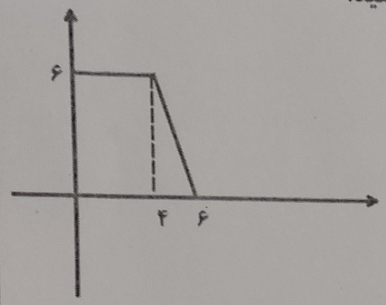
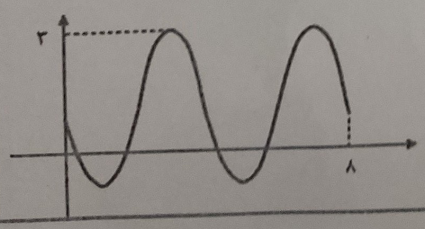
سئوالات امتحان درس :ریاضی۳	باسمه تعالی	نوبت اول:۱۴۰۲-۱۴۰۱
مقطع تحصیلی : متوسطه دوره دوم		آموزشگاه : فرزانگان
پایه: دوازدهم تجربی		دبیر مربوطه : خانم مریم حیدری قرایی
نام و نام خانوادگی :	ساعت امتحان : ۷:۳۰ صبح	کلاس : ۳۰۲
تاریخ امتحان : ۱۴۰۱/۱۰/۲۲	مدت امتحان : ۱۱۰ دقیقه	تعداد صفحه :۴

ردیف	سوالات صفحه اول	بارم
۱	جاهای خالی را با عبارت یا عدد مناسب پر کنید.(باراه حل) الف) اگر تابع نمایی $y = a^x$ اکیداً نزولی باشد انگاه حدود a به صورت ..... است. ب) دوره تناوب تابع $y = \lvert sinx \rvert$ برابر ..... است. ج) باقی مانده چند جمله ای $f(x) = ۲x^۳ - ۳x^۲ + m$ بر $x - ۲$ برابر۵ است مقدار m برابر .....است. د) اگر $\lim_{x \to +\infty} \frac{a x^n + ۳x^۲ + ۱}{(a-۱)x^۲ + x - ۱} = ۲$ مقدار n و a به ترتیب برابر ..... و ..... ه) اگر خط مماس بر منحنی در نقطه ای موازی محور x ها باشد آنگاه شیب خط در آن نقطه برابر ..... است.	۲/۵
۲	درستی و نادرستی گزاره های زیر را تعیین کنید. الف)برای رسم تابع $y = \sqrt{-x+۱}$ به روش انتقال ابتدا $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y قرینه می کنیم و سپس آن را یک واحد به سمت مثبت محور xها انتقال می دهیم. ب) دامنه تابع $y = \tan\left(۲x - \frac{\pi}{۲}\right)$ برابر $x \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}$ است. ج) بازه $(۲ و -۲)$ یک همسایگی محذوف برای نقطه صفر است. د) مقدار $\lim_{x \to ۲^-} \frac{[x]-۲}{\lvert x-۲ \rvert}$ برابر $+\infty$ است.	۱
۳	الف) تابع $y = f(x)$ را رسم کنید. $f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۲x & x \geq ۰ \\ \square & \\ x & x < ۰ \end{cases}$ ب)مشخص کنید تابع در چه فاصله ای اکیدا صعودی و درچه فاصله ای اکیدا نزولی است. پ) در فاصله ای که تابع $y = f(x)$ اکیدا نزولی است وارون را بدست آورید.	۲

ادامه سوالات در صفحه دوم

۴	اگر $f(x)=\sqrt{۴-x^۲}$ و $g(x)=x+۱$ باشند الف) دامنه fog را به کمک تعریف بیابید. ب) ضابطه fog را تعیین کنید.	۲
۵	با توجه به نمودار مربوط به $y=f(x)$ نمودار تابع $y=-\frac{۱}{۲}f(۲x)$ را رسم کنید.  	۰/۵
۶	اگر $g(x)=x^۲-۱$ و $f(x)=۳x+۳$ باشند حاصل $g^{-۱}of^{-۱}(-۲۴)$ را بیابید.	۰/۷۵
۷	الف) مقدار $\sin ۷/۵^\circ \times \cos ۷/۵^\circ \times \cos ۱۵^\circ$ را تعیین کنید. ب) مساحت مثلثی برابر $۳\sqrt{۲}$ و اندازه اضلاع آن به ترتیب برابر ۶ و ۲ باشدچند نوع مثلث با این خصوصیت داریم.	۰/۵ ۰/۵
۸	الف) مقدار ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب تابع $y=-\sqrt{۲}\cos ۳x-۱$ را تعیین کنید. ب) نمودار زیر قسمتی از نمودار $y=۱+a\sin b\pi x$ است مقدار b و a را تعیین کنید.  	۰/۷۵ ۰/۷۵

ادامه سوالات در صفحه سوم

صفحه سوم

۹ معادله زیر را حل کنید.و تعداد جواب های آن را در فاصله $[-\pi \text{ و } \pi]$ را تعیین کنید.

۱ $\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0$

۱۰ حاصل حدود زیر را بدست آورید. ۲/۷۵

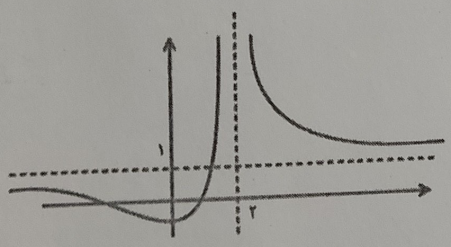
الف) $\lim_{x \to +1} \frac{1 - x^2}{x - \sqrt{3x - 2}}$

ب) $\lim_{x \to \pi^-} \frac{1}{1 + \cos x}$

ج) $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 + x}}{3x - \sqrt{x + 5}}$

د) $\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + x^2 + 4}{x^2 - 2x - 8}$

۱۱ با توجه به نمودار داده شده حاصل هر عبارت را تعیین کنید. ۰/۵



الف) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ldots\ldots$

ب) $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots$

۱۲ اگر $f(x) = x^3 + 2$ باشد به کمک تعریف مشتق شیب خط مماس بر منحنی در نقطه $x = 1$ واقع بر منحنی را بیابید و سپس معادله خط مماس بر منحنی را در نقطه $x = 1$ واقع بر منحنی بنویسید. ۱/۵

ادامه سوالات در صفحه چهارم

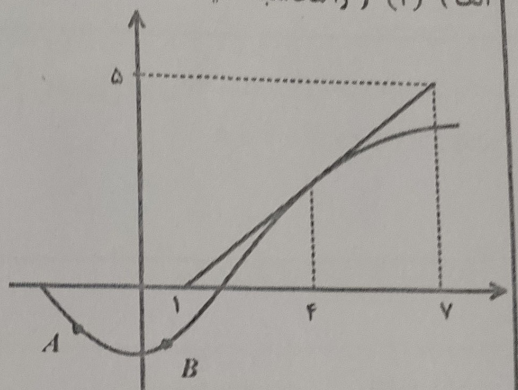
صفحه چهارم

۱۳

با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ زیر پاسخ دهید.

الف) $f'(۴)$ را محاسبه کنید. ۱

ب) درکدام نقطه مقدار تابع منفی ولی مقدار مشتق مثبت است.



۱۴

الف) ضابطهٔ تابعی به فرم $y = a\cos bx + c \quad , \quad a > 0$ را بنویسید که دوره تناوب آن $\frac{\pi}{2}$ و مقدار ماکزیمم آن ۳ و مقدار مینیمم آن -1 باشد . ۱

ب) اگر $f(x) = \cos^۴ x - \sin^۴ x$ مقدار $f(\frac{\pi}{۱۲})$ را بیابید. ۱

اختیاری

m و n را چنان بیابید که چند جمله ای $x^۴ - ۳x^۳ + mx + n$ بر $x^۲ - ۵x + ۶$ بخش پذیر باشد. ۰/۵

حد کسر $\lim_{x \to \infty} \frac{x^{m+۳} + nx + m}{mx^{n-۲} - mx + n - ۱} =$ با شرط $n > ۳$ برابر -۲ است. $m+n$ کدام است؟ ۰/۵

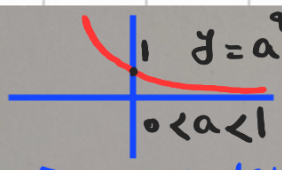
ارفاقی

بنام خدا

پاسخ از: برهان فتح اللهی

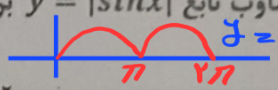
جاهای خالی را با عبارت یا عدد مناسب پر کنید.(باراه حل)

الف) اگر تابع نمایی $y = a^x$ اکیداً نزولی باشد انگاه حدود a به صورت $0<a<1$ است.



ب) دوره تناوب تابع $y = |sinx|$ برابر π است.

$f(x+T) = |\sin(x+T)| = \sin x \rightarrow T = \pi$



ج) باقی مانده چند جمله ای $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + m$ بر $x-2$ برابر ۵ است مقدار m برابر ۱ است. ۲/۵

$f(2) = 5 \rightarrow 5 = 16 - 12 + m \rightarrow m = 1$

د) اگر $\lim_{x \to +\infty} \frac{ax^n + 3x^2 + 1}{(a-1)x^2 + x - 1} = 2$ مقدار n و a به ترتیب برابر ..... و .....

ه) اگر خط مماس بر منحنی در نقطه ای موازی محور x ها باشد آنگاه شیب خط در آن نقطه برابر صفر است.

۱

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{ax^n + 3x^2 + 1}{(a-1)x^2 + x - 1} = 2$$

صورت و مخرج هم درجه اند

اگر $n=2$ باشد:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(a+3)x^2}{(a-1)x^2} = \frac{a+3}{a-1} = 2 \rightarrow a+3 = 2a-2 \rightarrow a = 5$$

اگر $n<2$ باشد:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{(a-1)x^2} = \frac{3}{a-1} = 2 \rightarrow 3 = 2a-2 \rightarrow a = \frac{5}{2}$$

درستی و نادرستی گزاره های زیر را تعیین کنید.

الف)برای رسم تابع $y = \sqrt{-x+1}$ به روش انتقال ابتدا $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y قرینه می کنیم و سپس آن را یک واحد به سمت مثبت محور xها انتقال می دهیم. ص

۲ ب) دامنه تابع $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ برابر $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ است. غ

ج) بازه $(-2, 2)$ یک همسایگی محذوف برای نقطه صفر است. غ چون خود صفر جزء بازه است.

د) مقدار $\lim_{x \to 2^-} \frac{[x]-2}{|x-2|}$ برابر $+\infty$ است. غ

الف) $\sqrt{9u} \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به } y]{} \sqrt{-9u} \xrightarrow[\text{یک واحد به راست}]{} \sqrt{-(9u-1)} = \sqrt{-9u+1}$

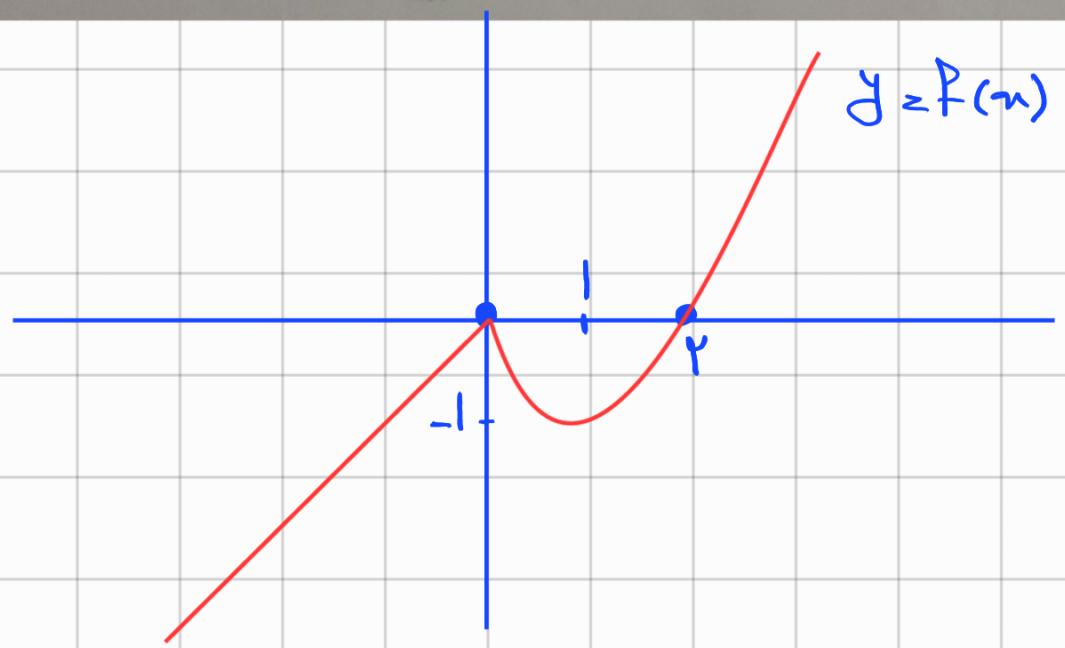
ب) $y = \tan\left(2u - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(2u - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(2u - \frac{\pi}{2}\right)}$

$\cos\left(2u - \frac{\pi}{2}\right) \neq 0 \longrightarrow 2u - \frac{\pi}{2} \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$

$2u \neq k\pi + \pi \longrightarrow u \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$

$\lim_{u \to 2^-} \frac{[u]-2}{|u-2|} = \frac{[2^-]-2}{0^+} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$ (ج

۳	الف) تابع $y = f(x)$ را رسم کنید. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 0 \\ \square & \\ x & x < 0 \end{cases}$	۲
	ب)مشخص کنید تابع در چه فاصله ای اکیدا صعودی و در چه فاصله ای اکیدا نزولی است.	
	پ) در فاصله ای که تابع $y = f(x)$ اکیدا نزولی است وارون را بدست آورید.	



الف)

ب) اکیدا صعودی: $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$

اکیدا نزولی: $[0, 1]$

پ) $y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 \quad ; \quad 0 \leq x \leq 1 \longrightarrow$

$-1 \leq y \leq 0 \longrightarrow D_{f^{-1}(x)} = [-1, 0]$

$y+1 = (x-1)^2 \xrightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt{y+1} = |x-1|$

$\xrightarrow{0 \leq x \leq 1} \sqrt{y+1} = 1-x \rightarrow x = 1-\sqrt{y+1} \longrightarrow$ جای x و y عوض

$$f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x+1} \quad ; \quad -1 \leq x \leq 0$$

۲

اگر $f(x)=\sqrt{۴-x^۲}$ و $g(x)=x+۱$ باشند

الف) دامنه fog را به کمک تعریف بیابید.

۴

ب) ضابطه fog را تعیین کنید.

الف)

$D_f: \; ۴-x^۲ \geq ۰ \longrightarrow x^۲ \leq ۴ \longrightarrow -۲ \leq x \leq ۲$

$D_g: \mathbb{R}$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in \underbrace{\mathbb{R}}_{A} \mid \underbrace{x+۱}_{B}\in -۲\leq x\leq ۲\}=A\cap B$$

$B: \; -۲ \leq x+۱ \leq ۲ \longrightarrow -۳ \leq x \leq ۱$

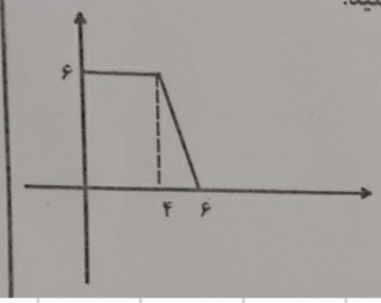
$$D_{fog}=A\cap B=\mathbb{R}\cap[-۳,۱]=[-۳,۱]$$

ب)

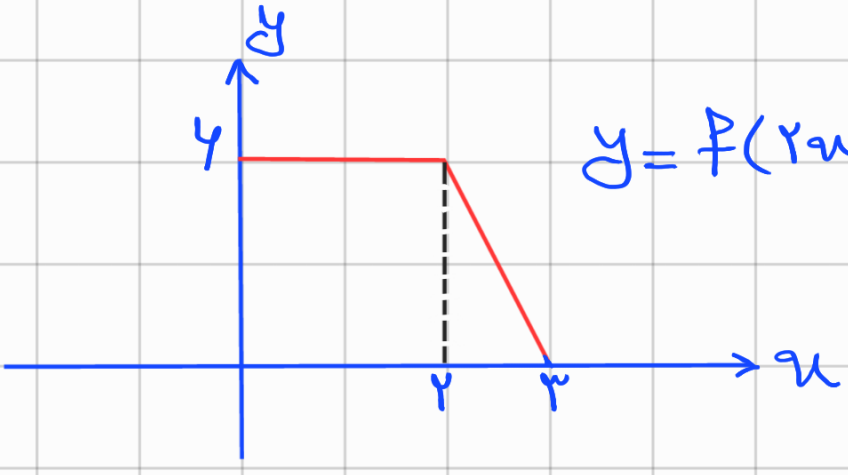
$$fog=f(g(x))=\sqrt{۴-(x+۱)^۲}$$

$$fog=\sqrt{-x^۲-۲x+۳}$$

۵ با توجه به نمودار مربوط به $y = f(x)$ نمودار تابع $y = -\frac{1}{2} f(2x)$ را رسم کنید. ۰/۱۵

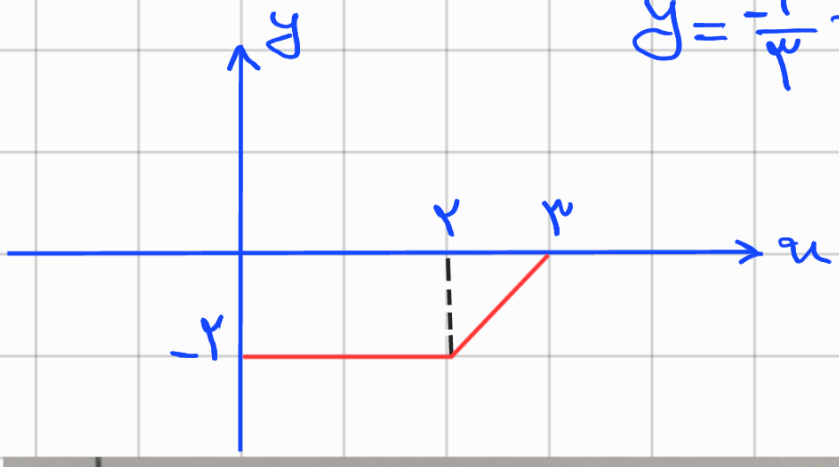


$$y = -\frac{1}{2} f(2x)$$



$$y = f(2x)$$

$$y = -\frac{1}{2} f(2x)$$



۶ اگر $g(x) = x^3 - 1$ ، $f(x) = 3x + 3$ باشند حاصل $g^{-1}of^{-1}(-24)$ را بیابید. ۰/۷۵

$$f^{-1}(-24) = a \rightarrow f(a) = -24 = 3a + 3 \rightarrow a = -9$$

$$g^{-1}\left(\underbrace{f^{-1}(-24)}_{a}\right) = g^{-1}(a) = g^{-1}(-9) = b = -2$$

$$g^{-1}(-9) = b \rightarrow g(b) = -9 = b^3 - 1 \rightarrow b = -2$$

۷	الف) مقدار $\sin ۷/۵^\circ \times \cos ۷/۵^\circ \times \cos ۱۵^\circ$ را تعیین کنید.	۰/۵
	ب) مساحت مثلثی برابر $۳\sqrt{۲}$ و اندازه اضلاع آن به ترتیب برابر ۶ و ۲ باشدچند نوع مثلث با این خصوصیت داریم.	۰/۵

الف)

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{۲}\sin ۲\alpha$$

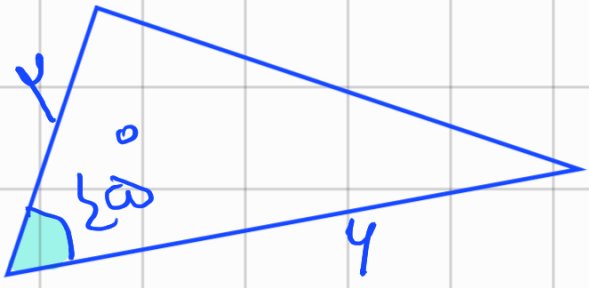
$$\sin ۷/۵^\circ \cos ۷/۵^\circ \times \cos ۱۵^\circ = \frac{1}{۲}\sin ۱۵^\circ \cos ۱۵^\circ = \frac{1}{۴}\sin ۳۰^\circ = \frac{1}{۸}$$

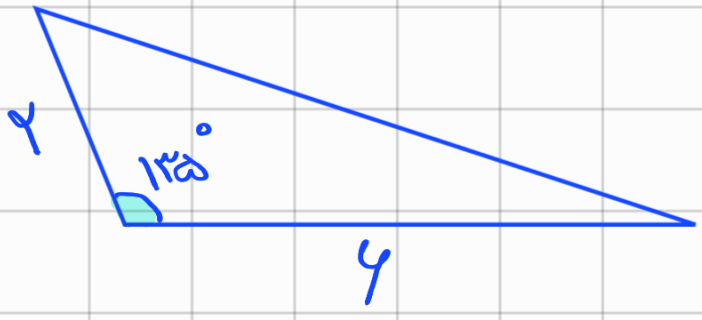
ب)

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{۲}ab\sin\theta \longrightarrow ۳\sqrt{۲} = \frac{1}{۲}(۲)(۶)\sin\theta$$

$$\longrightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \longrightarrow \theta = ۴۵^\circ ,\ ۱۳۵^\circ$$

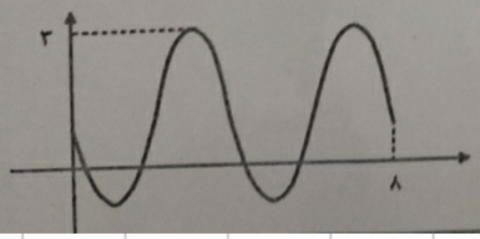
دو مثلث با این خصوصیت داریم.





الف) مقدار ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب تابع $y = -\sqrt{2}\cos 3x - 1$ را تعیین کنید. ۰/۷۵

ب) نمودار زیر قسمتی از نمودار $y = 1 + a\sin b\pi x$ است مقدار b و a را تعیین کنید. ۰/۷۵



۸

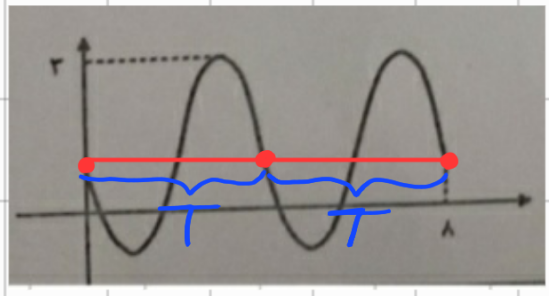
الف)

$y = -\sqrt{2}\cos 3\pi x - 1 \longrightarrow T = \frac{2\pi}{|3\pi|} = \frac{2\pi}{3}$

$max = |-\sqrt{2}| - 1 = \sqrt{2} - 1$

$min = -|-\sqrt{2}| - 1 = -\sqrt{2} - 1$

ب)



$y = 1 + a\sin b\pi x$

$2T = 8 \longrightarrow T = 4 = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|}$

$|b| = \frac{1}{2}$

$max: \ 3 = 1 + |a| \longrightarrow |a| = 2$

a و b ناهم علامت $\longrightarrow ab < 0 \longrightarrow$ $\boxed{a = 2, \ b = -\frac{1}{2}}$ یا $\boxed{a = -2, \ b = \frac{1}{2}}$

۱	معادله زیر را حل کنید.و تعداد جواب های آن را در فاصله $[-\pi \ , \ \pi]$ را تعیین کنید. $\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0$	۹

$2\cos^2 x - 1 - 3\cos x + 2 = 0 \rightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

جمع ضرایب صفر $\longleftarrow$ ریشه‌ها: 1 و $\frac{c}{a}$

$\rightarrow \cos x = 1 \rightarrow x = 2k\pi \xrightarrow{x \in [-\pi, \pi]} x = 0$

$\rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \xrightarrow{x \in [-\pi, \pi]} x = -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$

پس در این بازه ۳ جواب دارد.

حاصل حدود زیر را بدست آورید.

الف) $\lim_{x\to+1} \frac{1-x^2}{x-\sqrt{3x-2}} = \frac{0}{0}$ مبهم

$$= \lim_{u\to 1} \frac{(1-u)(1+u)(u+\sqrt{3u-2})}{(u-\sqrt{3u-2})(u+\sqrt{3u-2})}$$

$$= \lim_{u\to 1} \frac{\overset{-1}{(1-u)}(1+u)(u+\sqrt{3u-2})}{u^2-3u+2=(u-1)(u-2)} = \frac{(-1)(2)(2)}{(-1)} = 4$$

ج) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x-\sqrt{x^2+x}}{3x-\sqrt{x+5}}$

$$= \lim_{u\to-\infty} \frac{3u-\overbrace{|u|}^{-u}}{3u-\sqrt{u}} = \frac{3u}{3u} = 1$$

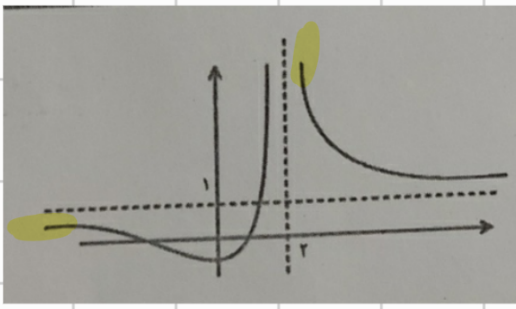
د) $\lim_{x\to-2} \frac{x^3+x^2+4}{x^2-2x-8} = \frac{0}{0}$ مبهم

$$= \lim_{u\to-2} \frac{(u+2)(u^2-u+2)}{(u+2)(u-4)} = \frac{4-(-2)+2}{-2-4} = \frac{8}{-6} = -\frac{4}{3}$$

ب) $\lim_{x\to\pi^-} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{1+(-1)^+}$

$$= \frac{1}{0^+} = +\infty$$

۱۱ با توجه به نمودار داده شده حاصل هر عبارت را تعیین کنید.



الف) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ldots\ldots 1$

ب) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \ldots +\infty \ldots$

۱۲ اگر $f(x) = x^2 + 2$ باشد به کمک تعریف مشتق شیب خط مماس بر منحنی در نقطه $x = 1$ و سپس معادله خط مماس بر منحنی را در نقطه $x = 1$ واقع بر منحنی بنویسید.

$f(1) = 1+2 = 3$

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+2-3}{x-1}$$

(x^2-1)

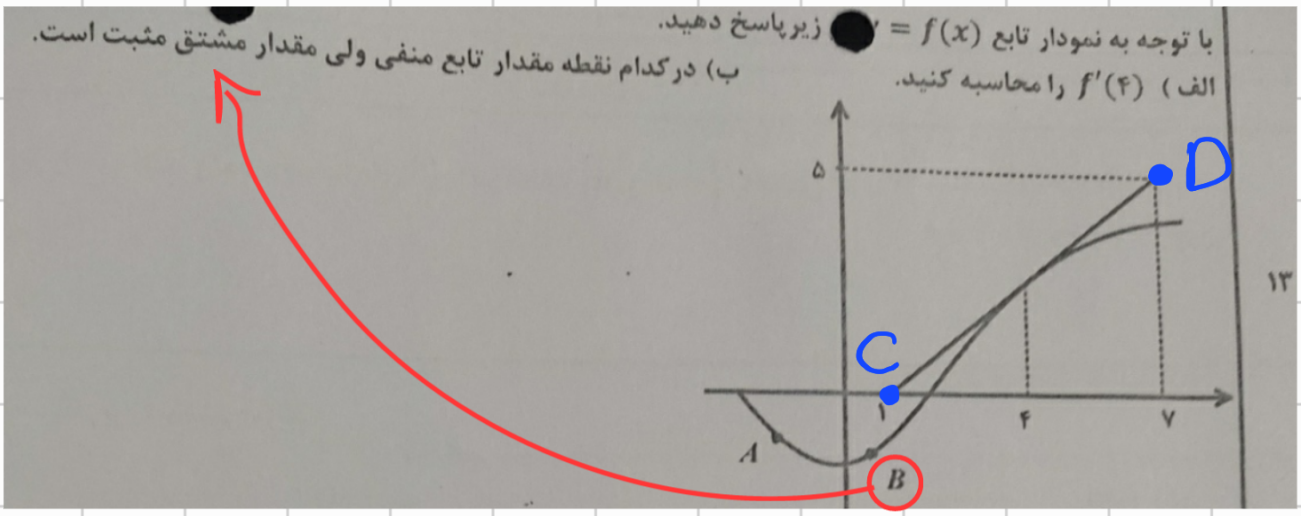
$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 1+1 = 2 \longrightarrow f'(1) = 2$$

معادله خط مماس: $y-3 = f'(1)(x-1) = 2(x-1)$

در $A(1,3)$

$$y = 2x+1$$

B



$C(۱,۰)$

$D(۷,۵)$

$\longrightarrow m_{\overleftrightarrow{CD}} = \frac{۵-۰}{۷-۱} = \frac{۵}{۶} = f'(۴)$

۱	الف) ضابطهٔ تابعی به فرم $y = a\cos bx + c$ ، $a > ۰$ را بنویسید که دوره تناوب آن $\frac{\pi}{2}$ و مقدار ماکزیمم آن ۳ و مقدار مینیمم آن -۱ باشد.

الف)

$T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{\pi}{۲} \longrightarrow |b| = ۴ \longrightarrow b = \pm ۴$

هردو قابل قبول

$|a| = \frac{max - min}{۲} = \frac{۳-(-۱)}{۲} = ۲ \xrightarrow{a>۰} a = ۲$

$c = \frac{max + min}{۲} = \frac{۳+(-۱)}{۲} = ۱ \longrightarrow c = ۱$

$y = ۲\cos ۴x + ۱$

"	ب) اگر $f(x) = \cos^۴ x - \sin^۴ x$ مقدار $f(\frac{\pi}{۱۲})$ را بیابید

$\cos^۴ x - \sin^۴ x = (\cos^۲ x - \sin^۲ x)(\cos^۲ x + \sin^۲ x) = \cos ۲x$

$f(x) = \cos ۲x \longrightarrow f(\frac{\pi}{۱۲}) = \cos\frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

اختیاری

m و n را چنان بیابید که چند جمله ای x^4-3x^3+mx+n بر x^2-5x+6 بخش پذیر باشد.

$$x^2-5x+6=0 \rightarrow (x-2)(x-3)=0 \rightarrow x=2,3$$

$$P(x)=x^4-3x^3+mx+n$$

$$P(2)=0=16-24+2m+n \rightarrow 2m+n=8$$
$$P(3)=0=81-81+3m+n \rightarrow 3m+n=0 \rightarrow \begin{cases} m=-8 \\ n=24 \end{cases}$$

حد کسر $\lim_{x\to\infty}\frac{x^{m+3}+nx+m}{mx^{n-2}-mx+n-1}$ با شرط $n>3$ برابر -2 است. $m+n$ کدام است؟

$n>3 \rightarrow n-2>1 \rightarrow$ درجه صورت $>$ درجه مخرج

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{m+3}}{mx^{n-2}}=-2=\frac{1}{m} \rightarrow m=\frac{-1}{2}$$

صورت و مخرج هم درجه اند.

$$m+3=n-2 \rightarrow m-n=-5 \xrightarrow{m=\frac{-1}{2}} n=\frac{9}{2}$$