نام دبیر : عبدالله کمالی

عنوان آزمون : سوالات امتحانات ریاضی ۳تجربی دبیرستان شاهد ناحیه ۲یزد

زمان آزمون : ۴۰ دقیقه

تاریخ برگزاری ۱۴۰۲/۱۰/۱۶

۱ موارد درست را مشخص کنید.

الف) تابع $f(۲x)$ نسبت به تابع f دارای $\frac{\text{انبساط}}{\text{انقباض}}$ افقی و $\frac{۱}{۴}f(x)$ دارای $\frac{\text{انبساط}}{\text{انقباض}}$ عمودی است.

ب) تابع $f(x-۲)$ نسبت به تابع f دو واحد به $\frac{\text{راست}}{\text{چپ}}$ منتقل می‌شود و تابع $f(x)+۳$ نسبت به تابع f سه واحد به $\frac{\text{بالا}}{\text{پایین}}$ منتقل می‌شود.

۲ کدام‌یک از جملات زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در بازه $\left(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}\right)$ اکیداً صعودی است.

ب) نقاطی به فرم $x=k\pi+\frac{\pi}{۲},(k\in Z)$ در دامنه تابع تانژانت قرار دارند.

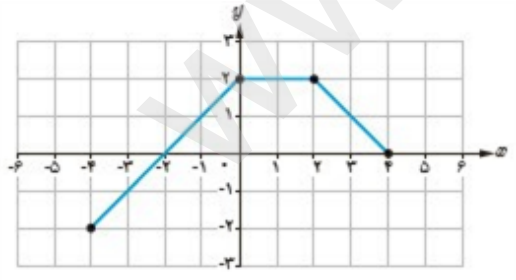
۳ تابع زیر را رسم کنید و سپس مشخص کنید در چه بازه‌ی حداکثری:

الف) صعودی ب) اکیداً نزولی ج) نزولی د) هم صعودی و هم نزولی

$$f(x)=\begin{cases} x^۲+۱ & x\geq ۱ \\ ۱ & ۰\leq x<۱ \\ -x+۴ & x<۰ \end{cases}$$

۴ نمودار $y=x^۳+۳x^۲+۳x+۲$ را به کمک انتقال رسم کنید.

۵ با استفاده از نمودار تابع f، نمودار خواسته شده را رسم کنید.



الف) $y=\frac{۱}{۲}f(۲x)-۱$

۶ اگر $f(x)=۴x-۱$ و $g(x)=\sqrt{x-۷}$ باشند:

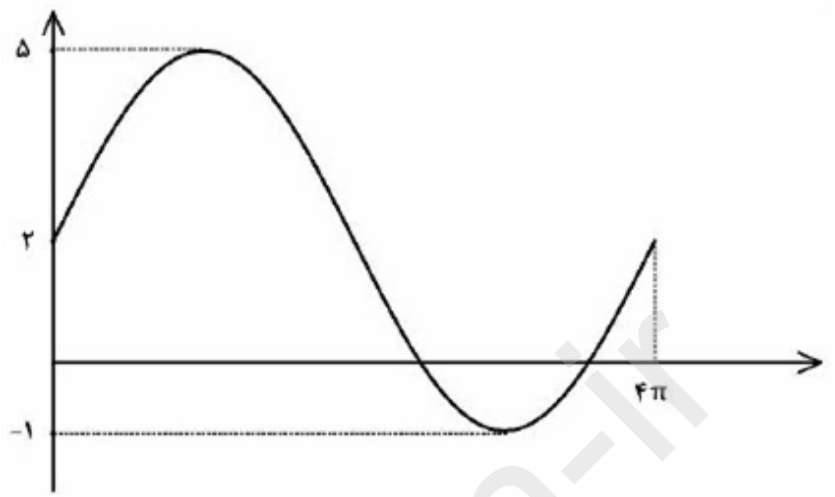
الف) دامنه تابع gof را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب) مقدار $\frac{(fog)(۸)}{(gof)(۶)}$ را محاسبه کنید.

www-kanoon-ir

۷ یک به یک بودن تابع $y = (x + ۲)^{۳} - ۲$ را بررسی کرده و وارون آن‌را به دست آورید.

۸ نمودار داده شده مربوط به تابعی با ضابطه $y = a\,\mathrm{Sin}\,bx + c$ است. مقادیر a و b و c را محاسبه کنید و ضابطه آن‌را مشخص نمایید.



۹ فرض کنید $\mathrm{Sin}\,\alpha = \frac{۱}{۳}$ و α زاویه‌ای حاده باشد، حاصل $\mathrm{Cos}\,۲\alpha$ را به دست آورید.

۱۰ معادله‌ی مثلثاتی زیر را حل کنید و سپس جواب‌های آن را در بازه‌ی $[۰, ۲\pi]$ به‌دست آورید.

$$\mathrm{Cos}\,۲x - \mathrm{Cos}\,x + ۱ = ۰$$

۱۱ مقدار a, b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $x^{۳} + ax^{۲} + bx + ۱$ بر $x - ۲$ و $x + ۱$ بخش‌پذیر باشد.

۱۲ اگر $\lim\limits_{x \to ۳} \dfrac{۵x + ۱}{x^{۲} + ax + b} = +\infty$ باشد، a و b را حساب کنید.

۱۳ حد توابع زیرا را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x \to ۳} \dfrac{x^{۲} - ۹}{۲ - \sqrt{x + ۱}}$

ب) $\lim\limits_{x \to \frac{۱}{۲}} \dfrac{[x] - ۳}{|۲x - ۱|}$

پ) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{۲x^{۳} - ۵x + ۱}{۶x^{۳} - ۱۱x^{۲} - ۳}$

www-kanoon-ir

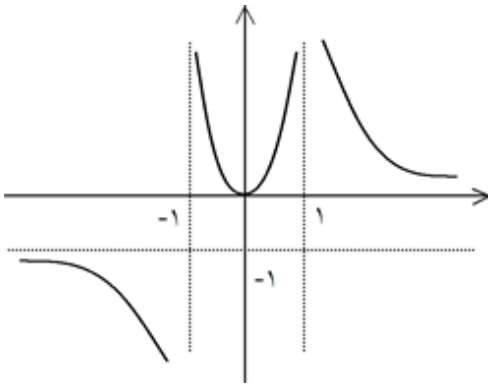
۱۴ با توجه به نمودار f حاصل حدهای خواسته شده را به دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x \to ۱^{+}} f(x)$

پ) $\lim\limits_{x \to (-۱)^{-}} f(x)$

ت) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$



۱۵ اگر $f(x) = x^{۲} - ۳x$ باشد، با استفاده از تعریف مشتق $f'(۱)$ را حساب کنید.

۱۶ معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^{۲} + ۲x$ را در نقطه‌ی $x = -۱$ واقع بر این تابع بنویسید.

www-kanoon-ir

۱ الف) انقباض - انقباض

ب) راست - بالا

۲ الف) درست

ب) نادرست

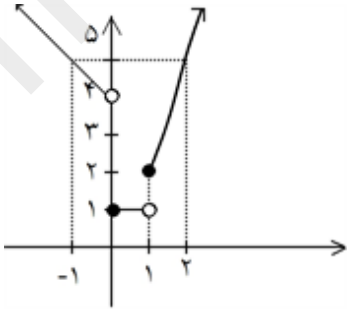
۳

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۱ & x \geq ۱ \\ ۱ & ۰ \leq x < ۱ \\ -x+۴ & x < ۰ \end{cases}$$

x	۱	۲
y	۲	۵

x	۰	۱
y	۱	۱

x	۰	-۱
y	۴	۵



الف) $[۰,+\infty)$

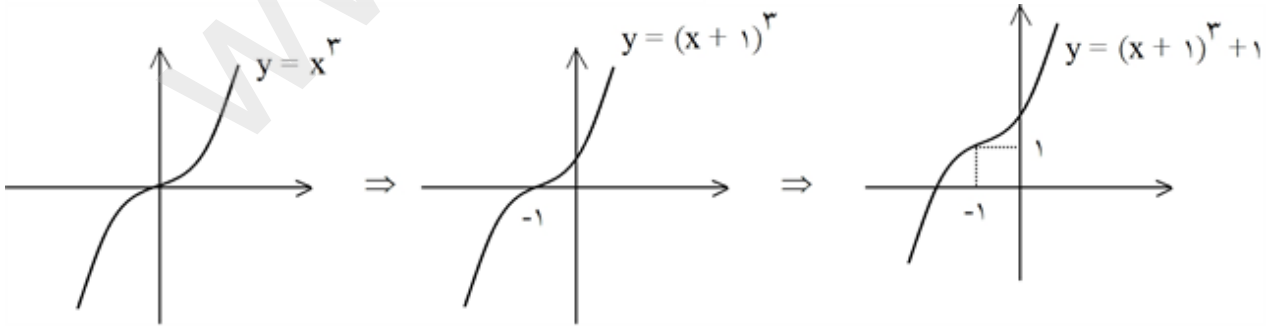
ب) $(-\infty,۰]$

ج) $(-\infty,۱)$

د) $[۰,۱)$

۴

$$y=\underbrace{x^{۳}+۳x^{۲}+۳x+۱}_{\text{اتحاد مکعب دو جمله ای}}+۱ \Rightarrow y=(x+۱)^{۳}+۱$$



www-kanoon-ir

۵

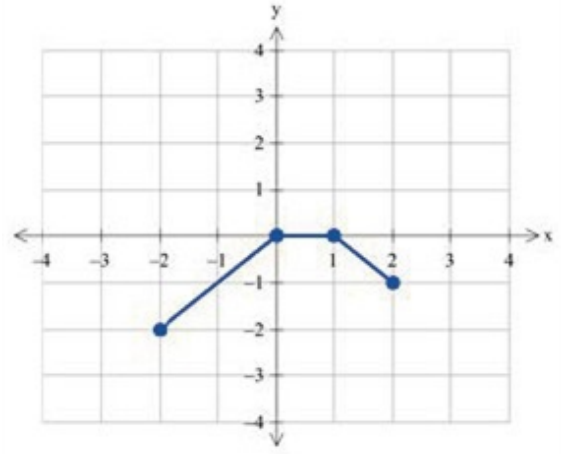
الف) $y = \frac{۱}{۲} f(۲x) - ۱$

$y = \frac{۱}{۲} f(۲x) - ۱ \quad ۲x = t \Rightarrow t = \frac{۱}{۲} x$

x	$\frac{۱}{۲}\times(-۴)$	$\frac{۱}{۲}\times(-۲)$	$\frac{۱}{۲}\times(۰)$	$\frac{۱}{۲}\times(۲)$	$\frac{۱}{۲}\times(۴)$
y	$\frac{۱}{۲}(-۲)-۱$	$\frac{۱}{۲}(۰)-۱$	$\frac{۱}{۲}(۲)-۱$	$\frac{۱}{۲}(۲)-۱$	$\frac{۱}{۲}(۰)-۱$

$\Rightarrow$

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	-۲	-۱	۰	۰	-۱



$$y = \begin{cases} x & -۲ \le x \le ۰ \\ ۰ & ۰ \le x \le ۱ \\ -x+۱ & ۱ \le x \le ۲ \end{cases}$$

$D = [-۲, ۲] \qquad R = [-۲, ۰]$

۶

الف)

$$D_f = R$$
$$D_g : x - ۷ \geqslant ۰ \Rightarrow x \geqslant ۷ \Rightarrow D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$
$$\Rightarrow D_{gof} = \{x \in R \mid ۴x - ۱ \geqslant ۷\} \Rightarrow ۴x \geqslant ۸ \Rightarrow x \geqslant ۲ \Rightarrow D_{gof} = [۲, +\infty)$$

ب)

$$\frac{(fog)(۸)}{(gof)(۶)} = \frac{f(g(۸))}{g(f(۶))} = \frac{f(۱)}{g(۲۳)} = \frac{۳}{۴}$$

۷

$f(x_۱) = f(x_۲) \longleftrightarrow x_۱ = x_۲$

$(x_۱ + ۲)^۲ - ۲ = (x_۲ + ۲)^۳ - ۲ \quad (۰/۲۵)$

$x_۱ + ۲ = x_۲ + ۲ \Rightarrow x_۱ = x_۲ \quad (۰/۲۵)$ تابع یک به یک است

$\Rightarrow y = (x+۲)^۳ - ۲ \Rightarrow y + ۲ = (x+۲)^۳ \; (۰/۲۵) \Rightarrow x = \sqrt[۳]{y+۲} - ۲ \quad (۰/۲۵)$

تابع وارون $\Rightarrow f^{-۱}(x) = \sqrt[۳]{x+۲} - ۲ \quad (۰/۲۵)$

۸

$$\begin{cases} |a| + c = ۵ \\ -|a| + c = -۱ \end{cases} \Rightarrow c = ۲, a = \pm ۳$$

$$۴\pi = \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{۱}{۲} \Rightarrow b = \pm\frac{۱}{۲} \Rightarrow y = ۳\,\mathrm{Sin}\,\frac{x}{۲} + ۲, y = -۳\,\mathrm{Sin}\left(-\frac{x}{۲}\right) + ۲$$

www.kanoon.ir

۹ $\text{Cos } ۲\alpha = \underbrace{۱ - ۲\text{Sin}^{۲}\alpha}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{۱ - ۲\left(\frac{۱}{۹}\right)}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{\frac{۷}{۹}}_{(۰/۲۵)}$

۱۰ $۲\,\text{Cos}^{۲}x - ۱ - \text{Cos}\,x + ۱ = ۰ \Rightarrow \text{Cos}\,x(۲\,\text{Cos}\,x - ۱) = ۰$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Cos}\,x = ۰ \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ \text{Cos}\,x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

جواب‌های خاص $= \left\{\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}, \frac{\pi}{۳}, \frac{۵\pi}{۳}\right\}$

۱۱ $x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow p(۲) = ۰ \Rightarrow ۴a + ۲b = -۹$

$x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \Rightarrow p(-۱) = ۰ \Rightarrow a - b = ۰$

$a = -\frac{۳}{۲}, b = -\frac{۳}{۲}$

۱۲ چون حاصل حد برای راست و چپ یکسان شده است بنابراین باید مخرج مربع کامل باشد در نتیجه داریم:

$x = ۳ \Rightarrow x - ۳ = ۰ \xrightarrow{\text{به توان می رسانیم ۲}} x^{۲} - ۶x + ۹ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = -۶ \\ b = ۹ \end{cases}$

۱۳ الف) $\lim\limits_{x \to ۳} \frac{(x-۳)(x+۳)(۲+\sqrt{x+۱})}{(۲-\sqrt{x+۱})(۲+\sqrt{x+۱})} = \lim\limits_{x \to ۳} \frac{(x-۳)(x+۳)(۲+\sqrt{x+۱})}{-(x-۳)} = -۲۴$

ب) $\lim\limits_{x \to \frac{۱}{۲}} \frac{[x]-۳}{|۲x-۱|} = \frac{-۳}{۰^{+}} = -\infty$

پ) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{۲x^{۳}}{۶x^{۳}} = \frac{۱}{۳}$

۱۴ الف) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = ۰$

ب) $\lim\limits_{x \to ۱^{+}} f(x) = +\infty$

پ) $\lim\limits_{x \to (-۱)^{-}} f(x) = -\infty$

ت) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -۱$

۱۵ $f'(۱) = \lim\limits_{x \to ۱} \frac{x^{۲} - ۳x + ۲}{x - ۱} = \lim\limits_{x \to ۱} \frac{(x-۱)(x-۲)}{x-۱} = -۱$

۱۶ $x = -۱ \Rightarrow f(-۱) = ۱ - ۲ = -۱$

$f'(x) = ۲x + ۲ \Rightarrow m = f'(-۱) = ۰$

$y = y_{۱} = m(x - x_{۱}) \Rightarrow y - (-۱) = ۰(x + ۱) \Rightarrow y = -۱$