پاسخ دهنده: مریم مولی‌زادگان - محمدرضا شریف

باسمه تعالی	دبیرستان استعدادهای درخشان علامه طباطبایی (دوره ی اوّل)		خردادماه سال تحصیلی ۱۴۰۳- ۱۴۰۲
درس : ریاضی	پایه : هشتم	تاریخ امتحان: ۱۴۰۳/۰۳/۱۳	محل مهر امتحانات
نام و نام خانوادگی:		شماره صندلی:	
کلاس:		زمان پاسخگویی: ۹۰ دقیقه	تعداد صفحه: ۴ — تعداد سوال: ۱۶

هر کسی که توانسته است چیزی را بسازد، حتما نظم و انضباط داشته است

ردیف	سوالات	بارم
۱	**درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.** **الف)همه اعداد اول زوج نیستند.** ص ☐ غ ☑ **ب)همه اعداد صحیح معکوس دارند.** ص ☐ غ ☑ **ج)عدد** $3^{1001}+1$ **عدد مرکب است.** ص ☑ غ ☐ **د) عکس قضیه خطوط موازی برقرار است.** ص ☑ غ ☐	۱
۲	**پاسخ کوتاه دهید.** **الف) مجموع زوایای داخلی هر ستاره پنج پر برابر** ...۱۸۰ درجه... **است.** **ب) اگر فاصله مرکز دایره تا یک خط دو برابر شعاع دایره باشد خط و دایره** ...صفر... **نقطه مشترک دارند.** **ج) در غربال اعداد کوچکتر از ۱۰۰۰ اخرین عددی که خط می خورد** ...۹۶۱... **است.** **د)اگر p عددی اول باشد چند عدد طبیعی داریم که از p کوچکتر و نسبت به p اول باشد.** ...p-۱...	۱
۳	**گزینه صحیح هر سوال را انتخاب کنید.** **الف)حاصل** $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$ **برابر است با:** **۱)۲ ۲) ۲- ۳) ۱ ۴) هیچ کدام** **ب)خانواده ای سه فرزند دارد احتمال انکه فقط دو فرزند پسر باشند.** **۱)** $\frac{1}{8}$ **۲)** $\frac{3}{8}$ **۳)** $\frac{3}{4}$ **۴)۱** **ج)حاصل** $\frac{2^3+2^4+2^5+\cdots+2^{20}}{1+2+2^2+\cdots+2^{17}}$ **برابر است با:** **۱)۲ ۲)۴ ۳) ۸ ۴)۱۶**	۱/۵
۴	**حاصل را بیابید** $\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\frac{1}{7\times9}+\cdots+\frac{1}{49\times51}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{49}-\frac{1}{51}\right)$ $=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{51}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{51-3}{3\times51}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{48}{3\times51}=\frac{24}{3\times51}=\frac{8}{51}$ $\frac{-\frac{2}{3}+2\frac{3}{4}}{-1\frac{1}{5}-\frac{1}{10}}$ $\frac{-\frac{2}{3}+\frac{11}{4}}{-\frac{6}{5}-\frac{1}{10}}=\frac{\frac{-8+33}{12}}{\frac{-12-10}{10}}=-\frac{25}{12}\times\frac{10}{22}=-\frac{250}{12\times22}=-\frac{125}{132}$	۱/۵

www.kanoon.ir

$(\frac{1}{24})^7 = \frac{1}{13^7 \times 2^7} = \frac{2^7}{13^7 \times 2^{14}} = \frac{2^7 \times 13^5}{13^{12} \times 2^7}$

۱	الف)حاصل را ساده کنید. $\frac{38^2 \times 26^5 \times 11^7}{13^{12} \times 44^7 \times 19^2} = \frac{19^2 \times 2^2 \times 13^5 \times 2^5 \times 11^7}{13^{12} \times 11^7 \times 4^7 \times 19^2} = \frac{2^7 \times 13^5}{13^{12} \times 2^7} = \frac{2^7}{13^7 \times 2^{14}} = \frac{1}{13^7 \times 2^7} = (\frac{1}{26})^7$	
۵	ب)بزرگترین عدد طبیعی n را چنان بیابید که $5^{3000} > n^{2000}$ $(5^3)^{1000} > (n^2)^{1000} \xrightarrow{\text{طبیعی } n} 5^3 > n^2 \rightarrow n^2 < 125 \rightarrow n < \sqrt{125}$ می دانیم $11^2 = 121$ و $12^2 = 144$ پس n اعداد طبیعی کوچکتر و مساوی 11 است	
۶	الف)عبارت را تا حد امکان ساده کنید. $2(x+1)^2 - 2 - (x+1) = 2(x^2+2x+1) - 2 - x - 1 = 2x^2 + 4x + 2 - 2 - x - 1$ $= 2x^2 - 3x - 1$	۱/۵
	ب) معادله را حل کنید. $\frac{1-2x}{3} - \frac{x+1}{2} = \frac{1}{3}$ $\frac{2(1-2x)}{6} - \frac{3(x+1)}{6} = \frac{2}{6}$ $\rightarrow 2 - 4x - 3x - 3 = 2 \rightarrow -7x = 3 \rightarrow x = -\frac{3}{7}$	
	ج) تجزیه کنید. $(x+2)^2 - 3(x+2) = (x+2)(x+2-3) = (x+2)(x-1)$	
۷	الف)معادله برداری زیر را حل کنید. $4\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{X} = -3\vec{j} \rightarrow \begin{bmatrix}4\\-2\end{bmatrix} + 3x = \begin{bmatrix}0\\-3\end{bmatrix}$ $3x = \begin{bmatrix}0\\-3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-4\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\-1\end{bmatrix} \rightarrow x = \begin{bmatrix}-4/3\\-1/3\end{bmatrix} = -\frac{4}{3}\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j}$	۱/۵
	ب) بایک شکل دلخواه بردار $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ را نشان دهید.	
۸	الف) ساده کنید. $7\sqrt{27} + 2\sqrt{75} = 7\sqrt{9 \times 3} + 2\sqrt{25 \times 3} = 7 \times 3\sqrt{3} + 2 \times 5\sqrt{3} = 31\sqrt{3}$	۱
	ب)بین $\sqrt{47}$ و $1 + \sqrt{27}$ چند عدد طبیعی وجود دارد. $\sqrt{47}$ به ۷ نزدیک بوده و $\sqrt{27}$ هم به ۵ پس در واقع اعداد طبیعی بین دو عدد ۷ و ۵+۱ است که عدد طبیعی وجود دارد.	
۹	دو مثلث متساوی الاضلاع به ضلع های ۳ و ۵ طوری روی هم قرار گرفته اند که هر ضلع مثلث اول با یکی از اضلاع مثلث دوم موازی است محیط شش ظلعی هاشور زده را بیابید. محیط شش ضلعی $= 3 + 5 = 8$ با استفاده از تشابه مثلث ها می فهمیم مثلث های کوچک متساوی الاضلاع هستند پس اضلاع شش ضلعی داده شده با هم برابر هستند و محیط شش ضلعی برابر است با دو ضلع مثلث بزرگ و کوچک است.	۰/۵
۱۰	الف) تاسی را دو بار پرتاب می کنیم احتمال انکه حد اقل یکبار ۶ بیاید. تاس را دو بار پرتاب می کنیم پس کل حالات $6 \times 6 = 36$ است حالات مطلوب هم ۶ تا است پس احتمال آن $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ است.	۱/۵
	ب)با ۵ رنگ مختلف چند پرچم سه رنگی با رنگهای متمایز می توان درست کرد. رنگ ها را از ۱ تا ۵ شماره گذاری میکنیم. فرض می کنیم ۱ رنگ اول باشد، حالت ها به صورت زیر است: وقتی رنگ ۱ عدد اول باشد ۱ < ۲ ۳ ۴ ، ۱ < ۳ ۲ ۴ ، ۱ < ۴ ۲ ۳ ، ۱ < ۳ ۴ ۵ ، ۱ < ۴ ۳ ۵ ، ۱ < ۵ ۳ ۴ ، ۱ < ۴ ۵ ۲ ، ۱ < ۵ ۴ ۲ ، ۱ < ۲ ۵ ۳ ، ۱ < ۵ ۲ ۳ ۱۲ حالت داریم و چون می تواند هر ۵ رنگ، رنگ اول باشد پس تعداد کل حالات $5 \times 12 = 60$ است.	

www-karoon-ir

۱۱ **جدول زیر را کامل و میانگین را بیابید.** ۱

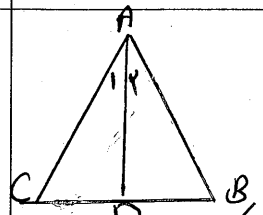
$۵ \le x < ۱۵ \rightarrow x = ۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴$

مرکز دسته $= \frac{۵+۱۵}{۲} = \frac{۲۰}{۲} = ۱۰$

دسته	فراوانی	مرکز دسته	فراوانی × مرکز
$۵ \le x < ۱۵$	۳	۱۰	۳۰
$۱۵ \le x \le ۲۵$	۱	۲۰	۲۰

$۱۵ \le x \le ۲۵ \rightarrow x = ۱۵, ۱۶, \dots, ۲۵$ مرکز دسته $= \frac{۱۵+۲۵}{۲} = \frac{۴۰}{۲} = ۲۰$ فراوانی $\rightarrow \frac{۲۰}{۲۰} = ۱$

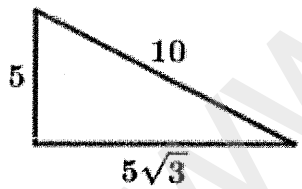
۱۲ **ثابت کنید در هر مثلث متساوی الساقین زوایای مجاور دو ساق برابر است.** ۱



در مثلث متساوی الساقین ABC، نیمساز زاویه‌ی A را رسم می‌کنیم
دو ضلع AB و AC برابرهستند (ساق‌های مثلث) ضلع AD هم مشترک است، دو زاویه‌ی A_1 و A_2 هم برابرند (AD نیمساز زاویه‌ی A) پس در مثلث ABD و ACD در حالت (ض‌زض) هم‌نهشت بوده پس دو زاویه‌ی B و D باهم و دو زاویه‌ی D و C هم باهم برابرند

۱۳ **ج)ایا مثلث قائمه است چرا.** ۱

در مثلث‌های قائم‌الزاویه ضلع رابطه‌ی فیثاغورس مجذور وتر برابر مجذور دو ضلع قائمه است پس:



$۱۰^۲ = ۵^۲ + (۵\sqrt{۳})^۲$

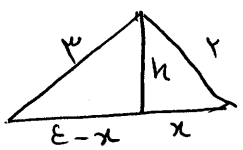
$۱۰۰ = ۲۵ + ۷۵$

پس این مثلث هم صادق است پس مثلث قائم‌الزاویه است.

۱۴ **الف)اندازه هر زاویه داخلی یک ده ضلعی منتظم را بیابید.** ۱

مجموع زاویه‌های داخلی ۱۰ ضلعی $= (۱۰-۲) \times ۱۸۰^\circ = ۱۴۴۰^\circ$ هر زاویه $= \frac{۱۴۴۰^\circ}{۱۰} = ۱۴۴^\circ$

ب)مساحت مثلثی که اضلاع آن ۲و۳و۴ است را بیابید. ۲



$۲^۲ = h^۲ + x^۲ \xrightarrow{(۱)}$

$۳^۲ = (۴-x)^۲ + h^۲ = ۱۶ - ۸x + x^۲ + h^۲ = ۱۶ - ۸x + ۴$

$\rightarrow ۹ = ۱۶ - ۸x + ۴ \rightarrow ۵ = ۱۶ - ۸x \rightarrow ۸x = ۱۱ \rightarrow x = \frac{۱۱}{۸}$

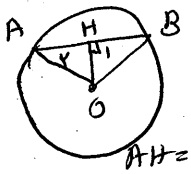
$\xrightarrow{(۱)} ۴ = h^۲ + x^۲ \rightarrow h^۲ = ۴ - \frac{۱۲۱}{۶۴} = \frac{۱۳۵}{۶۴} \rightarrow h = \frac{\sqrt{۱۳۵}}{۸}$

مساحت مثلث $= \frac{h \times ۴}{۲} = \frac{\sqrt{۱۳۵}}{۸} \times \frac{۴}{۲} = \frac{\sqrt{۱۳۵}}{۴}$

www-karnoon.ir

۱

ثابت کنید اگر شعاع دایره بر وتری عمود باشد ان وتر را نصف می کند.

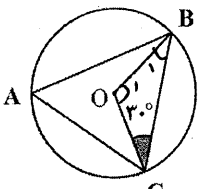


$OA=OB$ (شعاع دایره) OH در دو مثلث OHA, OHB مشترک است

$\hat{H_1}=\hat{H_2}=90$

۱۵ پس دو مثلث AHO, OHB در حالت (ض ز ض) هم‌نهشت هستند پس $AH=HB$

الف) با توجه به شکل مقابل اندازهٔ کمان و زاویه های خواسته شده را بدست آورید.



زاویه‌ی محاطی نصف کمان مقابل آن است.

$\overset{\frown}{BC}=120^\circ$ اندازه‌ی کمان BC با زاویه‌ی مرکزی آن O_1 برابر است.

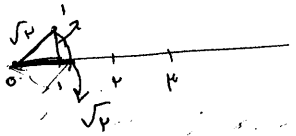
$\hat{O_1}=180^\circ$

$\hat{A}=\frac{120^\circ}{2}=60^\circ$

متساوی‌الساقین OBC) $\hat{B_1}=30^\circ \rightarrow \hat{O}=180^\circ-(30^\circ+30^\circ)=120^\circ$

ب) $\sqrt{2}$ را روی محور نشان دهید .(مراحل انجام کار نوشته شود)

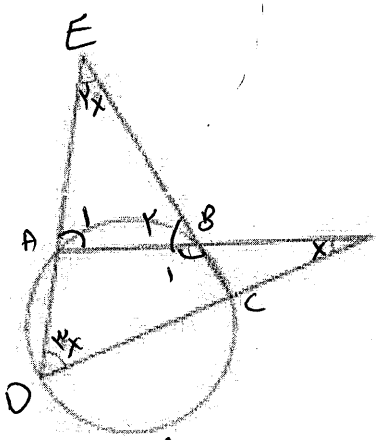
برای محاسبه مقدار $\sqrt{2}$ در محور نقطه‌شان داده شده $\sqrt{2}$ را مشخص می‌کنیم.



۲

وسط وتر را پیدا می‌کنیم در مثلث قائم‌الزاویه با دو ضلع $\frac{1}{\sqrt{2}}$ و $\sqrt{2}$ خواهد شد.

۱۶ **ج)مقدار x را بیابید.**



$\hat{۳x}=\frac{\text{نصف کمان } ABC}{2}=\frac{\overset{\frown}{ABC}}{2}$

$\hat{B_1}=\frac{\overset{\frown}{ADC}}{2}$ کمان $\overset{\frown}{ADC}+\overset{\frown}{ABC}=340^\circ$

$\rightarrow \overset{\frown}{ADC}=340^\circ-\overset{\frown}{ABC}$

$B_1=\frac{340^\circ-\overset{\frown}{ABC}}{2}=180^\circ-\frac{\overset{\frown}{ABC}}{2}=180-3x$

$\hat{A_1}=x+3x=4x$

در مثلث ABE طبق:

$2x+4x+B_2=180 \rightarrow 2x+4x+180-(180-3x)=180^\circ$

$\Rightarrow 9x+180^\circ-180^\circ+3x=180^\circ \rightarrow 9x=180^\circ \rightarrow x=20^\circ$