نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۱۰۰ دقیقه

نام آزمون: ریاضی دوازدهم تجربی

تاریخ آزمون:

سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان

۱-با فرض $g(x)=\sqrt{x}+1$ و $fog(x)=x+2\sqrt{x}$، ضابطهٔ تابع f و مقدار $f(4)$ را به‌دست آورید. (۲)

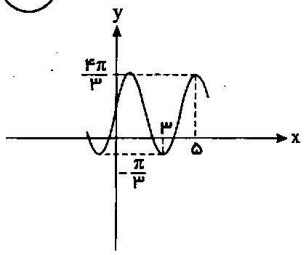
۲-تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است. دامنهٔ تابع g را بیابید.

$$g(x)=\frac{x}{\sqrt{f(|x-1|)-f(|x|)}}$$ (۱٫۵)

۳-با محدود کردن دامنهٔ تابع $f(x)=x^2-4x+5$، یک تابع یک‌به‌یک به‌دست آورده و دامنه و برد f و وارون آن را بنویسید (۲)

۴-اگر $\sin x+\cos x=\frac{4}{3}$ باشد حاصل $\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}$ چقدر است؟ (۱٫۵)

۵-نمودار تابع $f(x)=a\sin bx+c$ به‌صورت زیر است، ضابطهٔ تابع را بیابید. (۱٫۵)



۶-معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کرده و جواب‌های واقع در بازهٔ $[0,2\pi]$ را بیابید. (۱٫۵)

$$\sin x+\cos^2 x=\frac{1}{4}$$

۷-اگر باقی‌ماندهٔ $f(x)$ بر $x-1$ برابر ۳ و باقی‌ماندهٔ $f(x)$ بر x^2-4 عبارت $3x+1$ باشد، باقی‌ماندهٔ $f(x)$ بر x^2-3x+2 را بیابید. (۱٫۵)

۸-اگر $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x+1}{x^2+mx+n}=-\infty$ آنگاه m و n را بیابید. (۱٫۵)

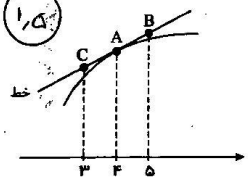
۹-

حاصل $\lim\limits_{x\to 4^-}\left(\frac{x}{x-1}+\frac{-x+2}{x-4}\right)$ کدام است؟ (۱٫۵)

۱۰-در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{ax+\sqrt{۴x^۲+۵}}{۲x+۲}$، اگر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{۵}{۲}$ باشد، آنگاه حد $f(x)$ وقتی $x\to -۱$، کدام است؟ (۱٫۵)

۱۱-حد تابع $\dfrac{x^۲-[x^۲]}{۳x^۲+۲}$ وقتی $x\to-\infty$ کدام است؟ (۱)

۱۲-برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم $f'(۴)=۱٫۵$ و $f(۴)=۲۴$ با توجه به شکل، مختصات نقاط A، B و C را بیابید. (۱٫۵)



۱۳-با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x-۱}$ را در نقطهٔ $x=۹$ بیابید. (۱٫۵)

سؤال ۱) $g(x)=\sqrt{x}+1$ ، $(f\circ g)(x)=x+2\sqrt{x}$ $f(x)=?$ ، $f(4)=?$

$f\circ g(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}=\sqrt{x}^2+2\sqrt{x}=\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)$

$\Rightarrow f(g(x))=f(\sqrt{x}+1)=\sqrt{x}(\sqrt{x}+1+1)$ $\rightarrow \sqrt{x}+1=t$

$\sqrt{x}=t-1$

$\Rightarrow f(t)=(t-1)(t+1)=t^2-1 \Rightarrow f(x)=x^2-1$ ، $f(4)=4^2-1=15$

سؤال ۲) $g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{f(|x-1|)-f(|x|)}} \rightarrow D_g: f(|x-1|)-f(|x|)>0$

$\Rightarrow f(|x-1|)>f(|x|)$ (f صعودی است) $\Rightarrow |x-1|>|x|$

$\Rightarrow |x-1|>|x| \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^2-2x+1>x \rightarrow x^2-3x+1>0$

$\rightarrow \Delta=9-4=5$ ، $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2} \rightarrow x\in(-\infty,\dfrac{3-\sqrt{5}}{2})\cup(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2},+\infty)$

سؤال ۳) $f(x)=x^2-4x+5=x^2-4x+5+4-4=(x-2)^2+1$

دامنه: $x\geq 2 \rightarrow y-1=(x-2)^2 \Rightarrow \pm\sqrt{y-1}=x-2 \Rightarrow x=\sqrt{y-1}+2$

$\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}+2$ $R_f=[1,+\infty)$

سؤال ۴) $\sin x+\cos x=\dfrac{4}{3}$ $\xrightarrow[\text{طرفین}]{\text{به توان ۲}}$ $\sin^2x+\cos^2x+\sin 2x=\dfrac{16}{9}$

$\Rightarrow 1+\sin 2x=\dfrac{16}{9} \Rightarrow \sin 2x=\dfrac{16}{9}-1=\dfrac{7}{9}$

$\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}=k \xrightarrow{k>0}$ $\tan x+\cot x+2\sqrt{\tan x\cot x}=k^2$

$\Rightarrow \dfrac{2}{\sin 2x}+2=k^2 \Rightarrow \dfrac{2}{\frac{7}{9}}+2=k^2 \Rightarrow k^2=\dfrac{32}{7} \Rightarrow k=\dfrac{4\sqrt{14}}{7}$

Scanned with CamScanner

(۵ ص ۱۶۵)

$f(x)=a\sin bx+c \rightarrow \begin{cases} -|a|+c=-\frac{\pi}{۳} \\ |a|+c=\frac{۲\pi}{۳} \end{cases} \xrightarrow{\oplus} ۲c=\pi \Rightarrow c=\frac{\pi}{۲}$

$|a|+c=\frac{۲\pi}{۳} \rightarrow |a|=\frac{۲\pi}{۳}-\frac{\pi}{۲}=\frac{۵\pi}{۶}$

$f(۳)=\frac{-\pi}{۳} \Rightarrow f(x)=\frac{۵\pi}{۶}\sin bx+\frac{\pi}{۲} \Rightarrow -\frac{\pi}{۳}=\frac{۵\pi}{۶}\sin ۳b+\frac{\pi}{۲}$

$-\frac{۵\pi}{۶}=\frac{۵\pi}{۶}\sin ۳b \Rightarrow \sin ۳b=-۱ \Rightarrow ۳b=\frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow b=\frac{\pi}{۲}$

$f(x)=\frac{۵\pi}{۶}\sin\frac{\pi}{۲}bx+\frac{\pi}{۲}$

(۶ ص ۱۶۵)

$\sin x+\cos^۲ x=\frac{۱}{۴} \Rightarrow \sin x+۱-\sin^۲ x=\frac{۱}{۴} \Rightarrow \sin^۲ x-\sin x-\frac{۳}{۴}=۰$

$\sin x=t \rightarrow t^۲-t-\frac{۳}{۴}=۰ \rightarrow \Delta=(-۱)^۲-۴(۱)(-\frac{۳}{۴})=۱+۳=۴$

$\Rightarrow t=\frac{۱\pm۲}{۲} \begin{cases} t=\frac{۱+۲}{۲}=\frac{۳}{۲} \text{ غ ق ق} \\ t=\frac{۱-۲}{۲}=-\frac{۱}{۲} \text{ ق ق} \end{cases}$

$\Rightarrow \sin x=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow x=۲k\pi-\frac{\pi}{۶} \rightarrow \begin{cases} x=۲\pi-\frac{\pi}{۶}=\frac{۱۱\pi}{۶} \end{cases}$

(۷ ص ۱۶۵)

$f(x)=ax^۲+bx+c \xrightarrow[f(-۲)=-۵]{f(۱)=۳,\ f(۲)=۷} f(x)=\frac{۱}{۳}x^۲+۲x-\frac{۱}{۳}$

$\Rightarrow \frac{۱}{۳}x^۲+۲x-\frac{۱}{۳}=(x^۲-۳x+۲)Q(x)+ax+b$

$\rightarrow x=۱ \Rightarrow \frac{۱}{۳}+۲-\frac{۱}{۳}=a(۱)+b \Rightarrow a+b=۳$

$\rightarrow x=۲ \Rightarrow \frac{۴}{۳}+۴-\frac{۱}{۳}=۲a+b \Rightarrow ۲a+b=۷$

$\Rightarrow \begin{cases} ۲a+b=۷ \xrightarrow{\times ۱} \\ a+b=۳ \xrightarrow{\times(-۲)} \end{cases} \begin{cases} ۲a+b=۷ \\ -۲a-۲b=-۶ \end{cases} \xrightarrow{\oplus} -b=۱ \Rightarrow b=-۱ ,\ a=۴$

$\Rightarrow R(x)=۴x-۱$

Scanned with CamScanner

سوال ۱)

$$\lim_{x\to -3} \frac{x+1}{x^2+mx+n} = -\infty \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \to \text{ریشه مخرج} \\ g(x)=x^2+mx+n \to \begin{cases} g(-3)=0 \\ \Delta=0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9-3m+n=0 \to \boxed{3m-n=9} \\ m^2-4n=0 \Rightarrow m^2=4n \to \boxed{n=\frac{m^2}{4}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3m+\frac{m^2}{4}=9 \xrightarrow{\times 4} m^2+12m=36 \Rightarrow m^2+12m-36=0$$

$$\Rightarrow (m+6)^2=0 \Rightarrow m=-6 \text{ , } n=\frac{(-6)^2}{4}=\frac{36}{4}=9$$

سوال ۹)

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x-1}+\frac{-x+2}{x-2}=\frac{2}{2-1}+\frac{-2+2}{2^--2}=\frac{2}{1^+}-\frac{0}{0^-}=2+\infty=+\infty$$

سوال ۱۰)

$$f(x)=\frac{ax+\sqrt{4x^2+5}}{2x+2} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{ax+\sqrt{4x^2+5}}{2x+2}=\lim_{x\to+\infty} \frac{ax+2|x|}{2x+2}=\lim_{x\to+\infty} \frac{(a+2)x}{2x}=\frac{a+2}{2}=\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow a=3 \text{ , } f(x)=\frac{3x+\sqrt{4x^2+5}}{2x+2}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x+\sqrt{4x^2+5}}{2x+2}=\frac{0}{0} \xrightarrow{\text{هوپیتال}} \lim_{x\to -1} \frac{3x+\sqrt{4x^2+5}}{2x+2} \times \frac{3x-\sqrt{4x^2+5}}{3x-\sqrt{4x^2+5}}$$

$$=\lim_{x\to -1} \frac{9x^2-4x^2-5}{2(x+1)(3x-\sqrt{4x^2+5})}=\lim_{x\to -1} \frac{5(x-1)(x+1)}{2(x+1)(3x-\sqrt{4x^2+5})}$$

$$=\frac{-10}{-12}=\frac{5}{6}$$

Scanned with CamScanner

سؤال (۱۱)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-[x^2]}{3x^2+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{3x^2+2}-\lim_{x\to-\infty}\frac{[x^2]}{3x^2+2}$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{\text{عدد بین صفر و یک}}{+\infty}=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$$

سؤال (۱۲)

$$f'(4)=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{y_B-24}{5-4}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{y_B-24}{1}=\frac{3}{2}\Rightarrow 2y_B-48=3$$

$$\Rightarrow 2y_B=51\Rightarrow y_B=\frac{51}{2}=25{,}5\Rightarrow B\left|\begin{matrix}5\\25{,}5\end{matrix}\right.$$

$$f'(2)=f'(4)=\frac{y_A-y_C}{x_A-x_C}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{24-y_C}{4-2}=\frac{3}{2}\Rightarrow 24-y_C=3$$

$$\Rightarrow y_C=21{,}0\Rightarrow C\left|\begin{matrix}2\\21{,}0\end{matrix}\right.\qquad A\left|\begin{matrix}4\\24\end{matrix}\right.$$

سؤال (۱۳)

$$f(x)=\sqrt{x-1}\qquad f'(9)=?\qquad f(9)=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$f'(9)=\lim_{x\to9}\frac{f(x)-f(9)}{x-9}=\lim_{x\to9}\frac{\sqrt{x-1}-2\sqrt{2}}{x-9}=\frac{0}{0}$$ حالت مبهم رفع

$$\lim_{x\to9}\frac{\sqrt{x-1}-2\sqrt{2}}{x-9}\times\frac{\sqrt{x+1}+2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}+2\sqrt{2}}\qquad\lim_{x\to9}\frac{x-1-8}{(x-9)(\sqrt{x+1}+2\sqrt{2})}$$

$$=\lim_{x\to9}\frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x+1}+2\sqrt{2})}=\frac{1}{\sqrt{10}-2\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{10}+2\sqrt{2}}{\sqrt{10}+2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}+2\sqrt{2}}{2}$$

Scanned with CamScanner