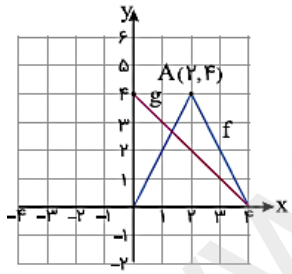
نام و نام خانوادگی: تاریخ امتحان :۱۴۰۴/۰۱/۳۰ نام دبیر : آقای جهانی گروه : ۱۲T۱	بسمه تعالی مدیریت آموزش و پرورش ناحیه ۲ شهری دبیرستان دخترانه غیر دولتی دکترحسابی (دوره دوم) میان نوبت دوم، سال تحصیلی ۱۴۰۴-۱۴۰۳ نام درس : ریاضی(۳) مدت زمان : ۶۰ دقیقه	دکتر حسابی شماره صندلی : صفحه ۱ از ۴

ردیف	سوالات	بارم
۱	نقاط $B(-1,2)$ و $B'(-1,-4)$ دو سر قطر کوچک یک بیضی با فاصله کانونی $2\sqrt{3}$ واحد است. طول قطر بزرگ بیضی را بیابید.	۱/۵
۲	دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۶ مهرهٔ سبز و ۴ مهرهٔ آبی و ظرف دوم شامل ۵ مهرهٔ سبز و ۷ مهرهٔ آبی است. از ظرف اول به تصادف یک مهره انتخاب کرده، در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. به چه احتمالی این مهره سبز است؟	۱/۵
۳	نمودار توابع f و g را در شکل زیر در نظر بگیرید.  اگر $k(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است $k'(۳)$.	۱/۵
۴	کشاورزی می‌خواهد دور یک مزرعه مستطیل شکل به مساحت ثابت ۱۰۰۰ مترمربع را دیوارکشی کند. هزینه هر متر دیوارهای شمالی و جنوبی ۲ میلیون تومان و هزینه هر متر دیوارهای شرقی و غربی ۸ میلیون تومان است. الف) هزینه موردنیاز برای انجام این کار را به‌صورت یک تابع بنویسید. ب) ابعاد مزرعه چقدر باشد تا هزینهٔ دیوارکشی به حداقل مقدار ممکن برسد؟	۲

www-kanoon-ir

۵	توپی از یک پل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می‌شود. $f(t)$ نشان‌دهندهٔ فاصله توپ از سطح زمین در زمان t است. برخی از مقادیر $f(t)$ در جدول زیر نمایش داده شده است.	۱/۵

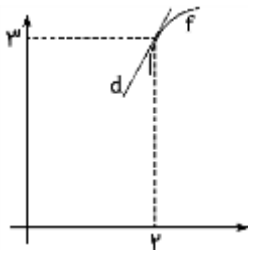
t ثانیه s	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
$f(t)$ متر m	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

براساس جدول، کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند سرعت توپ را هنگامی‌که در ارتفاع نظیر زمان ۰/۴ ثانیه است، نشان دهد؟

۱) $۱/۲۳\frac{m}{s}$
۲) $۱۴/۹۱\frac{m}{s}$
۳) $۱۱/۵\frac{m}{s}$
۴) $۱۶/۰۳\frac{m}{s}$

۶	اگر نقطهٔ $(۲,۱)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^۳ + bx^۲ + d$ باشد، مقادیر b و d را به دست آورید.	۱
۷	در یک جعبه ۵ ساعت دیواری از نوع A، ۲تا از نوع B و ۱۵تا از نوع C وجود دارد و احتمال اینکه عمر آن‌ها از ۱۰ سال بیشتر باشد، برای نوع A، $\frac{۴}{۵}$، برای نوع B، $\frac{۹}{۱۰}$ و برای نوع C، $\frac{۱}{۲}$ است. به تصادف یک ساعت از کارتن بیرون می‌آوریم. با چه احتمالی عمر این ساعت بیش از ۱۰ سال است؟	۱/۵
۸	مقدار m را چنان تعیین کنید که دایرهٔ به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ + ۲x - ۲y + m = ۰$، با دایرهٔ به مرکز $O(۲,-۳)$ و شعاع ۳، مماس بیرون باشد.	۱/۵

www.kanoon.ir

۹	مشتق تابع داده‌شده را به دست آورید. (ساده کردن مشتق، الزامی نیست.) $h(x) = \left(\frac{\sqrt{۱-۳x}}{۷+x}\right)^{۶}$	۱
۱۰	باتوجه‌به شکل، اگر $\lim_{x\to۲} \frac{۵f(x)-۱۵}{x-۲} = ۱۰$ باشد، معادلهٔ خط d را به دست آورید. 	۱
۱۱	نقاط اکسترمم نسبی و مطلق تابع $f(x) = x^{۳} - ۶x^{۲}$ را در بازهٔ $[-۱, ۳]$، در صورت وجود بیابید.	۲
۱۲	اگر $f(x) = \|x\|(x-۲)$ باشد، به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع f را در نقطهٔ $x = ۰$ بررسی کنید.	۱/۵
۱۳	اگر $f(۲) = ۷$ و $\lim_{x\to۲} \frac{f(x)-f(۲)}{۲x-۴} = ۵$ باشد، مشتق تابع $g(x) = xf(x)$ را در $x = ۲$ به دست آورید.	۱

www-kanoon-ir

۱۴	معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O(1,-1)$، مرکز آن بوده و روی خط به معادلهٔ $4x-3y=2$، وتری به طول ۶ جدا کند.	۱/۵

«موفق باشید»

www-kanoon-ir

بسمه تعالی مدیریت آموزش و پرورش ناحیه ۲ شهری دبیرستان دخترانه غیر دولتی دکتر حسابی (دوره دوم) میان نوبت دوم، سال تحصیلی ۱۴۰۴-۱۴۰۳	دکتر حسابی	نام و نام خانوادگی: تاریخ امتحان: ۱۴۰۴/۰۱/۳۰ نام دبیر: آقای جهانی گروه: ۱۲T۱
نام درس: ریاضی(۳) مدت زمان: ۶۰ دقیقه	شماره صندلی:	صفحه ۱ از ۴

ردیف	سوالات	بارم
۱	نقاط $B(-1,2)$ و $B'(-1,-4)$ دو سر قطر کوچک یک بیضی با فاصله کانونی $2\sqrt{3}$ واحد است. طول قطر بزرگ بیضی را بیابید.	۱/۵
۲	دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۶ مهرهٔ سبز و ۴ مهرهٔ آبی و ظرف دوم شامل ۵ مهرهٔ سبز و ۷ مهرهٔ آبی است. از ظرف اول به تصادف یک مهره انتخاب کرده، در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. به چه احتمالی این مهره سبز است؟	۱/۵
۳	نمودار توابع f و g را در شکل زیر در نظر بگیرید. اگر $k(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است $k'(3)$.	۱/۵
۴	کشاورزی می‌خواهد دور یک مزرعه مستطیل شکل به مساحت ثابت ۱۰۰۰ مترمربع را دیوارکشی کند. هزینه هر متر دیوارهای شمالی و جنوبی ۲ میلیون تومان و هزینه هر متر دیوارهای شرقی و غربی ۸ میلیون تومان است. الف) هزینه موردنیاز برای انجام این کار را به‌صورت یک تابع بنویسید. ب) ابعاد مزرعه چقدر باشد تا هزینهٔ دیوارکشی به حداقل مقدار ممکن برسد؟	۲

www.kanoon.ir

Scanned with CamScanner

مشترک تابع دا

۵ توپی از یک پل به ارتفاع ۱۱ متر به هوا پرتاب می‌شود. $f(t)$ نشان‌دهندهٔ فاصله توپ از سطح زمین در زمان t است. برخی از مقادیر $f(t)$ در جدول زیر نمایش داده شده است.

t ثانیه s	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶
$f(t)$ متر m	۱۱	۱۲/۴	۱۳/۸	۱۵/۱	۱۶/۳	۱۷/۴	۱۸/۴

براساس جدول، کدام‌یک از مقادیر زیر می‌تواند سرعت توپ را هنگامی‌که در ارتفاع نظیر زمان ۰/۴ ثانیه است، نشان دهد؟

۱) $1/23\frac{m}{s}$ ۲) $14/91\frac{m}{s}$ ۳) $11/5\frac{m}{s}$ ۴) $16/03\frac{m}{s}$

$f'(0/4) = \frac{12+11}{2} = 11/5$ (۰/۵)

سرعت متوسط در بازه $[0/3, 0/4]$: $\frac{f(0/4)-f(0/3)}{0/4-0/3} = \frac{16/4-15/1}{0/1} = \frac{1/2}{0/1} = 12$ (۰/۵)

سرعت متوسط در بازه $[0/4, 0/5]$: $\frac{f(0/5)-f(0/4)}{0/5-0/4} = \frac{17/4-16/3}{0/1} = \frac{1/1}{0/1} = 11$ (۰/۵)

۶ اگر نقطهٔ $(2, 1)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد، مقادیر b و d را به دست آورید. ۱

$f'(x) = 3x^2 + 2bx$ (۰/۲۵)

شرط دوم → ① $f(2) = 1$

② $f'(2) = 0 \longrightarrow 4(2)^2 + 2b(2) = 0$

$12 + 4b = 0 \longrightarrow 4b = -12$

$b = -3$ (۰/۵)

شرط ① $\longrightarrow 2^3 + 4b + d = 1 \xrightarrow{b=-3} d = 5$ (۰/۲۵)

۷ در یک جعبه ۵ ساعت دیواری از نوع A، ۲تا از نوع B و ۱۵تا از نوع C وجود دارد و احتمال اینکه عمر آن‌ها از ۱۰ سال بیشتر باشد، برای نوع A، $\frac{4}{5}$، برای نوع B، $\frac{9}{10}$ و برای نوع C، $\frac{1}{2}$ است. به تصادف یک ساعت از کارتن بیرون می‌آوریم. با چه احتمالی عمر این ساعت بیش از ۱۰ سال است؟ ۱/۵

نوع ساعت دیواری: A ← ۵، B ← ۲، C ← ۱۵، جمع $5+2+15=22$

عمر بیشتر از ۱۰ سال: A $\frac{4}{5}$، B $\frac{9}{10}$، C $\frac{1}{2}$

احتمال ساعت از کارتن: A $\frac{5}{22}$، B $\frac{2}{22}$، C $\frac{15}{22}$

$\left(\frac{5}{22}\times\frac{4}{5}\right) + \left(\frac{2}{22}\times\frac{9}{10}\right) + \left(\frac{15}{22}\times\frac{1}{2}\right) = \frac{143}{220}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

۱ نمره

۸ مقدار m را چنان تعیین کنید که دایرهٔ به معادلهٔ $x^2 + y^2 + 2x - 2y + m = 0$، با دایرهٔ به مرکز $O(2, -3)$ و شعاع ۳، مماس بیرون باشد. ۱/۵

دایره $O(2, -3)$، $r = 3$

$x^2 + y^2 + 2x - 2y + m = 0$

$O'\left(-\frac{2}{2}, -\frac{-2}{-2}\right) \rightarrow O'(-1, 1)$ (۰/۲۵)

$r' = \frac{1}{2}\sqrt{4+4-4(m)} = \frac{\sqrt{8-4m}}{2}$ (۰/۲۵)

$d = OO' = \sqrt{(-1-2)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{25} = 5$ (۰/۲۵)

مماس بیرون: $d = r + r'$

$5 = 3 + r'$ (۰/۲۵) $\rightarrow r' = 2$ (۰/۲۵)

$5 = 3 + \frac{\sqrt{8-4m}}{2} \rightarrow \frac{2}{1} = \frac{\sqrt{8-4m}}{2}$

$4 = \sqrt{8-4m} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 16 = 8 - 4m$

$8 = -4m \longrightarrow m = \frac{8}{-4} = -2$ (۰/۲۵)

www.kanoon.ir

Scanned with CamScanner

۱ — مشتق تابع داده‌شده را به دست آورید. (ساده کردن مشتق، الزامی نیست.)

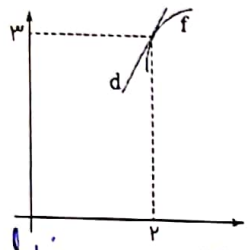
$$h(x)=\left(\frac{\sqrt{1-3x}}{7+x}\right)^{6}$$

$$h'(x)=6\left(\frac{\sqrt{1-3x}}{7+x}\right)^{5}\left(\frac{\frac{-3}{2\sqrt{1-3x}}(7+x)-(\sqrt{1-3x})(1)}{(7+x)^2}\right)$$

(۰/۲۵) (۰/۲۵) (۰/۵)

---

۱۰ — باتوجه‌به شکل، اگر $\lim_{x\to 2}\frac{5f(x)-15}{x-2}=10$ باشد، معادلهٔ خط d را به دست آورید.



$$5\times\left[\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right]=10 \qquad f(2)=3$$

(۰/۵) $\hookrightarrow f'(2)=2$

معادلهٔ خط d: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ (۰/۲۵) $\longrightarrow y-f(2)=f'(2)(x-2)\longrightarrow y-3=2(x-2)$ (۰/۲۵) $\longrightarrow y-3=2x-4\longrightarrow y=2x-1$

---

۱۱ — نقاط اکسترمم نسبی و مطلق تابع $f(x)=x^3-6x^2$ را در بازهٔ $[-1,3]$، در صورت وجود بیابید.

$f(x)=x^3-6x^2$

$f'(x)=3x^2-12x=0$ (۰/۲۵)

$3x(x-4)=0$ ← $x=0$ قبول (۰/۲۵) ، $x=4$ غیرقابل قبول (۰/۲۵)

$x=-1\longrightarrow f(-1)=-7$

$x=0\longrightarrow f(0)=0\longrightarrow$ ماکزیمم مطلق (۰/۲۵)

$x=3\longrightarrow f(3)=-27\longrightarrow$ مینیمم مطلق (۰/۲۵)

x	-1		0		3
علامت f'		$+$	0	$-$	
f	صعودی	↗	ماکزیمم نسبی	↘	

(۰/۵) (۰/۲۵)

۱/۵ — ۱۲ — اگر $f(x)=|x|(x-2)$ باشد، به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع f را در نقطهٔ $x=0$ بررسی کنید.

$f(x)=|x|(x-2)$

$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)\longrightarrow$ تابع در $x=0$ پیوسته است (۰/۲۵)

$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|(x-2)}{x}=-2$ (۰/۵)

$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x(x-2)}{x}=2$ (۰/۵)

مشتق چپ و راست وجود دارند اما با هم برابر نیستند ← تابع در $x=2$ مشتق‌پذیر نیست (۰/۲۵)

---

۱ — ۱۳ — اگر $f(2)=7$ و $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{2x-4}=5$ باشد، مشتق تابع $g(x)=xf(x)$ را در $x=2$ به دست آورید.

$\frac{1}{2}\times\left[\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right]=5$ (۰/۲۵) $\qquad f'(2)$

$\frac{1}{2}f'(2)=5\longrightarrow f'(2)=10$ (۰/۲۵)

$g(x)=xf(x)$

$g'(x)=(x)'f(x)+f'(x)\times x$ (۰/۲۵)

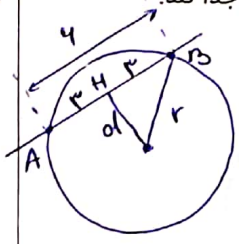
$g'(2)=1\,f(2)+f'(2)\times 2$

$=7+10\times 2=27$ (۰/۲۵)

www.kanoon.ir

Scanned with CamScanner

۱۴	معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O(1,-1)$، مرکز آن بوده و روی خط به معادلهٔ $4x-3y=2$، وتری به طول ۶ جدا کند.	۱/۵



وتر $AB=6$

$BH=3$

$3^2+1^2=r^2$

$10=r^2 \longrightarrow r=\sqrt{10}$ (۰/۲۵)

$d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (۰/۲۵)

معادله دایره $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ (۰/۲۵)

$d=\dfrac{|(4)(1)+(-3)(-1)-2|}{\sqrt{(4)^2+(-3)^2}}=\dfrac{5}{5}=1$ (۰/۵)

$(x-1)^2+(y+1)^2=10$ (۰/۲۵)

«موفق باشید»

Scanned with CamScanner