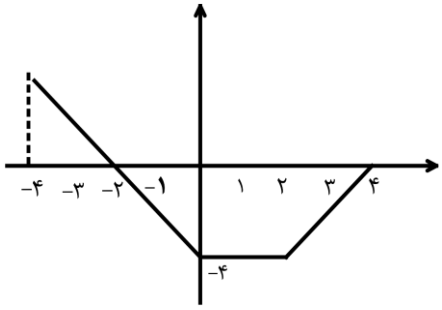
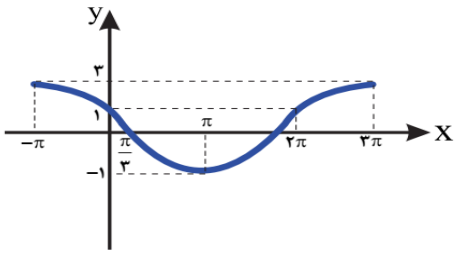
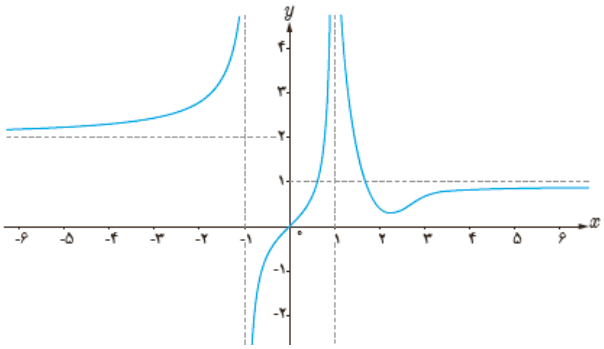
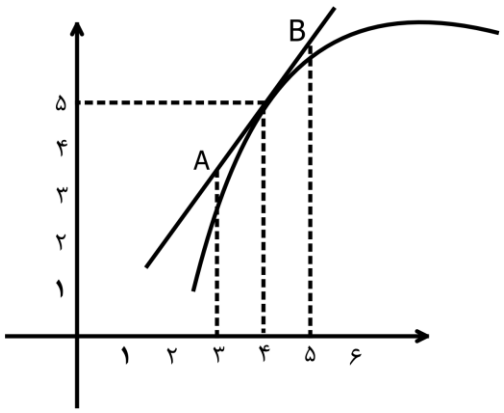
نام و نام خانوادگی: شماره آمار: پایه و رشته: دوازدهم تجربی امتحانات نوبت : اول	بسمه تعالی **اداره آموزش و پرورش ناحیه ۳ قم** **دبیرستان فرزانگان ۲** (مهر آموزشگاه)	آزمون درس: **ریاضی** تاریخ آزمون : ۴۰۱/۱۰/ زمان پاسخگویی : ۱۲۰ دقیقه طراح سوال : خانم فرائی

وزارت آموزش و پرورش
سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان
دبیرستان فرزانگان۲

نمره به عدد : نمره به حروف : امضای دبیر :

ردیف	شرح سوالات	بارم
۱	**درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.** **الف- تابع** $y=\|2x+3\|$ **در** $\mathbb{R}$ **نه صعودی است و نه نزولی.** **ب- تابع تانژانت در بازه** $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$**نزولی است.** **ج- اگر** $\frac{3\pi}{2}<\propto<2\pi$ **، آن گاه** $sin\propto<tan\propto$	۰/۷۵
۲	**نمودارتابع** $y=\begin{cases}\sqrt{x+2} & x>2\\ x^3 & -1\le x\le 1\\ -x+1 & x\le -3\end{cases}$ **را رسم کنید و مشخص کنید درچه بازه هایی صعودی یا نزولی است.**	۱
۳	**با استفاده از نمودار** $f(x)$**،** **نمودار تابع** $y=-\frac{1}{2}f(2x)-1$ **را رسم کنید.** 	۱
٤	**اگر** $f(x)=\sqrt{x-3}$ **و** $g(x)=\frac{2x-3}{x+2}$ **، دامنه و ضابطه تابع** fog **را به دست آورید.**	۱/۲۵
٥	**اگر** $f=\{(1,4),(2,3),(5,1)\}$ **و** $g(x)=2\|x\|+1$ **و** $f^{-1}(g(a))=2$**، مقدار** a **را بیابید.**	۱
٦	**وارون پذیری تابع** $f(x)=x^2-4x+3$ **را بررسی کنید و در صورت وارونپذیر نبودن آن را به یک تابع وارون پذیر تبدیل کنید، سپس وارون آن را در صورت وجود بیابید.(رسم نمودار را برای هر دو تابع انجام دهید)**	۲

۷	نمودار تابع $f(x) = 1 - a\sin(bx)$ به صورت زیر است ، a و b را به دست آورید.  	۱
۸	نسبت های مثلثاتی سینوس زاویهٔ 15° و کسینوس زاویه $۲۲/۵^\circ$ درجه را به دست آورید.	۱/۲۵
۹	معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید. الف) $sin5x = \sin(2x+1)$ ب) $cos2x + \sin x = 0$	۱/۵
۱۰	اگر $\lim_{x\to+\infty} \frac{ax^4+5x^2+1}{3x^n-x^3+4} = -2$ باشد، $a+n$ را پیدا کنید.	۰/۷۵
۱۱	حاصل حد های زیر را محاسبه کنید. $\lim_{x\to 1^{-1}} \frac{[x]-1}{x^2-1} =$ $\lim_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}} =$ $\lim_{x\to-\infty} \frac{5x-\sqrt{9x^2+7}}{x+\sqrt{4x^2+5}} =$ $lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{-1}{cosx}$	۳/۲۵

۱۲	نمودار تابع f به شکل زیر است.حدود خواسته شده را بنویسید.  $\lim_{x\to(-1)^-} f(x)$ $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ $\lim_{x\to(-1)^+} f(x)$	۱
۱۳	اگر $f(x)=x^2+4$ باشد الف) $f'(1)$ به کمک تعریف مشتق را محاسبه کنید. ب) معادله خط مماس بر منحنی در نقطه ای به طول یک واقع بر آن را بنویسید.	۲
۱٤	برای تابع F درشکل زیرداریم $f(4)=5$ و $f'(4)=2$ باتوجه به شکل مختصات A و B راتعیین کنید.  	۱
۱۵	ز اگر $f(x)=\sqrt[3]{5x+1}$ باشد، مشتق تابع را به کمک تعریف مشتق بدست آورید	۱/۲۵
	موفق باشید	

پاسخ از :

نرمین فتح اللهی

بسمه تعالی

اداره آموزش و پرورش ناحیه ۳ قم

دبیرستان فرزانگان ۲

(مهر آموزشگاه)

---

۱ درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.

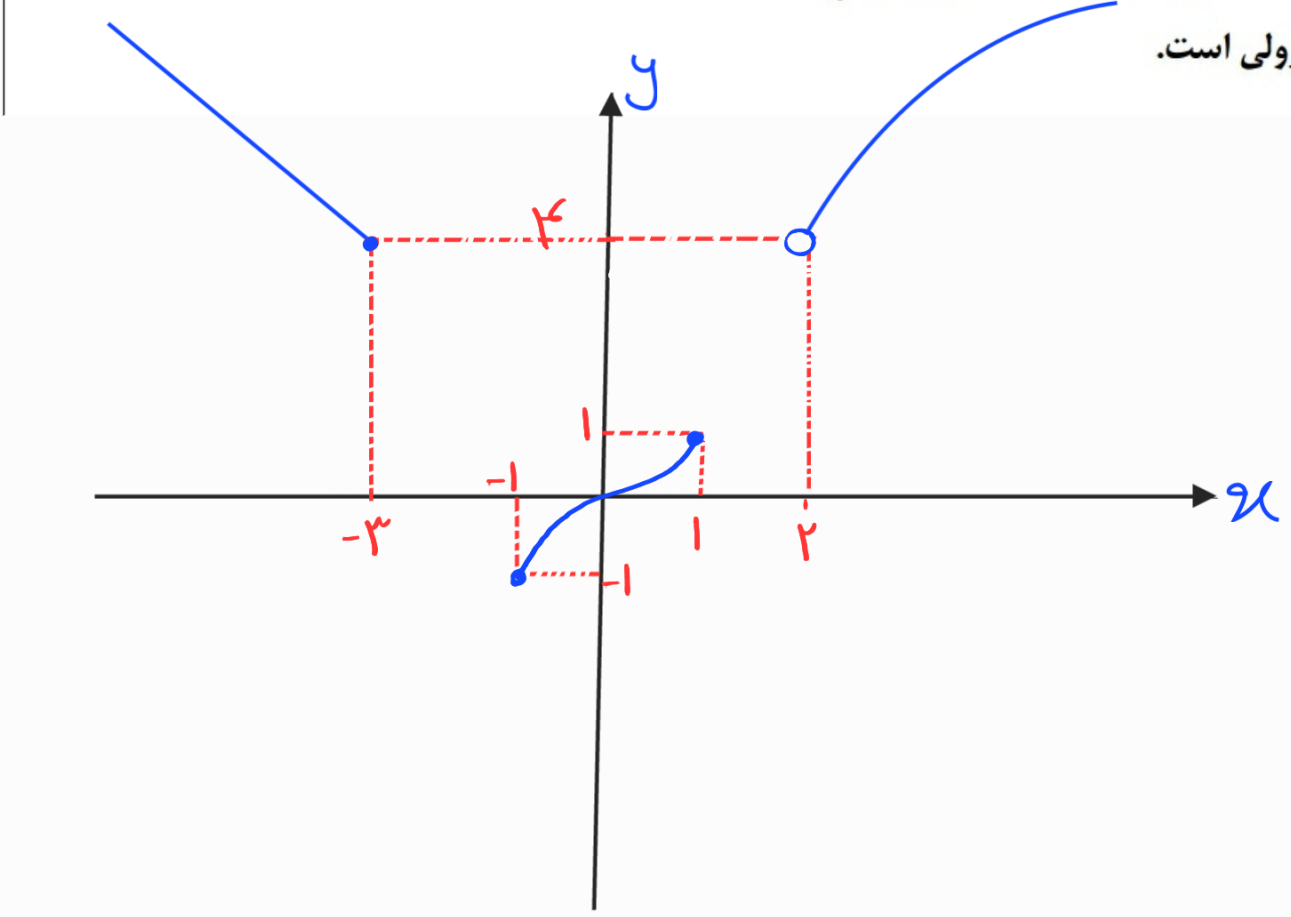
الف- تابع $y = |2x + 3|$ در $\mathbb{R}$ نه صعودی است و نه نزولی. ✓ ص

ب- تابع تانژانت در بازه $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ نزولی است. ✗ غ

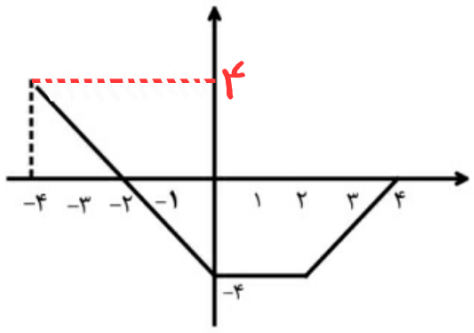
ج- اگر $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ ، آن گاه $\sin \alpha < \tan \alpha$ ✗ غ

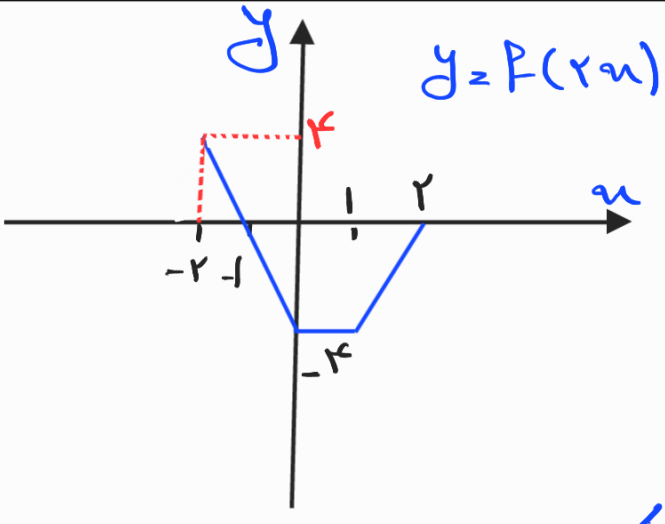
---

۲ نمودار تابع $y = \begin{cases} \sqrt{x+2} & x > 2 \\ x^3 & -1 \le x \le 1 \\ -x+1 & x \le -3 \end{cases}$ را رسم کنید و مشخص کنید درچه بازه هایی صعودی یا نزولی است.

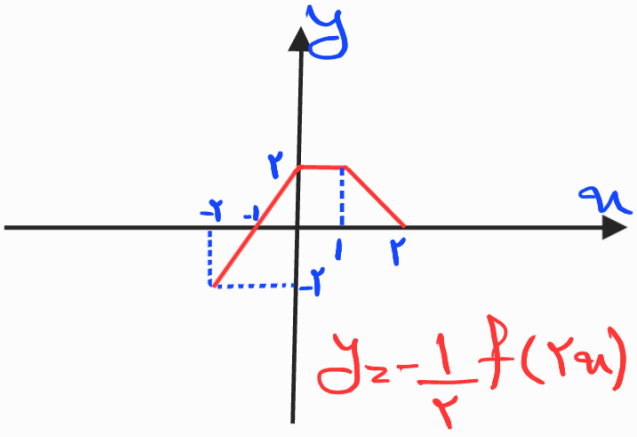


۳	با استفاده از نمودار $f(x)$، نمودار تابع $y=-\frac{1}{2}f(2x)-1$ را رسم کنید.

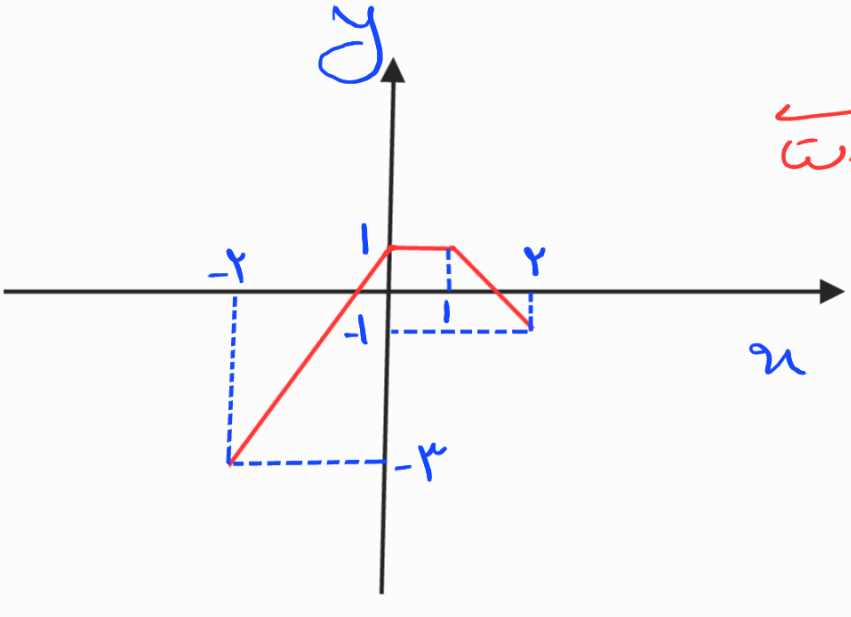




☆ با تبدیل $x \to 2x$ طول نقاط نصف می‌شود اما عرض نقاط ثابت می‌ماند.



☆ با ضرب تابع f در عدد $-\frac{1}{2}$ در دامنه تابت عرض نقاط نصف و فاصله نقاط به محور xها عوض می‌شود.



$y=-\frac{1}{2}f(2x)-1$

☆ اگر نمودار قبلی را یک واحد در راستای قائم به پایین منتقل کنیم نمودار تابع $y=-\frac{1}{2}f(2x)-1$ حاصل می‌شود.

اگر $f(x)=\sqrt{x-3}$ و $g(x)=\frac{2x-3}{x+2}$، دامنه و ضابطه تابع fog را به دست آورید.	٤

$$D_f: x-3\geq 0 \rightarrow x\geq 3$$

$$D_g: R-\{-2\}$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{\frac{2x-3}{x+2}-3}$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

$$D_{fog}=\left\{x\in R-\{-2\} \;\middle|\; \frac{2x-3}{x+2}\in x\geq 3\right\}$$

(حاوی x خوارزمی دهم)

$$\frac{2x-3}{x+2}\geq 3 \rightarrow \frac{2x-3-3x-6}{x+2}=\frac{-x-9}{x+2}\geq 0$$

$$\rightarrow -9<x<-2$$

$$D_{fog}=R-\{-2\}\cap[-9,-2)=[-9,-2)$$

اگر $f=\{(1,4),(2,3),(5,1)\}$ و $g(x)=2\|x\|+1$ و $f^{-1}(g(a))=2$، مقدار a را بیابید.	۵

$f^{-1}(g(a))=2 \rightarrow f(2)=g(a)=3=2|a|+1$

$\rightarrow |a|=1 \rightarrow a=\pm 1$

وارون پذیری تابع $f(x)=x^2-4x+3$ را بررسی کنید و در صورت وارونپذیر نبودن آن را به یک تابع وارون پذیر تبدیل کنید، سپس وارون آن را در صورت وجود بیابید.(رسم نمودار را برای هر دو تابع انجام دهید)	۶

اگر $f(x_1)=f(x_2) \rightarrow x_1=x_2 \rightarrow$ یک به یک و وارون پذیر است.

بررسی:

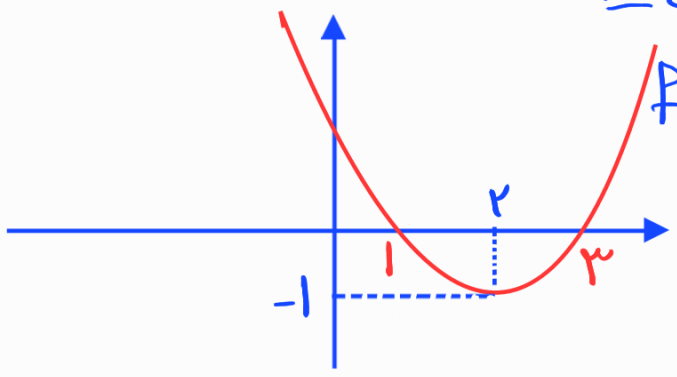
$x_1^2-4x_1+3=x_2^2-4x_2+3$

$x_1^2-4x_1=x_2^2-4x_2 \xrightarrow{\text{مربع کامل}} (x_1-2)^2=(x_2-2)^2$

$\xrightarrow{\sqrt{\ }} |x_1-2|=|x_2-2| \rightarrow x_1-2=\pm(x_2-2)$

$\rightarrow x_1=\pm x_2 \rightarrow$ یک به یک و درنتیجه وارون پذیر

نیست.

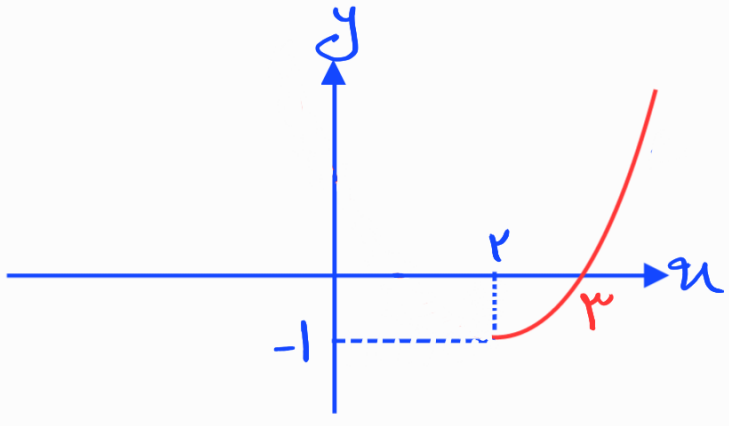


$f(x)=x^2-4x+3$

رأس سهمی $(2,-1)$

تابع درجه دوم در بازه‌ی قبل یا سهمی و یا نیم سهمی یک به یک و وارون پذیر است. بنابراین در بازه‌ی $[2,+\infty)$ وارون این تابع را به دست می‌آوریم.

$$y = x^2 - 4x + 3 \quad ; \quad x \geq 2$$



مربع کامل می‌کنیم.

$$y = x^2 - 4x + 4 - 4 + 3 \rightarrow y = (x-2)^2 - 1$$

$$\rightarrow y+1 = (x-2)^2 \xrightarrow{\sqrt{\ }} |x-2| = \sqrt{y+1} \xrightarrow[|x-2| = x-2]{x \geq 2}$$

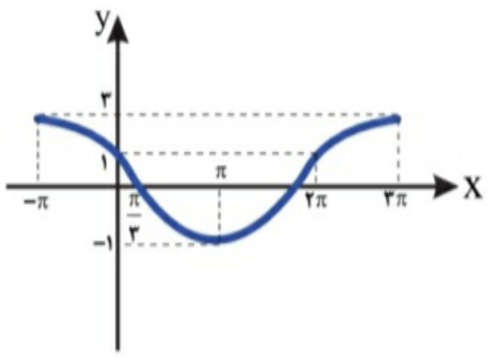
$$x - 2 = \sqrt{y+1} \rightarrow x = 2 + \sqrt{y+1}$$

جای x و y را عوض می‌کنیم.

$$y = f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+1}$$

۷

نمودار تابع $f(x) = 1 - a\sin(bx)$ به صورت زیر است، a و b را به دست آورید.



$Max = ۳$

$Min = -۱$

$T = ۴\pi$

$$|-a| = \frac{Max - Min}{۲} = \frac{۳-(-۱)}{۲} = ۲ \rightarrow a = \pm ۲$$

$$T = ۴\pi = \frac{۲\pi}{|b|} \rightarrow |b| = \frac{۱}{۲} \rightarrow b = \pm \frac{۱}{۲}$$

عوضش در حل عوض شدن نزدیک است بنابراین:

$$(-a)(b) < ۰ \rightarrow ab > ۰ \rightarrow \begin{cases} a = ۲ \text{ , } b = \frac{۱}{۲} & \checkmark \\ a = -۲, b = -\frac{۱}{۲} & \checkmark \end{cases}$$

$a = ۲, b = \frac{۱}{۲} \rightarrow y = ۱ - ۲\sin\frac{x}{۲}$ ✓

$a = -۲, b = -\frac{۱}{۲} \rightarrow y = ۱ + ۲\sin(-\frac{x}{۲}) = ۱ - ۲\sin\frac{x}{۲}$ ✓

۸	نسبت های مثلثاتی سینوس زاویهٔ 15° و کسینوس زاویه $22/5^\circ$ درجه را به دست آورید.

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \longrightarrow \sin^2 15^\circ = \frac{1-\cos 30^\circ}{2}$$

$$\sin^2 15^\circ = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \xrightarrow[\text{ربع اول}]{\sqrt{\ }} \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \longrightarrow \cos^2 22{,}5^\circ = \frac{1+\cos 45^\circ}{2}$$

$$\cos^2 22{,}5^\circ = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \xrightarrow[\text{ربع اول}]{\sqrt{\ }} \cos 22{,}5^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید. الف) $\sin 5x = \sin(2x+1)$ ب) $\cos 2x + \sin x = 0$	۹

الف) $\sin \overbrace{5x}^{\alpha} = \sin(2x+1)$

$$\begin{cases} 5x = 2K\pi + 2x + 1 \longrightarrow x = \dfrac{2K\pi + 1}{3} \\ 5x = 2K\pi + \pi - 2x - 1 \longrightarrow x = \dfrac{(2K+1)\pi - 1}{7} \end{cases}$$

ب) $\cos 2x + \sin x = 0$

روش اول:

$$1 - 2\sin^2 x + \sin x = 0 \longrightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

جمع ضرایب صفر

$$\begin{cases} \sin x = 1 \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = \frac{-1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

روش دوم:

$$\cos 2x = -\sin x = \cos\left(\underbrace{\frac{\pi}{2}}_{\alpha} + x\right)$$

$$2x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} + x\right) \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

اگر $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ax^4+5x^2+1}{3x^n-x^3+4} = -2$ باشد، $a+n$ را پیدا کنید.	۱۰

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ax^4}{3x^n} = -2 \longrightarrow n = 4$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ax^4}{3x^4} = \frac{a}{3} = -2 \longrightarrow a = -6$$

$$a + n = -6 + 4 = -2$$

حاصل حد های زیر را محاسبه کنید.

۱۱

$1^{-1}=1$

$$\lim_{x\to 1^{-1}} \frac{[x]-1}{x^2-1} =$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{[x]-1}{x^2-1} = \begin{cases} \lim_{x\to 1^+} \frac{[x]-1}{x^2-1} = \frac{[1^+]-1}{x^2-1} = \frac{1-1}{x^2-1} = 0 \text{ مطلق} \\ \lim_{x\to 1^-} \frac{[x]-1}{x^2-1} = \frac{[1^-]-1}{x^2-1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \end{cases}$$

حد چپ و راست برابر نیست، پس حد وجود ندارد.

$$\lim_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}} = \frac{0}{0}$$ مبهم

روش اول:

$$\lim_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}} \times \frac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} \times \frac{3+\sqrt{2x+1}}{3+\sqrt{2x+1}}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{(4-x)(3+\sqrt{2x+1})}{2(4-x)(2+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 4} \frac{3+\sqrt{2x+1}}{4+2\sqrt{x}} = \frac{3}{4}$$

روش دوم: مناسب با کنکور!! Hop

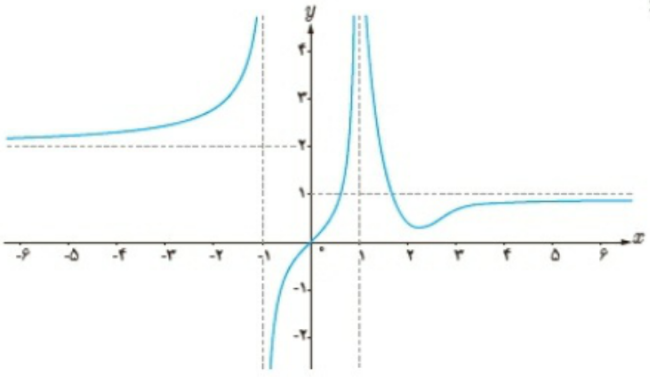
$$= \lim_{x\to 4} \frac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{\frac{-2}{2\sqrt{2x+1}}} = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x+1}}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-\sqrt{9x^2+7}}{x+\sqrt{4x^2+5}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-|2x|}{x+|2x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x-2x}{x-2x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x}=-2$$

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\frac{-1}{\cos x}=\frac{-1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}^+\right)}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

نمودار تابع f به شکل زیر است.حدود خواسته شده را بنویسید.



$$+\infty=\lim_{x\to(-1)^-}f(x)$$

$$1=\lim_{x\to+\infty}f(x)$$

$$2=\lim_{x\to-\infty}f(x)$$

$$-\infty=\lim_{x\to(-1)^+}f(x)$$

۱۲

$f(1) = 1+4 = 5$

۱۳ اگر $f(x) = x^2 + 4$ باشد

الف) $f'(1)$ به کمک تعریف مشتق را محاسبه کنید.

ب) معادله خط مماس بر منحنی در نقطه ای به طول یک واقع بر آن را بنویسید.

الف) $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2+4-5}{x-1} =$

$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{0}{0}$ مبهم

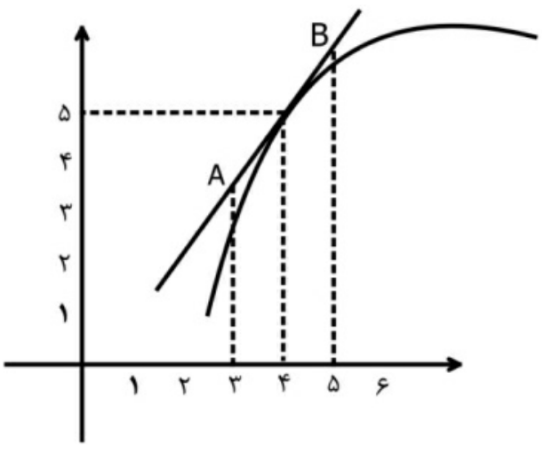
$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x+1) = 1+1 = 2$

ب)

$(1,5)$ شیب خط مماس در نقطه $= f'(1) = 2$

$y - 5 = 2(x-1) \longrightarrow y = 2x + 3$

١٤ برای تابع F درشکل زیرداریم $f(4)=5$ و $f'(4)=2$ باتوجه به شکل مختصات A و B راتعیین کنید.



$y-5=f'(4)(x-4)$

$y-5=2(x-4)$

$y=2x-3$

$x_B=5 \longrightarrow y_B=2(5)-3=7$

$x_A=3 \longrightarrow y_A=2(3)-3=3$

۱۵ اگر $f(x)=\sqrt[3]{5x+1}$ باشد، مشتق تابع را به کمک تعریف مشتق بدست آورید

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{5(x+h)+1}-\sqrt[3]{5x+1}}{h}=\frac{0}{0}$$ حالت

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{5(x+h)+1}-\sqrt[3]{5x+1}\right)\left(\sqrt[3]{(5(x+h)+1)^2}+\sqrt[3]{(5(x+h)+1)(5x+1)}+\sqrt[3]{(5x+1)^2}\right)}{h\left(\sqrt[3]{(5(x+h)+1)^2}+\sqrt[3]{(5(x+h)+1)(5x+1)}+\sqrt[3]{(5x+1)^2}\right)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{5(x+h)+1-(5x+1)=5h}{h\left(\sqrt[3]{(5(x+h)+1)^2}+\sqrt[3]{(5(x+h)+1)(5x+1)}+\sqrt[3]{(5x+1)^2}\right)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{5}{\left(\sqrt[3]{(5(x+h)+1)^2}+\sqrt[3]{(5(x+h)+1)(5x+1)}+\sqrt[3]{(5x+1)^2}\right)}$$

$$=\frac{5}{\sqrt[3]{(5x+1)^2}+\sqrt[3]{(5x+1)^2}+\sqrt[3]{(5x+1)^2}}$$

$$=\frac{5}{3\sqrt[3]{(5x+1)^2}}$$