگر $f(x)=2x-5$ ، $g(x)=x^2-3x+1$ و معادله $(fog)(x)=7$ را حل کنید؟

$$fog(x)=f(g(x))=f(x^2-3x+1)=2x^2-6x+11=7$$

$$2x^2-6x+4=0 \xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر}} x=1,2$$

---

۵) با محدود کردن دامنه‌ی تعریف تابع $f(x)=x^2-4x+5$ تابعی یک به یک ساخته و سپس وارون آن را بدست آورید؟

$$f(x)=x^2-4x+4+1=(x-2)^2+1$$

تابع $f(x)$ در دامنه $x\geq 2$ یا $x\leq 2$ یک به یک و وارون پذیر است.

$$x\geq 2 \rightarrow x-2\geq 0 \rightarrow (x-2)^2\geq 0 \rightarrow (x-2)^2+1\geq 1 \rightarrow y\geq 1 \rightarrow D_{f^{-1}}: x\geq 1$$

$$y=(x-2)^2+1 \rightarrow y-1=(x-2)^2 \xrightarrow{\sqrt{\ }} |x-2|=\sqrt{y-1} \longrightarrow x-2=\sqrt{y-1}$$

$$x=2+\sqrt{y-1} \xrightarrow[\text{کوچک}]{\text{جابجایی}} \boxed{y=f^{-1}(x)=2+\sqrt{x-1} \quad ; \quad x\geq 1}$$

---

۶) از دو سوال زیر یکی را به دلخواه پاسخ دهید؟

الف) اگر $a=\frac{\pi}{12}$ مقدار $\sin a\cos a\cos 2a\cos 4a$ را بدست آورید؟

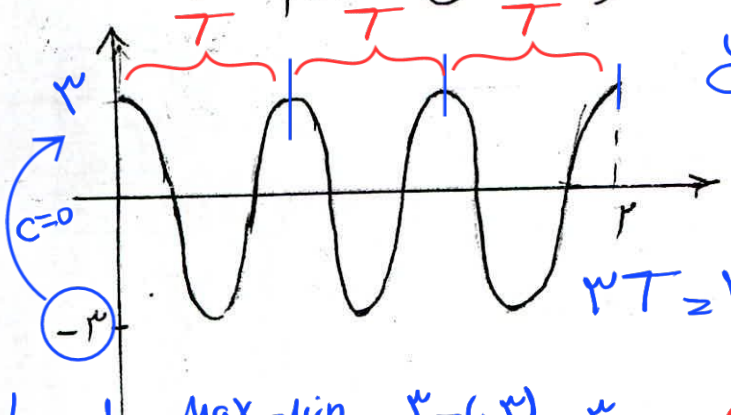
ب) مقدار $\sin 75^\circ$ را بدست آورید؟

$$\frac{1}{2}\times\overbrace{2\sin a\cos a}^{\sin 2a}\cos 2a\cos 4a=\frac{1}{2}\overbrace{\sin 2a\cos 2a}^{\frac{1}{2}\sin 4a}\cos 4a=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\overbrace{\sin 4a\cos 4a}^{\frac{1}{2}\sin 8a}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin 8a=\frac{\sin 8a}{8}=\frac{1}{8}\sin\frac{8\pi}{12}=\frac{1}{8}\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{8}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{16}$$

ب) $\sin^2 75^\circ=\frac{1-\cos 150^\circ}{2}=\frac{1+\cos 30^\circ}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{4} \longrightarrow \sin 75^\circ=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

۷) شکل روبرو قسمتی از نمودار تابع $y=a\sin\pi(\frac{۳}{۲}-bx)$ است حاصل a.b کدام است؟



$y=a\sin(\frac{۳\pi}{۲}-\pi bx)=-a\cos(-\pi bx)$

$y=-a\cos(\pi bx)$

$۳T=۲ \rightarrow T=\frac{۲}{۳}=\frac{۲\pi}{|b\pi|} \rightarrow |b|=۳ \rightarrow b=\pm۳$ (هردو قابل قبول)

$|-a|=\frac{max-min}{۲}=\frac{۳-(-۳)}{۲}=۳ \rightarrow -a=\pm۳ \xrightarrow[\text{قله رو}]{\text{کمر ی}} -a=۳ \rightarrow a=-۳$

$ab=(-۳)(\pm۳)=\pm۹$

---

۸) معادله مثلثاتی $\cos x(۲\cos x-۹)=۵$ را حل کنید؟

$\cos x(۲\cos x-۹)=۵ \rightarrow ۲\cos^۲x-۹\cos x-۵=۰ \rightarrow \Delta=۸۱+۴۰=۱۲۱$

$\cos x=\frac{۹\pm۱۱}{۴} \rightarrow \begin{cases} \cos x=۵ \times \\ \cos x=-\frac{۱}{۲}=\cos\alpha(\frac{۲\pi}{۳}) \rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳} \end{cases}$

---

۹) حاصل حدود زیر را بدست آورید؟

الف) $\lim_{x\to(-۱)}\frac{x^۲-۱}{x+\sqrt{۲x+۳}}$

ب) $\lim_{x\to۳^+}\frac{۱-۵x}{x^۲-۹}=\frac{۱-۱۵}{۹^+-۹}=\frac{-۱۴}{۰^+}=-\infty$

ج) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x-\sqrt{x^۲-x-۱}}{\sqrt{۴x^۲+۱}-\sqrt{x}}$

د) $\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^-}\frac{\cos x}{۱-\sin x}=\frac{۰}{۰}$ مبهم

$=\lim\frac{\cos^۲\frac{x}{۲}-\sin^۲\frac{x}{۲}}{(\cos\frac{x}{۲}-\sin\frac{x}{۲})^۲}=\lim\frac{(\cos\frac{x}{۲}-\sin\frac{x}{۲})(\cos\frac{x}{۲}+\sin\frac{x}{۲})}{(\cos\frac{x}{۲}-\sin\frac{x}{۲})^۲}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}\frac{(\cos\frac{x}{۲}+\sin\frac{x}{۲})}{(\cos\frac{x}{۲}-\sin\frac{x}{۲})}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}^+-\frac{\sqrt{۲}}{۲}^-}=\frac{\sqrt{۲}}{۰^+}=+\infty$

الف) $\lim_{x\to(-1)} \frac{x^2-1}{x+\sqrt{2x+3}} = \frac{0}{0}$ مبهم $\xrightarrow{\text{تزویج}} \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2x+3})}{(x+\sqrt{2x+3})(x-\sqrt{2x+3})}$

$= \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2x+3})}{x^2-2x-3=(x-3)(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)(x-\sqrt{2x+3})}{x-3}$

$= \frac{(-1-1)(-1-1)}{-1-3} = \frac{4}{-4} = -1$

ج) $\lim_{x\to \pm\infty} \frac{2x-\sqrt{x^2-x-1}}{\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{x}} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{2x-|x|}{|2x|}$

$$\begin{cases} \lim_{x\to +\infty} \frac{2x-|x|}{|2x|} = \frac{2x-x}{2x} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x\to -\infty} \frac{2x-|x|}{|2x|} = \frac{2x+x}{-2x} = \frac{3x}{-2x} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

حد ندارد