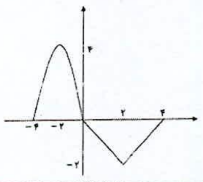
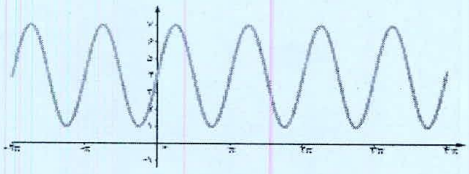
اداره آموزش و پرورش رفسنجان	بـاسـمـه تـعـالـی		دبیرستان نمونه دولتی علی ابن ابیطالب
نام و نام خانوادگی:	امتحان نوبت اول(دیماه ۱۴۰۱)	تاریخ:	ساعت :
آزمون درس : ریاضی۳	شماره کلاس :	شماره صندلی :	پایه : دوازدهم	مدت آزمون ۱۱۰ دقیقه

	سؤالات	بارم
۱	درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید: الف)تابع $y=-x^3-x$ تابعی نزولی است. ب)اگر برای هر دو نقطه x_1, x_2 از دامنه تابع f که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) < f(x_2)$ آنگاه تابع f اکیداً صعودی است. ج)اگر $k>0$ نمودار $y=f(kx)$ با انبساط و انقباض نمودار $y=f(x)$ در امتداد محور x ها بدست می آید. د) $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$	۱
۲	جاهای خالی را با عبارتی مناسب پر کنید. الف)باقیمانده تقسیم چند جمله ای $f(x)=2x^3+5x^2-3x-10$ بر $x+2$ برابر ..... است. ب)مجموعه $(-\frac{5}{2},4)-\{1\}$ یک همسایگی محذوف ..... است. ج)حاصل $\lim_{x\to-\infty}(2x^3-4x^5-5x-9)$ برابر ..... است. د)ترکیب دو تابع $f(x)=5x-1$,$g(x)=\frac{x+1}{5}$ تابعی ..... است.	۱
۳	نمودار تابع زیر را رسم کنید و بازه هایی که در آنها تابع صعودی ،نزولی یا ثابت است را مشخص کنید. $f(x)=\begin{cases}-2x-3 & x<-4\\ x^2-3 & -4\le x<2\\ 3 & x\ge 2\end{cases}$	۱/۵
۴	اگر $f(x)=\sqrt{3-x}$,$g(x)=2x^2-1$ دامنه و ضابطه تابع fog را بیابید. (دامنه از راه تعریف)	۱/۵
۵	با توجه به نمودار f نمودار توابع $y=f(2x)$, $y=1-f(x)$ را رسم کنید. 	۱

۶	ضابطه تابع وارون تابع $f(x)=۲-\sqrt{x-۳}$ را بیابید.دامنه و برد تابع f و تابع $f^{-۱}$ را بنویسید.نمودار f و $f^{-۱}$ را روی یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.	۱/۵
۷	اگر $f(x)=x^{۳}+۳x$ و بدانیم تابع f یک به یک است.حاصل $f^{-۱}(۰)+f^{-۱}(۴)$ را بیابید.	۰/۵
۸	اگر نمودار زیر،نمودار تابع $y=a\sin bx+c$ باشد.مقادیر a, b, c را بیابید. 	۱/۵
۹	مقدار $\cos\frac{\pi}{۱۲}$ را بدست آورید.	۱/۵
۱۰	معادله مثلثاتی $\cos x(۲\cos x-۹)=۵$ را حل کنید.	۱,۵
۱۱	حدود زیر را محاسبه کنید. ۱) $\lim_{x\to۵}\frac{۲-\sqrt{x-۱}}{x-۵}$ ۲) $\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{[-x]-۳}{\lvert ۲x-۱\rvert}$ ۳) $\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x-\sqrt{۴x^{۲}+۱}}{۲x+\sqrt{۹x^{۲}+۸}}$ ۴) $\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^{۲}\sqrt{x}+۳)^{۲}}{(x^{۲}-۱)(۳x-۲)(۲x^{۲}-۳)}$	۴
۱۲	حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^{+}}\frac{۵}{۳+۲^{\tan x}}$ را بیابید.	۱
۱۳	اگر f یک تابع مشتق پذیر باشد و $\lim_{x\to-۱}\frac{f(-۱+h)+۳}{h}=۲$ حاصل $\lim_{x\to-۱}\frac{f^{۲}(x)-f^{۲}(-۱)}{x^{۲}-۱}$ بیابید(بدون استفاده ازروش هوپیتال)	۱
۱۴	اگر $f(x)=\sqrt[۳]{۳x+۲}$ باشد . الف) $f'(۲)$ را به کمک تعریف مشتق بدست آورید . ب) معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه ای به طول ۲ واقع بر آن بنویسید .	۱,۵

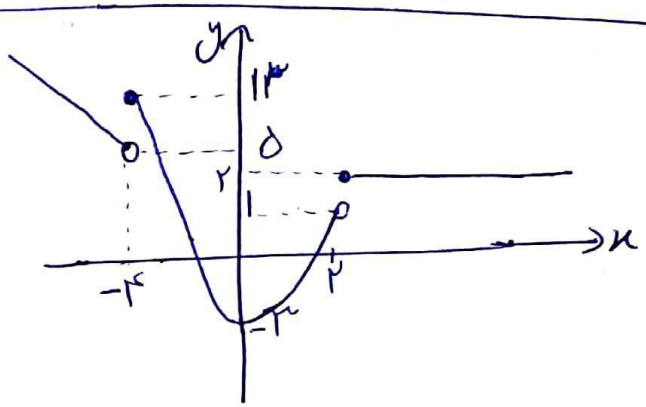
پاسخ تشریحی ریاضی ۳ (تجربی) - نمونه - رفسنجان احسان غنی زاده

سؤال ۱) الف) درست ب) درست ج) درست د) نادرست

سؤال ۲) الف) صفر ب) یک ج) $+\infty$ د) همانی

سؤال ۳)

$$f(x)=\begin{cases} -2x-3 & x<-2 \\ x^2-3 & -2\le x<2 \\ 3 & x\ge 2 \end{cases}$$



در بازه‌ی $(-\infty, 0]$، نمودار رنزولی است، در بازه‌ی صفر تا مثبت بی نهایت صعودی و در بازه‌ی $[2,+\infty)$ نمودار ثابت است.

سؤال ۴)

$$f(x)=\sqrt{3-x},\quad g(x)=2x^2-1 \rightarrow \begin{cases} D_f=x\le 3 \\ D_g=\mathbb{R} \end{cases}$$

$$D_{fog}=\{x \mid x\in D_g,\ g(x)\in D_f\}$$

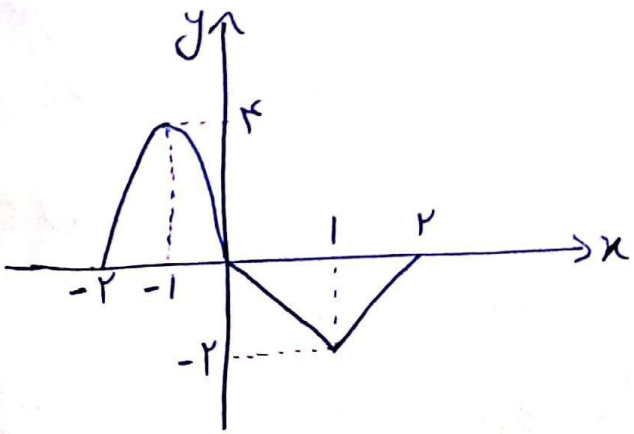
$$\Rightarrow D_{fog}=\{x \mid \underbrace{x\in\mathbb{R}}_{①},\ \underbrace{2x^2-1\le 3}_{②}\} \rightarrow ② = 2x^2\le 4 \rightarrow x^2\le 2$$

$$② = -\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$$

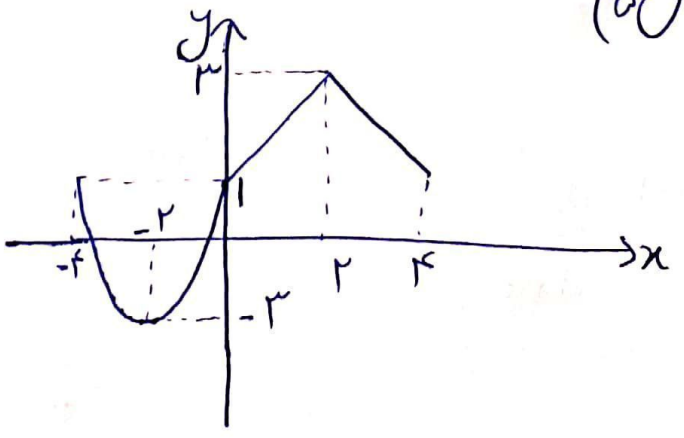
$$\Rightarrow ① \cap ② = [-\sqrt{2},\sqrt{2}]$$

$$y=(fog)(x)=f(g(x))=f(2x^2-1)=\sqrt{3-(2x^2-1)}=\sqrt{-2x^2+4}$$

سؤال ۵)



$y=f(2x)$



$y=-f(x)+1$

Scanned with CamScanner

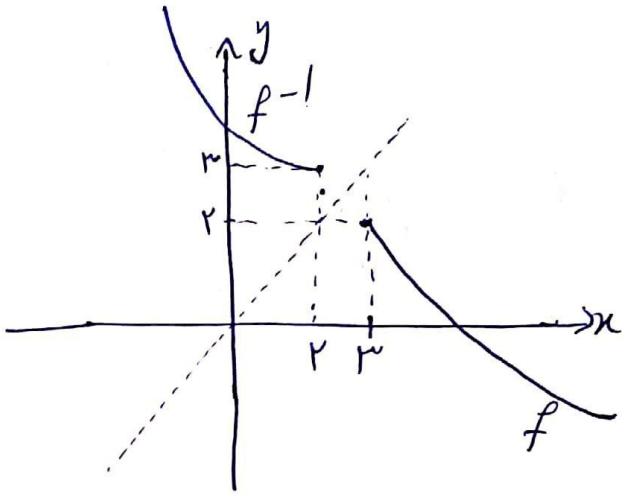
سوال ۶)

$f(x)=2-\sqrt{x-3} \longrightarrow y-2=-\sqrt{x-3} \longrightarrow 2-y=\sqrt{x-3}$ (به توان ۲ می‌رسانیم)

$(2-y)^2=x-3 \longrightarrow x=(2-y)^2+3 \Rightarrow f^{-1}(x)=(2-x)^2+3$

$D_f: x\geq 3 \longrightarrow D_{f^{-1}}=R_f: x\leq 2$

$R_f=(-\infty, 2] \qquad R_{f^{-1}}=D_f: x\geq 3$



سوال ۷)

$f(x)=x^3+2x \qquad f^{-1}(2)=a \longrightarrow f(a)=2$

$a^3+2a=2 \longrightarrow a^3+2a-2=0 \longrightarrow (a-1)(a^2+a+2)=0 \Rightarrow a=1$

a^2+a+2: $\Delta<0$ $\Rightarrow \boxed{f^{-1}(2)=1}$

$f^{-1}(0)=b \Rightarrow f(b)=0 \Rightarrow b^3+2b=0 \longrightarrow b(b^2+2)=0 \Rightarrow \boxed{b=0} \Rightarrow f^{-1}(0)=0$

$\Rightarrow f^{-1}(2)+f^{-1}(0)=0+1=1$

سوال ۱)

$\begin{cases} \min=1 \longrightarrow -|a|+c=1 \xrightarrow{c=4} -|a|+4=1 \\ \max=7 \longrightarrow |a|+c=7 \end{cases} \Rightarrow -|a|=-3 \Rightarrow |a|=3 \Rightarrow a=\pm 3$

$2c=8 \Rightarrow \boxed{c=4}$ (⊕)

دوره‌ی تناوب $=T=\frac{2\pi}{|b|}=\pi \Rightarrow \boxed{|b|=2}$

$y=3\sin 2x+4$

با توجه به نمودار علامت‌های a و b را پیدا کنید یا شرط‌ها را بنویسید.

سوال ۹)

$\cos\frac{\pi}{12}=\cos 15^\circ$

$\Rightarrow 1+\cos 2\times 15^\circ=2\cos^2 15^\circ \Rightarrow 1+\cos 30^\circ=2\cos^2 15^\circ \Rightarrow 1+\frac{\sqrt{3}}{2}=2\cos^2 15^\circ$

$\Rightarrow \frac{2+\sqrt{3}}{2}=2\cos^2 15^\circ \Rightarrow \cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{2+\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

Scanned with CamScanner

سوال ۱۰)

$\cos x(2\cos x - 3) = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x - 5 = 0 \xrightarrow{\cos x = t}$

$2t^2 - 3t - 5 = 0 \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4(2)(-5) = 9 + 40 = 121$

$\Rightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{121}}{4}$ → $t = \frac{3+11}{4} = \frac{14}{4} = 3.5$ غ ق ق

→ $t = \frac{3-11}{4} = \frac{-8}{4} = -2$ ق ق

$\Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}}$

سوال ۱۱)

۱) $\lim_{x \to 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5} = \frac{0}{0}$ ابهام $\xrightarrow{\text{ضرب}} \lim_{x \to 5} \frac{2 - \sqrt{x-1}}{x-5} \times \frac{2 + \sqrt{x-1}}{2 + \sqrt{x-1}}$

$= \lim_{x \to 5} \frac{4 - (x-1)}{(x-5)(2 + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \to 5} \frac{-(x-5)}{(x-5)(2 + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \to 5} \frac{-1}{2 + \sqrt{x-1}} = \frac{-1}{4}$

۲) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{[-x] - 3}{|2x-1|} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$

۳) $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x - \sqrt{4x^2+1}}{2x + \sqrt{9x^2+8}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x - 2|x|}{2x + 3|x|} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x + 2x}{2x - 3x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{5x}{-x} = -5$

۴) $\lim_{x \to +\infty} \frac{(x^2\sqrt{x} + 2)^2}{(x^2-1)(3x-2)(2x^2-3)}$ جبر حدین → صورت و مخرج $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^5}{6x^5} = \frac{1}{6}$

سوال ۱۲)

$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}^+} \frac{5}{2^{\tan x} + 2} = \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{5}{2^{+\infty} + 2} = \frac{5}{+\infty} = \frac{0}{3}$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}^+} \tan x = \lim_{x \to \frac{\pi}{3}^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin \frac{\pi}{3}^+}{\cos \frac{\pi}{3}^+} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

سوال ۱۳)

$\lim_{h \to 0} \frac{f(h-1) + 3}{h} = 2$

$\lim_{x \to -1} \frac{f^2(x) - f^2(-1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \to -1} \frac{(f(x) - f(-1))(f(x) + f(-1))}{(x-1)(x+1)}$

$= \lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} \times \frac{f(x) + f(-1)}{x-1} = \frac{f(-1) + f(-1)}{-2} = \frac{2f(-1)}{-2} \times f'(-1) = -f(-1) \times f'(-1)$

↳ $f'(-1)$ $\Rightarrow \begin{cases} f'(-1) = 2 \\ f(-1) = -3 \end{cases} \Rightarrow -f(-1) \times f'(-1) = -(-3) \times (2) = 6$

Scanned with CamScanner

سوال ۱۴)

$$f(x)=\sqrt[3]{3x+2} \rightarrow f(2)=\sqrt[3]{8}=2$$

الف) $$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2}=\frac{0}{0}$$ مبهم

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2}\times\frac{\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2\sqrt[3]{3x+2}+4}{\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2\sqrt[3]{3x+2}+4}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x+2-8}{(x-2)\left(\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2\sqrt[3]{3x+2}+4\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)}{(x-2)\left(\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2\sqrt[3]{3x+2}+4\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3}{\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2\sqrt[3]{3x+2}+4}=\frac{3}{4+4+4}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow f'(2)=\frac{1}{4}\ ,\ f(2)=2$$

$$\rightarrow y=\frac{1}{4}x+b \xrightarrow{A(2,2)} 2=\frac{1}{4}\times 2+b \Rightarrow b=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ معادله مماس در $x=2$ برابر $y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$

Scanned with CamScanner