## ریاضی ۳ (پایهٔ دوازدهم رشتهٔ تجربی)

**۱** الف) صحیح $f'(x)=-۲x+۲\xrightarrow{x\le ۰} f'(x)>۰$

ب) غلط (با توجه به تعریف نسبت‌های مثلثاتی در ربع اول)

پ) غلط (مانند تابع $f$ با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ در $x=۰$)

ت) صحیح (با توجه به خواص توابع پیوسته)

**۲** الف) ۱- تابع باید ثابت باشد لذا:

$f(x)=x^۲(۱+b)-۲ax+a^۲+۴$

$\to ۱+b=۰\ ,\ -۲a=۰\to a+b=-۱$

ب) اکیداً صعودی

پ) ۱۹-

$x-۲=۰\Rightarrow x=۲\Rightarrow f(۸)=۰\Rightarrow ۳\times ۸+m-۵=۰$

$\to m=-۱۹$

ت) سطح مقطع

**۳** الف) گزینهٔ ۳

$y=۶\sqrt{x}-۲\to y=\sqrt{-x}-۲=x\to x=-۱$

ب) گزینهٔ ۱

$\underbrace{(\cos^۲x+\sin^۲x)}_{۱}.(\cos^۲x-\sin^۲x)$

$=\frac{۱+\cos ۲x}{۲}-\frac{۱-\cos ۲x}{۲}=\cos ۲x=\cos ۲\times ۱۵^\circ$

$=\cos ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

پ) گزینهٔ ۲

ت) گزینهٔ ۴ $(۴\sqrt{f})'(۳)=۴\frac{f'(۳)}{۲\sqrt{f(۳)}}=۴\times\frac{۱}{۲\times ۳}=\frac{۲}{۳}$

ث) گزینهٔ ۱

**۴**

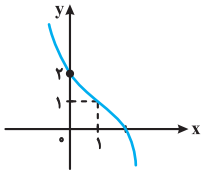
$y=-(x^۳-۳x^۲+۳x-۱)+۱$

$\to y=-(x-۱)^۳+۱$

$\to y-۱=-(x-۱)^۳$

$\to \sqrt[۳]{y-۱}=-(x-۱)\to \sqrt[۳]{۱-y}=x-۱$

$\to x=\sqrt[۳]{۱-y}+۱\to f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{۱-x}+۱$




**۵**

$D_{fog}=\{x\in D_g\,|\,g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}\,|\,۳x^۲-۱\in[۲,+\infty)\}$

$=\{x\in\mathbb{R}\,|\,۳x^۲-۱\ge ۲\}=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^۲\ge ۱\}=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x|\ge ۱\}$

$=(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$

**۶** الف) $۲(۲\sin ۲x\cos ۲x)=۱\to ۲\sin ۴x=۱$

$\to \sin ۴x=\frac{۱}{۲}=\sin\frac{\pi}{۶}$

$\to\begin{cases}۴x=۲K\pi+\frac{\pi}{۶}\to x=\frac{K\pi}{۲}+\frac{\pi}{۲۴}\\ ۴x=۲K\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}\to x=\frac{K\pi}{۲}+\frac{۵\pi}{۲۴}\end{cases}$

ب) $۲\cos^۲x-۱=-\cos\frac{\pi}{۴}\to\cos ۲x=-\cos\frac{\pi}{۴}$

$=\cos(\pi-\frac{\pi}{۴})=\cos\frac{۳\pi}{۴}\to ۲x=۲K\pi\pm\frac{۳\pi}{۴}$

$\to x=K\pi\pm\frac{۳\pi}{۸}$

**۷** الف) $+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} fof(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=-\infty$

**۸** الف) $\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{۳x^۲-x-۲}{\underbrace{|(x-۱)(x-۲)|}_{\text{عبارت منفی است}}}=\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{۳x^۲-x-۲}{-(x-۱)(x-۲)}$

$=\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{\cancel{(x-۱)}(۳x+۲)}{-\cancel{(x-۱)}(x-۲)}=\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{۳x+۲}{۲-x}=۵$

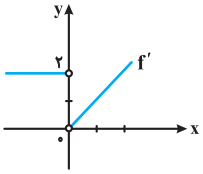
ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۳x+۱}{x-۵}-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۲}{x}=۳-۰=۳$

**۹** الف) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=f'(۱)=d$ شیب خط مماس

$=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{۳-۱}{۱-۰}=۲$

ب) $m_B>m_A$

**۱۰**




$f'(x)=\begin{cases}۲ & x<۰\\ ۲x & x>۰\end{cases}$

**۱۱**

الف) $f'(x)=\frac{(۶x+\frac{۴}{۲\sqrt{x}})(x^۳-۲x)-(۳x^۲-۲)(۳x^۲+۴\sqrt{x})}{(x^۳-۲x)^۲}$

ب) $g'(x)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}(x^۲-۱)^۳+۳(x^۲-۱)^۲\times ۲x\times\sqrt[۳]{x}$

**۱۲** آهنگ متوسط $=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(۱/۴۴)-f(۱/۲۱)}{۱/۴۴-۱/۲۱}$

$=\frac{\sqrt{۱/۴۴}-\sqrt{۱/۲۱}}{۰/۲۳}=\frac{۱/۲-۱/۱}{۰/۲۳}=\frac{۱۰}{۲۳}$

آهنگ آنی $=f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\xrightarrow{x=۱/۲۱}$

$f'(۱/۲۱)=\frac{۱}{۲\times ۱/۱}=\frac{۱۰}{۲۲}=\frac{۵}{۱۱}$

اختلاف $=\frac{۵}{۱۱}-\frac{۱۰}{۲۳}=\frac{۵}{۲۵۳}$

**۱۳** الف) چون نقطهٔ $(۲,۱)$، نقطهٔ اکسترمم نسبی $f$ است لذا:

$f(۲)=۱\ ,\ f'(۲)=۰$

$\to ۸+۴a+b=۱\to ۴a+b=-۷$ (۱)

$f'(x)=۳x^۲+۲ax\xrightarrow{x=۲}۱۲+۴a=۰$

$\to a=-۳\xrightarrow{(۱)}b=۵$

ب)

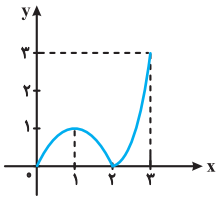
$f(x)=\begin{cases}x^۲-۲x\ ,\ x\ge ۲\\ -x^۲+۲x\ ,\ x<۲\end{cases}$

ماکزیمم مطلق $\xrightarrow{x=۳}A\left|\begin{matrix}۳\\ ۳\end{matrix}\right.$

ماکزیمم نسبی $\xrightarrow{x=۱}B\left|\begin{matrix}۱\\ ۱\end{matrix}\right.$

می‌نیمم مطلق $\xrightarrow{x=۰}C\left|\begin{matrix}۰\\ ۰\end{matrix}\right.,D\left|\begin{matrix}۲\\ ۰\end{matrix}\right.$

می‌نیمم نسبی $\xrightarrow{x=۲}D\left|\begin{matrix}۲\\ ۰\end{matrix}\right.$




**۱۴** چون قوطی در باز است فقط برای سطح جانبی و سطح قاعدهٔ آن قرار است فلز به کار رود. لذا:

$S=\text{سطح جانبی}+\text{سطح قاعده}=\pi r^۲+۲\pi rh$ (۱)

$V=\pi r^۲h\to ۲۷\pi=\pi r^۲h\to r^۲h=۲۷\to h=\frac{۲۷}{r^۲}$ (۲)

$(۱),(۲)\to S=\pi r^۲+۲\pi r\left(\frac{۲۷}{r^۲}\right)=\pi r^۲+\frac{۵۴\pi}{r}$

$\to S'=۲\pi r-\frac{۵۴\pi}{r^۲}=۰\to ۲\pi r=\frac{۵۴\pi}{r^۲}\to ۲\pi r^۳=۵۴\pi$

$\to r=۳\xrightarrow{(۲)}h=۳$

**۱۵** از دوران لوزی حول قطر بزرگ یا قطر کوچک، دو مخروط ایجاد می‌شود که قاعده‌های آن‌ها به هم چسبیده‌اند. لذا:

$\frac{V_۱}{V_۲}=\frac{۲\left(\frac{۱}{۳}\pi(۳)^۲(۵)\right)}{۲\left(\frac{۱}{۳}\pi(۵)^۲(۳)\right)}=\frac{۳}{۵}$

**۱۶** $۲c=|FF'|=\sqrt{(-۱+۳)^۲+(۱-۱)^۲}=\sqrt{۴}=۲\to c=۱$

$e=\frac{c}{a}\to\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{۱}{a}\to a=\frac{۳}{\sqrt{۳}}=\sqrt{۳}$

$a^۲=b^۲+c^۲\to(\sqrt{۳})^۲=b^۲+(۱)^۲\to b^۲=۲\to b=\sqrt{۲}$

قطر کوچک $=۲b=۲\sqrt{۲}$ و قطر بزرگ $=۲a=۲\sqrt{۳}$

**۱۷** الف) $O(-۱,۰)\ ,\ R=۲$

ب) $(x+۱)^۲+y^۲=۴\to(x+۱)^۲=۴\to x+۱=\pm ۲$

$\to\begin{cases}x+۱=۲ & \to x=۱ & A(۱,۰)\\ x+۱=-۲ & \to x=-۳ & B(-۳,۰)\end{cases}$

**۱۸**

مرد $\nearrow\frac{۴۰}{۱۰۰}\to\frac{۳}{۱۰۰}$

زن $\searrow\frac{۶۰}{۱۰۰}\to\frac{۵}{۱۰۰}$

$\to P(A)=\frac{۴۰}{۱۰۰}\times\frac{۳}{۱۰۰}+\frac{۶۰}{۱۰۰}\times\frac{۵}{۱۰۰}$

$=\frac{۴۲}{۱۰۰۰}=۰/۰۴۲$

www.kanoon.ir

## ریاضی ۳ (پایهٔ دوازدهم رشتهٔ تجربی)

بیت‌الله رضاپور و محمدعلی فریبرزی عراقی

۱| کدام‌یک از جملات زیر صحیح و کدام غلط است؟

الف) تابع $f$ با ضابطهٔ $f(x)=-x^2+2x$ در بازهٔ $(-\infty,0]$ اکیداً صعودی است.

ب) اگر $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ آنگاه $\tan\alpha<\sin\alpha$

پ) اگر تابع $f$ در یک نقطه دارای خط مماس باشد آنگاه $f$ در آن نقطه مشتق‌پذیر است.

ت) هر تابع پیوسته بر یک بازهٔ بسته دارای اکسترمم‌های مطلق است.

۲| در جاهای خالی مقدار یا عبارت مناسب قرار دهید:

الف) برای آنکه تابع $f$ با ضابطهٔ $f(x)=(x-a)^2+bx^2+4$ در دامنهٔ خود هم صعودی و هم نزولی باشد، حاصل $a+b$ برابر ..... خواهد شد.

ب) اگر در یک بازه از دامنهٔ تابع $f$، مقدار $f'$ موجود و مثبت باشد، آنگاه تابع $f$ درآن بازه ..... است.

پ) اگر $f(x)=3x+m-5$ و $f(x^2+4)$ بر $x-2$ بخش‌پذیر باشد، مقدار $m$ برابر ..... است.

ت) شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود ..... آن نامیده می‌شود.

۳| گزینهٔ صحیح را در سؤالات زیر انتخاب کنید.

الف) نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{x}$ را دو واحد به سمت چپ برده و سپس نسبت به محور $x$ ها قرینه می‌کنیم. نمودار حاصل، نیمساز ربع اول و سوم را در چه طولی قطع می‌کند؟

۱) ۲ ۲) $-2$ ۳) $-1$ ۴) ۱

ب) حاصل عبارت $\cos^4 x-\sin^4 x$ به‌ازای $x=15^\circ$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{2}$

پ) اگر $f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$ و $g(x)=\tan(\frac{\pi}{x})$، حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}(gof)(x)$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) صفر ۴) ۱

ت) اگر $f$ تابعی مشتق‌پذیر باشد و $f(3)=9$ و $f'(3)=1$، مقدار $(4\sqrt{f})'(3)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{5}{6}$ ۴) $\frac{2}{3}$

ث) به‌ازای کدام مقادیر $m$، خط $2y=x+m$ دایره $x^2+y^2+2y+1=4+2x$ را در دو نقطه قطع می‌کند؟

۱) $-8<m<2$ ۲) $-2<m<8$

۳) $m>2$ یا $m<-8$ ۴) $m>8$ یا $m<-2$

۴| ابتدا نمودار تابع با ضابطهٔ $y-1=3x^2-3x+1-x^3$ را رسم کرده، سپس ضابطهٔ وارون آن را به‌دست آورید.

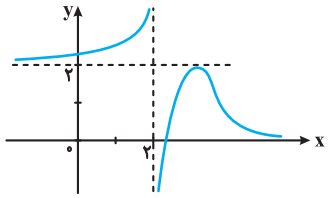
۵| اگر $f(x)=\sqrt{x-2}$ و $g(x)=3x^2-1$، دامنهٔ تابع $fog$ را با استفاده از تعریف به‌دست آورید.

۶| جواب معادلات مثلثاتی زیر را به‌دست آورید.

الف) $4\sin 2x\cos 2x=1$

ب) $2\cos^2 x=1-\cos 45^\circ$

۷| نمودار تابع $f$ به‌صورت شکل مقابل است. حدهای زیر را محاسبه کنید.




الف) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

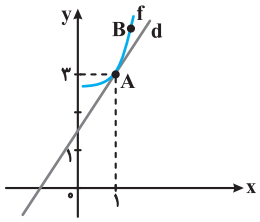
ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} fof(x)$

۸| هر یک از حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{3x^2-x-2}{|x^2-3x+2|}$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{3x+1}{x-5}-\frac{2}{x})$

۹| نمودار تابع $f$ به‌صورت مقابل رسم شده است. اگر خط $d$ در نقطهٔ $A$ بر نمودار مماس باشد:




الف) حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ را بیابید.

ب) کدام‌یک از شیب‌های خطوط مماس در نقاط $A$ و $B$ مقدار بیش‌تری دارد؟

۱۰| فرض کنید:

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & x<0\\ x^2-1 & x\geq 0\end{cases}$$

الف) ضابطهٔ تابع $f'$ را بنویسید.

ب) نمودار تابع $f'$ را رسم کنید.

۱۱| مشتق هر یک از توابع زیر را محاسبه کنید. (نیاز به ساده کردن نیست.)

الف) $f(x)=\frac{3x^2+4\sqrt{x}}{x^3-2x}$

ب) $g(x)=\sqrt[3]{x}(x^2-1)^3$

۱۲| در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر روی بازهٔ $[1/21,1/44]$ از آهنگ آنی در شروع این بازه چقدر کم‌تر است؟

۱۳| الف) ضریب $a$ و $b$ را طوری تعیین کنید که نقطهٔ $(2,1)$، نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f$ با ضابطهٔ $f(x)=x^3+ax^2+b$ باشد.

ب) نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی و مطلق تابع با ضابطهٔ $f(x)=x|x-2|$ را در بازهٔ $[0,3]$ مشخص کنید.

۱۴| می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل در باز بسازیم که گنجایش آن $27\pi$ مترمکعب باشد. ارتفاع قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به کار رفته در تولید آن می‌نیمم شود؟

۱۵| یک لوزی به قطرهای ۱۰ و ۶ سانتی‌متر را یکبار حول قطر بزرگ و یک بار حول قطر کوچک آن دوران می‌دهیم. نسبت حجم جسم حاصل را در حالت اول به حالت دوم پیدا کنید.

۱۶| اگر $F(-1,1)$ و $F'(-3,1)$ دو کانون بیضی با خروج از مرکز $\frac{\sqrt{3}}{3}$ باشد، طول قطرهای بزرگ و کوچک بیضی را بیابید.

۱۷| دایره به معادلهٔ: $(x+1)+y^2=4$ را در نظر بگیرید.

الف) مختصات مرکز دایره و اندازهٔ شعاع دایره را بیابید.

ب) مختصات تقاطع دایره با محور $x$ ها را پیدا کنید.

۱۸| فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۴۰٪ مرد و ۶۰٪ زن باشد و احتمال شیوع یک بیماری خاص در این جامعه به‌ترتیب ۳٪ و ۵٪ باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به این بیماری مبتلا است؟