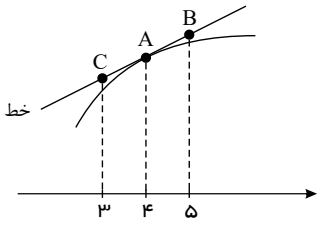
کد اجرا: نامشخص | تاریخ آزمون: ۱۴۰۲/۱۲/۰۷

نام و نام خانوادگی: | زمان برگزاری: ۳۰ دقیقه

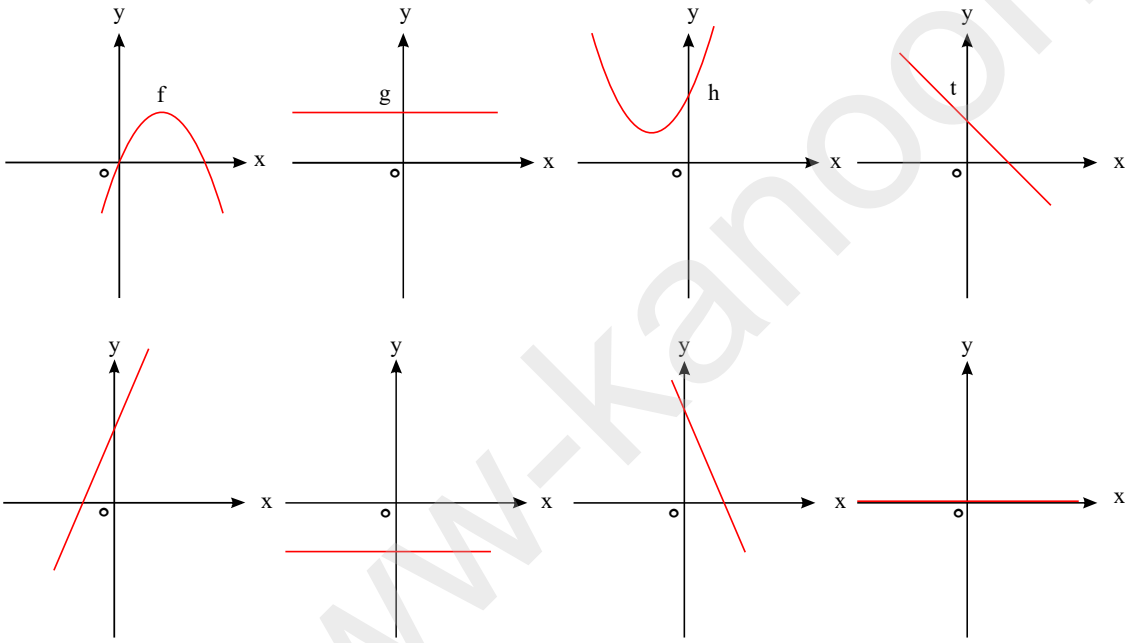
نام آزمون: سوالات میان نوبت ریاضی ۱۲ تجربی | دبیرستان دکتر حسابی

۱ - برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم $f'(۴) = ۱٫۵$ و $f(۴) = ۲۴$ با توجه به شکل، مختصات نقاط A، B و C را بیابید.



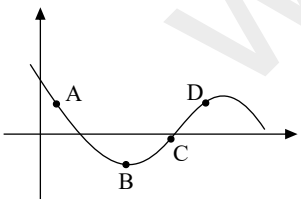
۲ - مشتق تابع $f(x) = x^۳ - ۲$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه‌ای به طول $x = -۱$ به دست آورید.

۳ - نمودار توابع f و g و h و t را به نمودار مشتق آن‌ها، نظیر کنید.



۴ - نقاط داده شده روی منحنی را با شیب‌های ارائه شده در جدول نظیر کنید.

شیب	۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	-۲
نقطه				



۵ -

مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

الف) $f(x) = (\frac{x^۲}{۳x - ۱})^۵$

ب) $g(x) = (\sqrt{۳x + ۲})(x^۳ + ۱)$

۶ - مشتق تابع $g(x) = \frac{۲x + ۱}{x + ۲}$ **را در نقطهٔ** -۱ **حساب کنید و به کمک آن معادلهٔ خط مماس بر نمودار این تابع را در نقطهٔ** $A(-۱, -۱)$ **بنویسید.**

www-kanoon.ir

۷ - تابع $f(x)=\begin{cases}۲x-۱ & x<۰\\ x^۲-۱ & x\geq ۰\end{cases}$ را در نظر بگیرید:

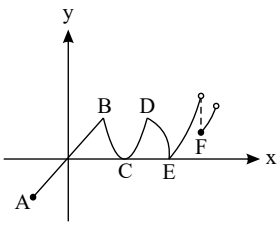
الف نشان دهید $f'(۰)$ وجود ندارد.

ب ضابطهٔ تابع مشتق را بنویسید.

پ نمودار تابع f' را رسم کنید.

۸ - معادلهٔ حرکت متحرکی به‌صورت $f(t)=۲t^۲-t$ ، برحسب متر داده شده است. در چه زمانی سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $[۰,۴]$ با هم برابرهستند؟

۹ - نقاط بحرانی و اکسترمم نسبی و مطلق را در نقاط مشخص‌شده شکل زیر تعیین کنید.



۱۰ - ورق فلزی مربع شکل به‌طول ضلع یک متر را در نظر بگیرید. می‌خواهیم از چهار گوشهٔ آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم. سپس لبهٔ جعبه را به اندازهٔ x برمی‌گردانیم تا یک جعبهٔ در باز ساخته شود. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر مقدار ممکن گردد؟

۱۱ - الف) جدول تغییرات تابع $f(x)=x^۳-۳x+۴$ را رسم کنید و نقاط اکسترمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

ب) اکسترمم‌های مطلق تابع $g(x)=x^۳+۲x-۵$ را در بازهٔ $[-۲,۱]$ در صورت وجود تعیین کنید.

۱۲ - ضرایب a و b را در تابع $f(x)=-x^۴+ax+b$ طوری تعیین کنید که در نقطهٔ $(۱,۲)$ ماکزیمم نسبی داشته باشد.

www-kanoon-ir

پاسخنامه تشریحی

۱ -

$$m_{AC} = ۱٫۵ \longrightarrow \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = ۱٫۵ \longrightarrow \frac{۲۴ - y_C}{۴ - ۳} = ۱٫۵$$

$$\longrightarrow ۲۴ - y_C = ۱٫۵ \longrightarrow y_C = ۲۲٫۵ \longrightarrow C \left| \begin{matrix} ۳ \\ ۲۲٫۵ \end{matrix} \right.$$

$$m_{AB} = ۱٫۵ \longrightarrow \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = ۱٫۵ \longrightarrow \frac{۲۴ - y_B}{۴ - ۵} = ۱٫۵$$

$$\longrightarrow ۲۴ - y_B = -۱٫۵ \longrightarrow y_B = ۲۵٫۵ \longrightarrow B \left| \begin{matrix} ۵ \\ ۲۵٫۵ \end{matrix} \right.$$

مختصات نقطهٔ A هم طبق صورت سؤال $A \left| \begin{matrix} ۴ \\ ۲۴ \end{matrix} \right.$ است.

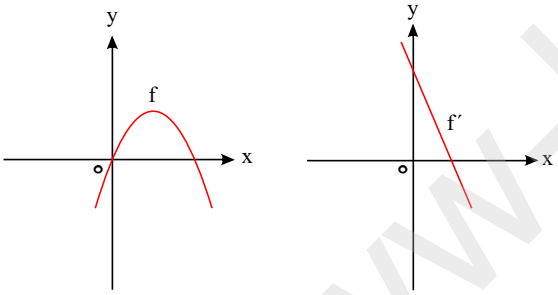
۲ -

$$\lim_{x \to x_۰} \frac{f(x) - f(x_۰)}{x - x_۰} = \lim_{x \to -۱} \frac{x^۳ - ۲ - f(-۱)}{x - (-۱)} = \lim_{x \to -۱} \frac{x^۳ - ۲ + ۳}{x + ۱} = \lim_{x \to -۱} \frac{x^۳ + ۱}{x + ۱}$$

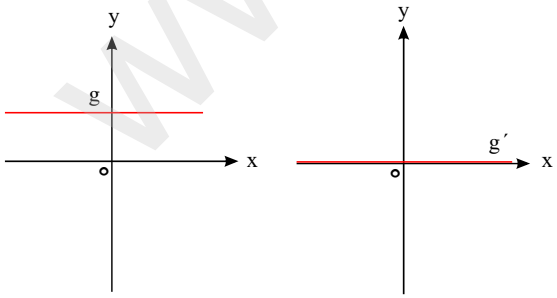
$$= \lim_{x \to -۱} \frac{(x + ۱)(x^۲ - x + ۱)}{x + ۱} = ۱ + ۱ + ۱ = ۳$$

۳ -

۱) شکل ابتدا صعودی و سپس نزولی است. آن قسمت از شکل که صعودی است در نمودار f' بالای محور xها و آن قسمت از شکل که نزولی است در نمودار f' پایین محور x است.

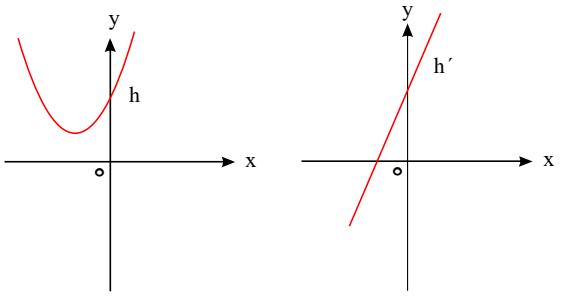


۲) g تابع ثابت است و مشتق آن صفر می‌شود. بنابراین نمودار g' روی محور xها است.

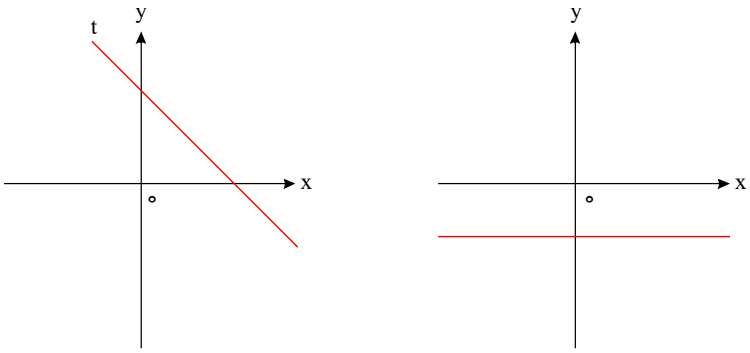


www-kanoon-ir

۳) شکل ابتدا نزولی و سپس صعودی است. آن قسمت از شکل که نزولی است در نمودار h' پایین محور xها و آن قسمت از شکل که صعودی است در نمودار h' بالای محور xها است.



۴) شکل یک تابع خطی با شیب منفی است پس مشتق آن یک عدد منفی است یعنی نمودار t' آن یک خط افقی پایین محور xها است.



۴ -

توجه کنید که $m_B = ۰$ است و $m_A < ۰$ و $m_C > m_D > ۰$ است.

شیب	۱	۰	$\frac{۱}{۲}$	-۲
نقطه	C	B	D	A

۵ - الف)

$$f(x) = (\frac{x^۲}{۳x-۱})^۵ \rightarrow f'(x) = ۵(\frac{x^۲}{۳x-۱})^۴ (\frac{۲x(۳x-۱) - ۳x^۲}{(۳x-۱)^۲})$$

ب)

$$g(x) = (\sqrt{۳x+۲})(x^۳+۱) \rightarrow g'(x) = \frac{۱(۳)}{۲\sqrt{۳x+۲}}(x^۳+۱) + ۳x^۲(\sqrt{۳x+۲})$$

۶ -

$$f(x) = \frac{۲x+۱}{x+۲} \quad و \quad x_۰ = -۱$$

شیب خط مماس :
$$\lim_{x\to -۱} \frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱} = \lim_{x\to -۱} \frac{\frac{۲x+۱}{x+۲}+۱}{x+۱} = \lim_{x\to -۱} \frac{۲x+۱+x+۲}{x+۲} = \lim_{x\to -۱} \frac{۳\cancel{(x+۱)}}{\frac{x+۲}{\cancel{x+۱}}} = \lim_{x\to -۱} \frac{۳}{x+۲}$$

معادلهٔ خط مماس :
$$y - y_۰ = m(x-x_۰) \Rightarrow y+۱ = ۳(x+۱) \Rightarrow y = ۳x+۲ = ۳$$

۷ -

در x=۰ مشتق‌های راست و چپ برابر نیستند (نقطهٔ گوشه)، بنابراین مشتق‌پذیر نیست.

الف

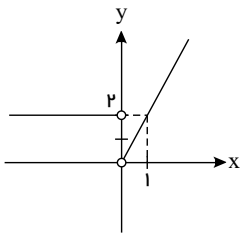
$$f'(۰^+) = ۲x = ۰ \quad f'(۰^-) = ۲ \rightarrow f'(۰^+) \neq f'(۰^-)$$

ب

$$f'(x) = \begin{cases} ۲ & x < ۰ \\ ۲x & x > ۰ \end{cases}$$

پ

www.kanoon.ir

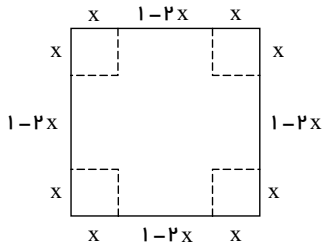


۸ -

$$\left.\begin{array}{l}\text{سرعت متوسط} = \dfrac{f(۴)-f(۰)}{۴-۰} = \dfrac{۲۸-۰}{۴} = ۷ \\ \text{سرعت لحظه‌ای} = f'(t) = ۴t-۱\end{array}\right\} \rightarrow ۴t-۱=۷ \rightarrow t=۲$$

۹ - نقطهٔ A، نقطهٔ بحرانی (ابتدای بازه) و مینیمم مطلق است. نقطهٔ B بحرانی و ماکزیمم نسبی است. نقطهٔ C بحرانی و مینیمم نسبی است. نقطهٔ D بحرانی و ماکزیمم نسبی است. نقطهٔ E بحرانی و مینیمم نسبی است. نقطهٔ F بحرانی و مینیمم نسبی است. تابع ماکزیمم مطلق ندارد.

۱۰ -



$$\rightarrow V_{\text{جعبه}} = \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع}$$

$$V = (۱-۲x)^۲ \cdot x = (۱+۴x^۲-۴x)x = ۴x^۳-۴x^۲+x$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}=۰} ۱۲x^۲-۸x+۱=۰ \xrightarrow{\Delta=b^۲-۴ac=۶۴-۴۸=۱۶} \begin{cases} x=\dfrac{۸+۴}{۲۴}=\dfrac{۱}{۲} \text{ غ ق ق} \\ x=\dfrac{۸-۴}{۲۴}=\dfrac{۱}{۶} \end{cases}$$

۱۱ - الف)

$$f(x)=x^۳-۳x+۴ \rightarrow f'(x)=۳x^۲-۳=۰ \rightarrow x=\pm ۱$$

$\rightarrow$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	۶	$\searrow$	۲	$\nearrow$	$+\infty$
			Max		Min		

ب)

$g'(x)=۳x^۲+۲=۰ \rightarrow x^۲=-\dfrac{۲}{۳}$ ریشهٔ حقیقی ندارد.

$$\rightarrow \begin{cases} g(-۲)=-۸-۴-۵=-۱۷ : \text{مطلق} Min \\ g(۱)=۱+۲-۵=-۲ : \text{مطلق} Max \end{cases}$$

۱۲ -

$$f'(x)=-۴x^۳+a \xrightarrow{f'(۱)=۰} -۴+a=۰ \Rightarrow a=۴$$

$$f(۱)=۲ \Rightarrow -۱+۴+b=۲ \Rightarrow b=-۱$$