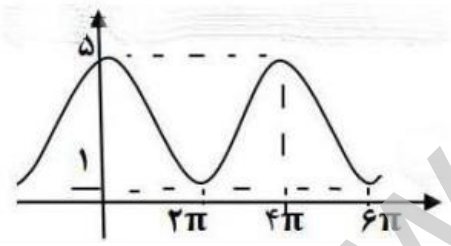
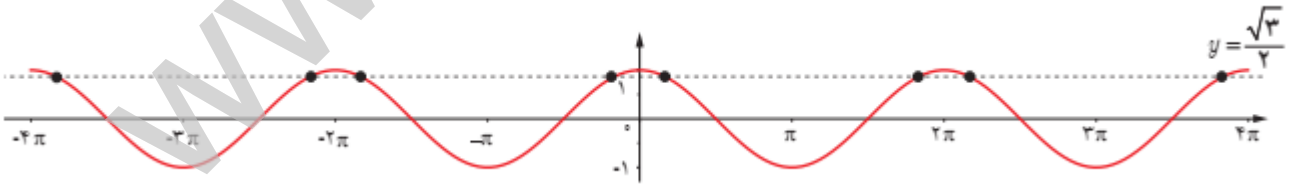
باسمه تعالی

| | | | |
|---|---|---|---|
| **سوالات آزمون شبه نهایی درس : ریاضی ۳** | **رشته : علوم تجربی** | **ساعت شروع : ۸ صبح** | **مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه** |
| **نام و نام خانوادگی :** | | **تاریخ: ۱۴۰۲/۰۲/۱۳** | **تعداد صفحه: ۲ صفحه** |
| **دانش آموزان پایه دوازدهم در اردیبهشت ماه سال ۱۴۰۲** | | **اداره کل آموزش و پرورش استان قزوین** | |

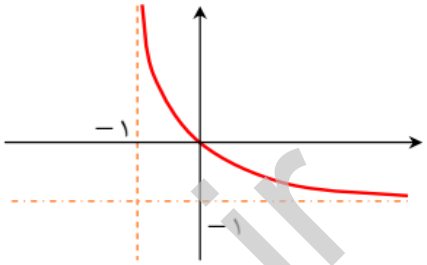
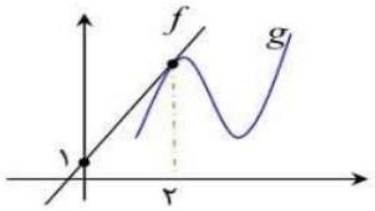
| ردیف | سوالات(استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است) | نمره |
|---|---|---|
| ۱ | درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.<br>الف) تابع $y = ۲ + ۳x^۲(۱ - x)$ یک تابع چند جمله ای از درجه سوم است.<br>ب) تابع $f(x) = \|x - ۲\| + \|x - ۱\|$ روی بازه $[۱,+\infty)$ اکیدا صعودی است.<br>پ) اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد، آنگاه f در a مشتق پذیر است.<br>ت) باقیمانده تقسیم عبارت $۲x^۲ - ۶x - ۱$ بر $x - ۲$ برابر ۵ است.<br>ث) هرچه خروج از مرکز بیضی به یک نزدیکتر باشد، شکل بیضی کشیده تر است. | ۱/۲۵ |
| ۲ | جا های خالی را با عبارت های مناسب کامل کنید.<br>الف) در تابع $f(x) = ۳x^۳ + ax^۲ + ۱۱$ داریم $f''(۱) = -۹$ ، مقدار $a$ برابر است با .....<br>ب) اگر $f = \{(۱,۴), (۲,۳), (۵,-۱)\}$ و $g = \{(-۲,۲), (۰,۱), (۲,-۱)\}$ باشد حاصل $(fog)^{-۱}(۴)$ برابر است با .....<br>ت) شکل حاصل از دوران یک نیم دایره، حول شعاع عمود بر قطر آن یک ..... است. | ۰/۷۵ |
| ۳ | اگر دامنه تابع $y = f(x)$ برابر $(-۱,۲)$ و برد آن $[-۲,۳]$ باشد، دامنه و برد تابع $y = -۳f\left(\frac{x}{۲}\right) + ۱$ را بدست آورید. | ۰/۵ |
| ۴ | اگر $f(x) = \sqrt{x - ۲}$ و $g(x) = ۳x - ۲$ باشد، ضابطه و دامنه ی تابع $fog$ را با استفاده از تعریف بدست آورید. | ۱ |
| ۵ | ضابطه تابع مثلثاتی مربوط به نمودار زیر را بنویسید.<br> | ۱ |
| ۶ | نمودار تابع با ضابطه ی $y = \cos(x)$ و خط به معادله ی $y = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ در دستگاه زیر رسم شده است. طول نقاط برخورد آنها را بیابید.<br> | ۱ |
| ۷ | حاصل حدود زیر را بیابید.<br>الف) $\lim_{x \to \frac{۱}{۲}} \frac{[x]-۳}{\|۲x-۱\|}$<br>ب) $\lim_{x \to (-۱)} \frac{x^۲-۱}{x+\sqrt{۲x+۳}}$ | ۱/۷۵ |

ادامه سوالات در صفحه دوم

www-kanoon-ir

باسمه تعالی

| | | | |
|---|---|---|---|
| **سوالات آزمون شبه نهایی درس : ریاضی ۳** | **رشته : علوم تجربی** | **ساعت شروع : ۸ صبح** | **مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه** |
| **نام و نام خانوادگی :** | | **تاریخ: ۱۴۰۲ /۰ ۲/۱۳** | **تعداد صفحه: ۲ صفحه** |
| **دانش آموزان پایه دوازدهم در اردیبهشت ماه سال ۱۴۰۲** | | **اداره کل آموزش و پرورش استان قزوین** | |

| ردیف | سوالات(استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است) | نمره |
|---|---|---|
| ۸ | نمودار تابع f به شکل زیر است، تساوی ها را کامل کنید.<br><br><br>الف) $\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \cdots$<br>ب) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \cdots$ | ۰/۵ |
| ۹ | معادله ی خط مماس بر منحنی $f(x) = -x^3 + 2x - 1$ را در نقطه ای به طول ۱ واقع بر منحنی بدست آورید. | ۱ |
| ۱۰ | در شکل زیر تابع خطی $f$ در نقطه $x = 2$ بر نمودار تابع $g$ مماس شده است. اگر $\lim_{x\to2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = 4$ باشد مقدار $f(1) + g(2) + g'(2)$ را محاسبه کنید.<br><br> | ۱/۲۵ |
| ۱۱ | مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \le 1 \\ 2x^3 & x > 1 \end{cases}$ را در نقطه ی $x = 1$ بررسی کنید. | ۱/۵ |
| ۱۲ | مشتق توابع زیر را بدست آورید. ( ساده کردن مشتق الزامی نیست)<br>الف) $g(x) = (x^2 + 1)(3x - 5)x^3$<br>ب) $f(x) = \frac{2\sqrt{x}+3}{x+7}$ | ۱/۵ |
| ۱۳ | گنجایش بشکه ای ۶۰ لیتر آب است که در ته آن سوراخی تعبیه شده است. اگر حجم آب باقیمانده در بشکه از رابطه $V = 60(1 - \frac{t}{50})^2$ بدست آید:<br>الف) آهنگ تغییرمتوسط در بازه ی زمانی [۰,۳۰] چقدر است؟<br>ب) در چه زمانی آهنگ تغییرلحظه ای $L/S$ $\frac{-48}{25}$ است؟ | ۱ |
| ۱۴ | با تشکیل جدول تغییرات تابع $f(x) = x^3 - 3x$ مشخص کنید تابع در چه بازه هایی اکیدا صعودی و در کدام بازه ها اکیدا نزولی است؟ | ۱/۵ |
| ۱۵ | نقاط بحرانی تابع $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$ را در بازه [-۱,۳] بدست آورید. | ۱/۵ |
| ۱۶ | ورق فلزی مربع شکل به طول ضلع ۶۰ را در نظر بگیرید، میخواهیم از چهارگوشه ی آن مربع های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را کناربگذاریم سپس لبه ی جعبه رابه اندازه ی x برمی گردانیم تا یک جعبه ی در باز ساخته شود به طوری که حجم آن به صورت $V = (60 - 2x)^2 x$ است .<br>مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر شود؟ | ۱/۲۵ |
| ۱۷ | کانون های یک بیضی (۵-,۱) و (۱,۳) است، اگر $a = 6$ باشد :<br>الف) مرکز بیضی را بیابید.<br>ب) اندازه قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را بدست آورید. | ۱/۷۵ |
| | ریاضیات را باید به همه آموخت نه برای ریاضی دان شدن، بلکه برای خردمند شدن جمع نمره | ۲۰ |

www-kanoon-ir

نام خدا

پاسخ از : فریبرز فتح اللهی

| | | |
|---|---|---|
| ۱ | درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.<br>الف) تابع $y = ۲ + ۳x^۲(۱ - x)$ یک تابع چند جمله ای از درجه سوم است. ص<br>ب) تابع $f(x) = \|x - ۲\| + \|x - ۱\|$ روی بازه $[۱,+\infty)$ اکیدا صعودی است. غ<br>پ) اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد، آنگاه f در a مشتق پذیر است. غ<br>ت) باقیمانده تقسیم عبارت $۲x^۲ - ۶x - ۱$ بر $x - ۲$ برابر ۵ است. ص<br>ث) هرچه خروج از مرکز بیضی به یک نزدیکتر باشد، شکل بیضی کشیده تر است. ص | ۱/۲۵ |

| | | |
|---|---|---|
| ۲ | جا های خالی را با عبارت های مناسب کامل کنید.<br>الف) در تابع $f(x) = ۳x^۳ + ax^۲ + ۱۱$ داریم $f''(۱) = -۹$ ، مقدار $a$ برابر است با $\frac{-۲۷}{۲}$<br>ب) اگر $f = \{(۱,۴), (۲,۲), (۵,-۱)\}$ و $g = \{(-۲,۲), (۰,۱), (۲,-۱)\}$ باشد حاصل $(fog)^{-۱}(۴)$ برابر است با ۰<br>ت) شکل حاصل از دوران یک نیم دایره، حول شعاع عمود بر قطر آن یک نیمکره است. | ۰/۷۵ |

الف)

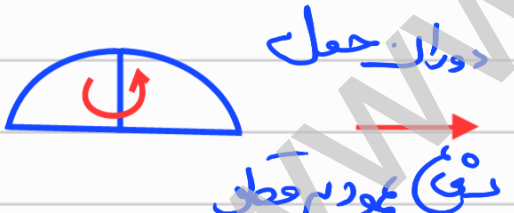
$$f'(x) = ۹x^۲ + ۲ax \rightarrow f''(x) = ۱۸x + ۲a$$

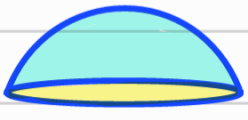
$$f''(۱) = -۹ \rightarrow -۹ = ۱۸ + ۲a \rightarrow a = \frac{-۲۷}{۲}$$

ب)

$$(fog)^{-۱}(۴) = (g^{-۱}of^{-۱})(۴) = g^{-۱}(f^{-۱}(۴)) = g^{-۱}(۱) = ۰$$

ت)



نیمکره

| | | |
|---|---|---|
| ۳ | اگر دامنه تابع $y = f(x)$ برابر $(-۱,۲)$ و برد آن $[-۲,۳]$ باشد، دامنه و برد تابع $y = -۳f\left(\frac{x}{۲}\right) + ۱$ را بدست آورید. | ۰/۵ |

دامنه $D_f = (-۱, ۲)$ $\xrightarrow{\text{در } f\left(\frac{x}{۲}\right) \text{ طول نقاط } ۲ \text{ برابر میشود}}$ $D_g = (-۲, ۴)$

برد $R_f = [-۲, ۳] \rightarrow R_{f\left(\frac{x}{۲}\right)} = [-۲, ۳] \rightarrow R_{-۳f\left(\frac{x}{۲}\right)} = [-۹, ۶]$

$$R_{-۳f\left(\frac{x}{۲}\right)+۱} = [-۸, ۷]$$

www.kanoon.ir

| | | |
|---|---|---|
| ۴ | اگر $f(x)=\sqrt{x-۲}$ و $g(x)=۳x-۲$ باشد، ضابطه و دامنه ی تابع $fog$ را با استفاده از تعریف بدست آورید. | ۱ |

$D_f: x\geq ۲$ $\qquad D_f=\mathbb{R}$

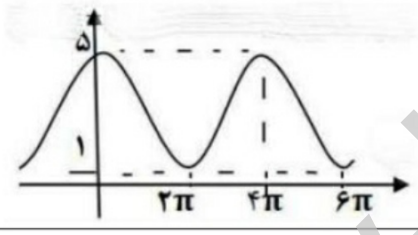
$fog = f(g(x)) = \sqrt{g(x)-۲} = \sqrt{۳x-۲-۲} = \sqrt{۳x-۴}$

$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R} \mid \underbrace{۳x-۲\in x\geq ۲}_{B}\}$

$B: ۳x-۲\geq ۲ \rightarrow ۳x\geq ۴ \rightarrow x\geq \frac{۴}{۳}$

$D_{fog} = A\cap B = \mathbb{R}\cap[\frac{۴}{۳},+\infty) = [\frac{۴}{۳},+\infty)$

| | | |
|---|---|---|
| ۵ | ضابطه تابع مثلثاتی مربوط به نمودار زیر را بنویسید. | ۱ |




خط میانی در محور افقی این نمودار $y=۳$ است. ضابطه به صورت $y=a\cos bx+c$ می‌باشد.

$c=\frac{max+min}{۲}=\frac{۵+۱}{۲}=۳ \rightarrow c=۳$

$|a|=\frac{max-min}{۲}=\frac{۵-۱}{۲}=۲ \xrightarrow[a>۰]{\text{قله رو به بالا}} a=۲$

$T=\frac{۲\pi}{|b|}=۴\pi \rightarrow |b|=\frac{۱}{۲} \rightarrow b=\pm\frac{۱}{۲}$

$b$ هر دو مقدار می‌تواند باشد.

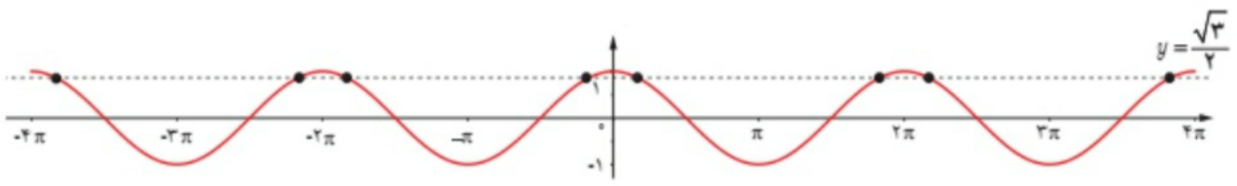
$$y=۲\cos(\frac{x}{۲})+۳$$

ب)

$$y=۲\cos(-\frac{x}{۲})+۳$$

www.kanoon.ir

۶ نمودار تابع با ضابطه ی $y=\cos(x)$ و خط به معادله ی $y=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ در دستگاه زیر رسم شده است. طول نقاط برخورد آنها را بیابید. ۱




$$\cos x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\cos\frac{\pi}{۶}\rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۶}$$

$k=۰\rightarrow x=\pm\frac{\pi}{۶}$

$k=۱\rightarrow x=۲\pi\pm\frac{\pi}{۶}=\frac{۱۳\pi}{۶},\frac{۱۱\pi}{۶}$

$k=۲\rightarrow x=۴\pi-\frac{\pi}{۶}=\frac{۲۳\pi}{۶}$

$k=-۱\rightarrow x=-۲\pi\pm\frac{\pi}{۶}=\frac{-۱۳\pi}{۶},\frac{-۱۱\pi}{۶}$

$k=-۲\rightarrow x=-۴\pi+\frac{\pi}{۶}=\frac{-۲۳\pi}{۶}$

۷ حاصل حدود زیر را بیابید. ۱/۷۵

الف) $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{[x]-۳}{|۲x-۱|}$

ب) $\lim\limits_{x\to(-۱)}\frac{x^۲-۱}{x+\sqrt{۲x+۳}}$

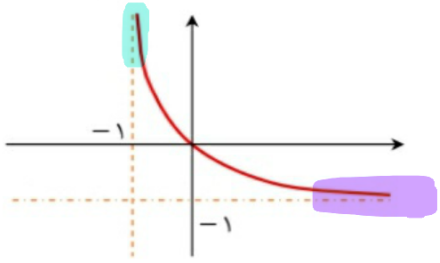
الف) $\lim\limits_{x\to(\frac{۱}{۲})^+}\frac{[\frac{۱}{۲}^+]-۳}{۲x-۱}=\lim\limits_{x\to(\frac{۱}{۲})^+}\frac{-۳}{۲x-۱}=\frac{-۳}{۰^+}=-\infty$

ب) $\lim\frac{۱-۱}{-۱+۱}=\frac{۰}{۰}$ مبهم $\rightarrow\lim\limits_{x\to(-۱)}\frac{(x^۲-۱)(x-\sqrt{۲x+۳})}{(x+\sqrt{۲x+۳})(x-\sqrt{۲x+۳})}$

$=\lim\limits_{x\to(-۱)}\frac{(x-۱)(x+۱)(x-\sqrt{۲x+۳})}{x^۲-۲x-۳=(x+۱)(x-۳)}=\lim\limits_{x\to(-۱)}\frac{(x-۱)(x-\sqrt{۲x+۳})}{x-۳}$

$=\frac{(-۱-۱)(-۱-\sqrt{-۲+۳})}{-۱-۳}=\frac{-۲(-۲)}{-۴}=-۱$

www.kanoon.ir

| | | |
|---|---|---|
| ۸ | نمودار تابع f به شکل زیر است، تساوی ها را کامل کنید.<br><br><br>الف) $\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \cdots$ $+\infty$<br>ب) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \cdots$ $-1$ | ۰/۵ |

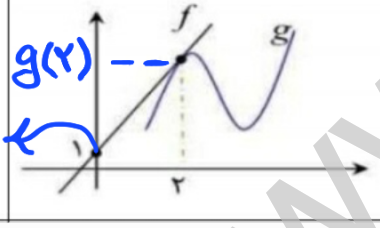
| | | |
|---|---|---|
| ۹ | معادله ی خط مماس بر منحنی $f(x) = -x^3 + 2x - 1$ را در نقطه ای به طول ۱ واقع بر منحنی بدست آورید. | ۱ |

$f(1) = -1+2-1 = 0 \longrightarrow$ نقطه ی تماس $A(1,0)$

$f'(x) = -3x^2+2 \longrightarrow$ شیب خط مماس $= m = f'(1) = -1$

معادله خط مماس : $y - y_A = m(x - x_A)$

$y - 0 = -(x-1) \longrightarrow y = -x+1$

| | | |
|---|---|---|
| ۱۰ | در شکل زیر تابع خطی $f$ در نقطه $x=2$ بر نمودار تابع $g$ مماس شده است. اگر $\lim_{x\to2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = 4$ باشد<br>مقدار $f(1) + g(2) + g'(2)$ را محاسبه کنید.<br><br> | ۱/۲۵ |

$B(2, g(2))$

$A(0,1)$

$\lim_{x\to2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = g'(2) = 4 = \frac{g(2) - y_A}{x_B - x_A} =$ شیب خط

$4 = \frac{g(2) - 1}{2 - 0} \longrightarrow g(2) - 1 = 8 \longrightarrow g(2) = 9$

$f(x) = mx + b \xrightarrow[A(0,1)]{m = g'(2) = 4} f(x) = 4x + 1$

$f(1) + g(2) + g'(2) = 5 + 9 + 4 = 18$

www.karnoon.ir

| | | |
|---|---|---|
| ۱۱ | مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}x^2+2 & x\le 1\\ 2x^3 & x>1\end{cases}$ را در نقطه ی $x=1$ بررسی کنید. | ۱/۵ |

بررسی پیوستگی:

$\lim_{x\to(1)^+} 2x^3 = 2(1)^3 = 2$

$\lim_{x\to(1)^-} x^2+2 = (1)^2+2 = 3$

حدراست ≠ حدچپ ⟵

تابع $f(x)$ در $x=1$ حدندارد. بنابراین در این نقطه ناپیوسته و مشتق ناپذیر است.

| | | |
|---|---|---|
| ۱۲ | مشتق توابع زیر را بدست آورید. ( ساده کردن مشتق الزامی نیست)<br>الف) $g(x)=(x^2+1)(3x-5)x^2$ ب) $f(x)=\frac{2\sqrt{x}+3}{x+7}$ | ۱/۵ |

الف) $g(x)=(x^2+1)(3x^3-5x^2)$

$g'(x)=2x(3x^3-5x^2)+(x^2+1)(9x^2-10x)$

ب) $f'(x)=\dfrac{(\frac{1}{\sqrt{x}})(x+7)-(2\sqrt{x}+3)}{(x+7)^2}$

| | | |
|---|---|---|
| ۱۳ | گنجایش بشکه ای ۶۰ لیتر آب است که در ته آن سوراخی تعبیه شده است. اگر حجم آب باقیمانده در بشکه از رابطه $V=60(1-\frac{t}{50})^2$ بدست آید:<br>الف) آهنگ تغییرمتوسط در بازه ی زمانی $[0,30]$ چقدر است؟<br>ب) در چه زمانی آهنگ تغییرلحظه ای $\frac{-48}{28}L/S$ است؟ | ۱ |

$V(0)=60$ و $V(30)=60(1-\frac{3}{5})^2=60(\frac{2}{5})=\frac{48}{5}$

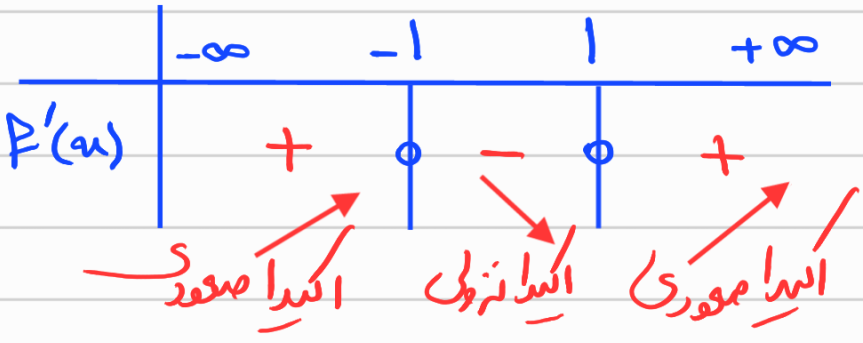
الف) $\dfrac{V(30)-V(0)}{30-0}=\dfrac{\frac{48}{5}-60}{30}=\dfrac{-252}{30}$

ب) $V'=60\times 2(1-\frac{t}{50})(\frac{-1}{50})=\frac{-48}{25}$ ⟵ $t=15S$

www-kanoon-ir

| ۱۴ | با تشکیل جدول تغییرات تابع $f(x)=x^3-3x$ مشخص کنید تابع در چه بازه هایی اکیدا صعودی و در کدام بازه ها اکیدا نزولی است؟ | ۱/۵ |
|---|---|---|

$f'(x)=3x^2-3=0 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=\pm 1$




اکیدا صعودی : $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

اکیدا نزولی : $(-1,1)$

| ۱۵ | نقاط بحرانی تابع $f(x)=x^4-4x^2+2$ را در بازه $[-1,3]$ بدست آورید. | ۱/۵ |
|---|---|---|

$f'(x)=4x^3-8x=0 \rightarrow 4x(x^2-2)=0$

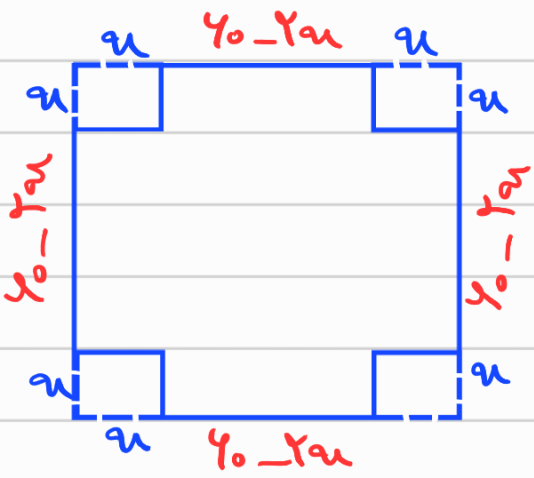
$\rightarrow \begin{cases} x=0 \ \checkmark \\ x^2-2=0 \rightarrow x^2=2 \rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2} \ \checkmark \\ x=-\sqrt{2} \ \times \notin [-1,3] \end{cases} \end{cases}$

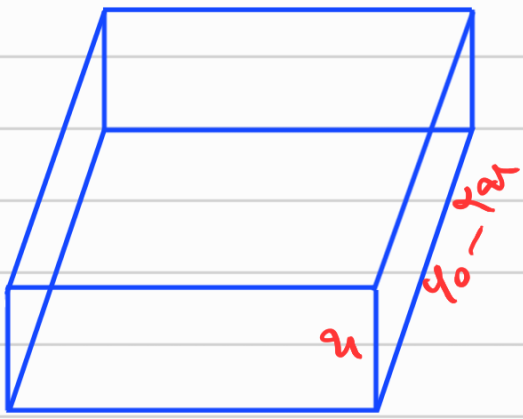
ابتدا و انتهای بازه هم جزو نقاط بحرانی هستند.

نقاط بحرانی : $\{-1, 0, \sqrt{2}, 3\}$

www-kanoon-ir

| | | |
|---|---|---|
| ۱۶ | ورق فلزی مربع شکل به طول ضلع ۶۰ را در نظر بگیرید، میخواهیم از چهارگوشه ی آن مربع های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را کناربگذاریم سپس لبه ی جعبه رابه اندازه ی x برمی گردانیم تا یک جعبه ی در باز ساخته شود به طوری که حجم آن به صورت $V = (60 - 2x)^2 x$ است . مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر شود؟ | ۱/۲۵ |




$۶۰-۲x>۰ \rightarrow ۲x<۶۰ \rightarrow x<۳۰$

$حجم = طول \times عرض \times ارتفاع = x(۶۰-۲x)^۲$

$V' = ۲(۶۰-۲x)(-۲)x + (۶۰-۲x)^۲ = ۰$

$(۶۰-۲x)(-۴x+۶۰-۲x) = ۰ \rightarrow (۶۰-۲x)(۶۰-۶x) = ۰$

$\rightarrow \begin{cases} ۶۰-۲x=۰ \rightarrow x=۳۰ \text{ غ ق ق} \\ ۶۰-۶x=۰ \rightarrow x=۱۰ \text{ ق ق} \end{cases}$

fathollahi_math

آدرس: ۱۰ سانتی‌گرام