حسابان

فصل ۱

دنباله‌ی حسابی

❖ **دنباله حسابی (عددی): دنباله‌ای است که به جز جمله اول آن، هر جمله‌اش برابر است با جمله قبلی آن به اضافه یک مقدار ثابت. این مقدار ثابت را قدر نسبت دنباله نامیده با d نشان می‌دهیم به عبارت دیگر دنباله‌ی حسابی دنباله‌ای است که تفاضل هر دو جمله متوالی آن مقدار ثابتی است.**

مثال: $a_n = ۳n - ۲$ جمله عمومی یک دنباله حسابی است، زیرا:

$$a_{n+۱} - a_n = \big(۳(n+۱)-۲\big)-\big(۳n-۲\big) = ۳$$

مثال: $b_n = n^۲$ جمله عمومی یک دنباله حسابی نیست، زیرا:

$b_{n+۱} - b_n = (n+۱)^۲ - n^۲ = ۲n+۱$ به n وابسته است

❖ **جمله عمومی دنباله حسابی که قدر نسبت آن d و جمله اول آن a باشد برابر است با:**

$$a_n = a + (n-۱)d$$

مثال: جمله چندم دنباله $۱, ۴, ۷, \ldots$ برابر با ۱۰۰ است؟

حل: چون $a = ۱$ و $d = ۳$ می‌باشد و $a_n = ۱۰۰$ بنابراین:

$$۱۰۰ = ۱ + (n-۱)(۳) \Rightarrow ۱۰۰ = ۱ + ۳n - ۳ \Rightarrow ۳n = ۱۰۲ \Rightarrow n = ۳۴$$

بنابراین جمله سی و چهارم برابر با ۱۰۰ می‌باشد.

مثال: در یک دنباله حسابی داریم $a_۴ - a_۲ = ۱۰$ و $a_۵ + a_۷ = ۵۴$، $a_{۸۱}$ را بیابید.

حل:

$$\begin{cases} a_۴ - a_۲ = ۱۰ \\ a_۵ + a_۷ = ۵۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+۳d)-(a+d) = ۱۰ \\ (a+۴d)+(a+۶d) = ۵۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲d = ۱۰ \\ ۲a + ۱۰d = ۵۴ \end{cases} \Rightarrow d = ۵,\ a = ۲$$

$$\Rightarrow a_{۸۱} = a + ۸۰d \Rightarrow a_{۸۱} = ۲ + ۸۰ \times ۵ = ۴۰۲$$

❖ **مجموع n جمله اول دنباله حسابی برابر است با :**

$$S_n = \frac{n}{۲}\big(۲a + (n-۱)d\big)$$

❖ **مجموع n جمله اول دنباله حسابی که جمله اول آن $a_۱$ و جمله nام آن a_n باشد برابر است با:**

$$S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n)$$

مثال: در یک دنباله حسابی داریم $S_n = ۴n^۲ - n$، جمله هفتم این دنباله را بیابید.

حل: با کمی دقت متوجه می‌شویم که $a_۷ = S_۷ - S_۶$ پس:

$$a_۷ = \left(۴\left(۷^۲\right)-۷\right)-\left(۴\left(۶^۲\right)-۶\right)= ۵۱$$

- **اگر a_n و a_m دو جمله از یک دنباله حسابی باشد آنگاه $d = \frac{a_m - a_n}{m-n}$.**
- **اگر a_l ,a_p , a_n , a_m چهار جمله از یک دنباله حسابی و $m+n = p+l$ آنگاه $a_m + a_n = a_p + a_l$.**
- **در هر دنباله حسابی متناهی مجموع هر دو جمله متساوی الفاصله از طرفین باهم برابر است.**
- **اگر در یک دنباله حسابی متناهی تعداد جملات فرد باشد مجموع هر دو جمله متساوی الفاصله از طرفین مساوی دو برابر جمله وسط آن است و مجموع همه جملات آن برابر است با:**

مقدار جمله وسط ضربدر تعداد آن‌ها

مثال: در یک دنباله حسابی داریم $a_۳ + a_۷ + a_{۱۱} + a_{۱۵} = ۲۰$، $S_{۱۷}$ را بیابید.

$$a_۳ + a_۷ + a_{۱۱} + a_{۱۵} = ۲۰ \Rightarrow \left(a_۳ + a_{۱۵}\right)+\left(a_۷ + a_{۱۱}\right)= ۲۰$$

$$\Rightarrow ۲\left(a_۱ + a_{۱۷}\right)= ۲۰ \Rightarrow a_۱ + a_{۱۷} = ۱۰$$

$$S_{۱۷} = \frac{۱۷}{۲}\left(a_۱ + a_{۱۷}\right) \Rightarrow S_{۱۷} = \frac{۱۷}{۲}\times ۱۰ = ۸۵$$

مثال: در دنباله حسابی $-۱ , ۳ , ۷ , ...$ ، مجموع جملات بیست و یکم تا سی‌ام را بیابید.

حل:

روش اول: چون $a = -۱ , d = ۴$ پس:

$$S_{۳۰} - S_{۲۰} = \frac{۳۰}{۲}\left(-۲ + ۲۹\times ۴\right)-\frac{۲۰}{۲}\left(-۲ + ۱۹\times ۴\right)= ۹۷۰$$ =مجموع جملات بیست‌ویکم تا سی‌ام

روش دوم: چون $a_{۲۱} = -۱ + ۲۰\times ۴ = ۷۹$، پس مجموع خواسته شده برابر است با مجموع ده جمله اول دنباله حسابی که جمله اول آن ۷۹ و قدر نسبت آن ۴ می‌باشد، بنابراین:

$$S_{۱۰} = \frac{۱۰}{۲}(۱۵۸ + ۳۶) = ۹۷۰$$

تمرین:

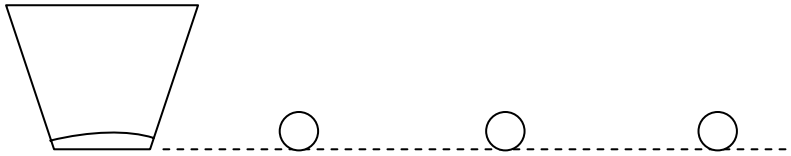
۱- در یک دنباله حسابی مجموع ده جمله‌ی اول ۲۰ و مجموع یازده جمله‌ی اول آن ۱۱ می‌باشد. مجموع بیست‌ویک جمله‌ی اول این دنباله را بیابید.

۲- مجموع اعداد سه رقمی مضرب ۷ را بدست آورید.

۳- در دنباله a_n داریم، $a_1 = 3$ و $a_{n+1} = a_n + 5$، جمله صدم دنباله و مجموع یکصد جمله اول را بدست آورید.

۴- در یک دنباله جمله پنجم $-\frac{7}{2}$ و هر جمله از جمله بعدی $\frac{3}{2}$ بیشتر است مجموع بیست جمله اول آنرا بدست آورید.

۵- تعدادی توپ مطابق شکل به فاصله ۳ متر از یکدیگر واقع هستند و فاصله اولین توپ از یک سطل برابر ۳ متر است.



فردی از کنار سطل حرکت کرده و اولین توپ را برداشته و به کنار سطل برگشته و توپ را در سطل می‌اندازد و این عمل برای توپ‌های دیگر نیز تکرار می‌کند. اگر این فرد در مجموع ۱۲۰ متر پیموده باشد تعداد توپ‌هایی که در سطل انداخته است را بدست آورید.

۶- مجموع بیست جمله اول یک دنباله حسابی ۵۹۰ و مجموع بیست جمله بعدی ۱۷۹۰ می‌باشد مجموع جملات دهم تا سی‌ام را بدست آورید

۷- در یک دنباله حسابی با جمله اول a و قدر نسبت d، به قدر نسبت ۲ واحد اضافه می‌کنیم مجموع ده جمله اول دنباله جدید چقدر از مجموع ده جمله دنباله قبلی بیشتر است.

۸- در یک دنباله عددی داریم $a_2 + a_7 + a_9 + a_{13} = 40$، s_{15} را بیابید.

۹- اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل یک دنباله عددی می‌دهند. اگر طول وتر این مثلث ۱۵ سانتی‌متر باشد، مساحت آن را بیابید.

۱۰- مجموع کلیه اعداد طبیعی سه رقمی که بر ۲ و ۳ بخش‌پذیرند را بیابید.

۱۱- حداقل چند جمله اول دنباله $3,7,11,\ldots$ را جمع کنیم تا حاصل بزرگ‌تر از ۲۰۰ شود.

۱۲- در یک دنباله حسابی صدجمله‌ای مجموع جملات با شماره‌های فرد ۴۰۰ و مجموع جملات با شماره‌های زوج ۵۰۰ می‌باشد. قدر نسبت این دنباله را بیابید.

۱۳- در یک دنباله حسابی مجموع ۷ جمله اول ۸۰ و مجموع ۷ جمله دوم برابر با ۱۶۰ می‌باشد. مجموع ۲۰ جمله اول این دنباله را بیابید.

۱۴- در یک دنباله حسابی داریم $\frac{S_5}{S_3} = \frac{25}{9}$. اگر $a = 8$ باشد، S_8 را بیابید.

۱۵- دو دنباله $1,4,7,\ldots$ و $-7,-2,3,\ldots$ چند جمله مشترک سه رقمی دارند؟

۱۶- اگر a_n جمله عمومی دنباله حسابی باشد، نشان دهید که:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$$

۱۷- در یک دنباله حسابی صد جمله‌ای، مجموع سه جمله اول ۲ و مجموع سه جمله آخر آن ۱۰ می‌باشد. مجموع همه‌ی جملات آن را بیابید.

۱۸- مقدار x را از رابطه‌ی $x + (x+2) + (x+4) + \ldots + (x+50) = 26$ بیابید.

دنباله‌ی هندسی

❖ **دنباله هندسی: دنباله‌ای است که به جز جمله اول آن، هر جمله‌اش برابر است با جمله قبلی آن ضربدر یک مقدار ثابت. این مقدار ثابت را قدر نسبت دنباله نامیده با q نشان می‌دهیم.**

❖ **اگر جمله اول و قدر نسبت آن مخالف صفر باشد می‌توان گفت دنباله هندسی دنباله‌ای است که خارج قسمت هر دو جمله متوالی آن مقدار ثابتی است.**

مثال: دنباله $\ldots, -8, 4, -2, 1$ هندسی است ولی دنباله $\ldots, 16, 8, -4, -2, 1$ هندسی نیست.

❖ **جمله عمومی دنباله هندسی که جمله اول آن a و قدر نسبت آن q باشد برابر است با:**

$$a_n = aq^{n-1}$$

مثال: دنباله $\ldots, \frac{1}{2}, 1, 2$ چند جمله بزرگتر از 10^{-3} دارد؟

حل: چون $a = 2$ و $q = \frac{1}{2}$ پس $a_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ که طبق فرض باید $2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > 10^{-3}$ باشد بنابراین:

$$2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} > \frac{1}{1000} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n} > \frac{1}{4000} \Rightarrow 2^n < 4000 \Rightarrow n < 12$$

درنتیجه یازده جمله بزرگتر از $\frac{1}{1000}$ دارد.

❖ **اگر a_n و a_m دو جمله غیر صفر از یک دنباله هندسی باشد آنگاه $\frac{a_m}{a_n} = q^{m-n}$.**

❖ **اگر a_m, a_n, a_p, a_l چهار جمله از یک دنباله هندسی و $m+n=p+l$ آنگاه $a_m a_n = a_p a_l$.**

❖ **در هر دنباله هندسی متناهی حاصل ضرب هر دو جمله متساوی الفاصله از طرفین باهم برابر است.**

❖ **اگر در یک دنباله هندسی متناهی تعداد جملات فرد باشد حاصل ضرب همه جملات آن برابر است با مقدار جمله وسط به توان تعداد آن‌ها.**

مثال: اگر در یک دنباله هندسی $a_۲ = ۱۲$ و $a_۵ = ۹۶$ باشد $a_۷$ را بیابید.

حل:

$$\frac{a_۵}{a_۳} = q^۳ \Rightarrow \frac{۹۶}{۱۲} = q^۳ \Rightarrow q = ۲$$

$$\frac{a_۷}{a_۵} = q^۳ \Rightarrow a_۷ = ۹۶ \times ۴ \Rightarrow a_۷ = ۳۸۴$$

مثال: در یک دنباله هندسی داریم $a_۵ = ۱$ حاصلضرب جملات اول تا نهم آن را بیابید.

حل:

$$a_۱ \ a_۲ \ \ldots a_۹ = (a_۵)^۹ = ۱^۹ = ۱$$

❖ مجموع n جمله اول دنباله هندسی برابر است با:

$$S_n = \frac{a(۱-q^n)}{۱-q} \ , \ q \neq ۱$$

$$S_n = \frac{a - qa_n}{۱-q} \ , \ q \neq ۱$$

$$S_n = na \ , \ q = ۱$$

مثال: در یک دنباله هندسی داریم $S_۶ = ۶۳ \ , \ S_۳ = ۷$، جمله ششم چند برابر جمله دوم است.

حل:

$$\frac{S_۶}{S_۳} = \frac{۶۳}{۷} \Rightarrow \frac{\frac{a(۱-q^۶)}{۱-q}}{\frac{a(۱-q^۳)}{۱-q}} = ۹ \Rightarrow \frac{۱-q^۶}{۱-q^۳} = ۹ \Rightarrow ۱+q^۳ = ۹ \Rightarrow q = ۲$$

در نتیجه:

$$\frac{a_۶}{a_۲} = q^۴ \rightarrow \frac{a_۶}{a_۲} = ۱۶$$

مثال: حداکثر چند جمله ابتدای دنباله $\ldots, \frac{۱}{۹}, \frac{۱}{۳}, ۱$ را جمع کنیم تا حاصل کمتر از ۱/۴۹۷ شود.

حل: چون $a = ۱$ و $q = \frac{۱}{۳}$ و می‌خواهیم $S_n < ۱/۴۹۷$ باشد پس داریم:

$$\frac{۱\left(۱-(\frac{۱}{۳})^n\right)}{۱-\frac{۱}{۳}} < ۱/۴۹۷ \Rightarrow \frac{۳}{۲}\left(۱-\left(\frac{۱}{۳}\right)^n\right) < \frac{۱۴۹۷}{۱۰۰۰} \Rightarrow ۱-\left(\frac{۱}{۳}\right)^n < \frac{۴۹۹}{۵۰۰} \Rightarrow \left(\frac{۱}{۳}\right)^n > \frac{۱}{۵۰۰}$$

$$\Rightarrow ۳^n < ۵۰۰ \Rightarrow n < ۶$$

پس می‌توان حداکثر ۵ جمله آن را باهم جمع نمود.

❖ **اگر در یک دنباله هندسی نامتناهی، $|q|<1$ باشد مجموع همه جملات آن برابر است با:**

$$S=\frac{a}{1-q}$$

مثال: مجموع همه جملات دنباله $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{64}, \ldots$ را بیابید.

حل:

$$a=1,\ q=-\frac{1}{4},\ |q|<1 \Rightarrow S=\frac{1}{1-(-\frac{1}{4})}=\frac{1}{\frac{5}{4}}=\frac{4}{5}$$

مثال: در یک دنباله هندسی نامتناهی جمله اول برابر با مجموع سایر جملات آن می‌باشد نسبت جمله پنجم به جمله اول این دنباله را بیابید.

حل: اگر جمله اول a و قدر نسبت q باشد داریم:

$$a=\frac{aq}{1-q}\Rightarrow 1=\frac{q}{1-q}\Rightarrow q=\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{a_5}{a_1}=q^4=\frac{1}{16}$$

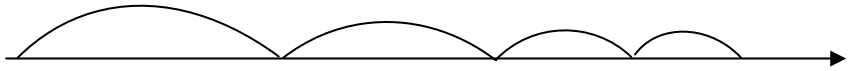
تمرین:

۱- حاصل $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\ldots$ را بدست آورید.

۲- حاصل عبارت $\frac{1+2+2^2+2^3+\ldots+2^8}{1+3+3^2+3^3+\ldots+3^4}$ را بدست آورید.

۳- حاصل $\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{9}-\frac{1}{12}+\frac{1}{27}-\frac{1}{24}+\ldots$ را محاسبه کنید.

۴- مطابق شکل بر روی محور نیم‌دایره‌هایی رسم شده است اگر قطر نیم دایره اول ۲ سانتیمتر باشد و هر بار ۳۰٪ از قطر در دنباله‌ی نیم‌دایره‌ها کم شود مجموع محیط نیم دایره‌ها را بدست آورید.



۵- اگر بدانیم سلول‌های بنیادی هر نیم‌ساعت دو برابر شوند پس از چند ساعت ده سلول به ۱۰۲۳۰ سلول تبدیل می‌شوند.

۶- در دنباله هندسی غیرنزولی $\frac{1}{2}, x, 2, \ldots$ مجموع دوازده جمله اول را بدست آورید.

۷- مربعی به ضلع ۱ واحد داریم وسط اضلاع مربع را بهم وصل می‌کنیم مربع جدیدی حاصل می‌شود سپس وسط اضلاع مربع جدید را بهم وصل می‌کنیم و این عمل را ادامه می‌دهیم. مجموع محیط‌ها و مساحت‌های مربع‌های بوجود آمده را بدست آورید.

۸- فردی در یک کارگاه استخدام گردید و حقوق او A تومان در ماه اول تعیین شد مقرر گردید در پایان ماه اول حقوق او دو برابر شود و در پایان ماه دوم حقوق او بر ۳ تقسیم شود و این عمل

برای ماه‌های بعد به ترتیب اجرا گردد این فرد در پایان سال مجموعاً چقدر حقوق دریافت کرده است.

۹- حاصل $(۱+x+x^۲+x^۳+x^۴+x^۵+x^۶+x^۷)(۱-x+x^۲-x^۳+x^۴-x^۵+x^۶-x^۷)$ به ازای $x=\sqrt{۲}$ را بدست آورید.

۱۰- اگر $x-۲$ و $x+۲$ و $۴x+۲$ جملات متوالی یک دنباله هندسی صعودی باشند مجموع ۸ جمله‌ی بعدی را بدست آورید.

۱۱- اگر اضلاع مثلثی تشکیل یک دنباله هندسی بدهند، ثابت کنید ارتفاع‌های آن‌ها نیز تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند.

۱۲- حاصل‌ضرب صد جمله‌ی اول دنباله‌ی $۱,۵,۲۵,\ldots$ را بیابید.

۱۳- در یک دنباله هندسی $a_۱=۳$ و $a_۶=۹۶$، $S_۵$ را بیابید.

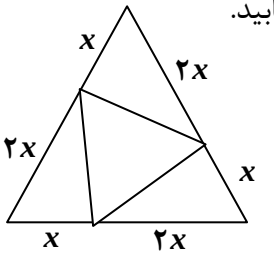
۱۴- در یک دنباله هندسی نامتناهی، جمله‌ی اول برابر با نصف مجموع جملات بعدی است. جمله‌ی اول چند برابر جمله‌ی نهم است؟

۱۵- اگر $a=۰/۳۳۳\ldots$ و $b=۰/۳۱۳۱۳۱\ldots$ باشد، ab را بیابید.

۱۶- اگر $a=۴/۶۶۶\ldots$ باشد، حاصل $۴۲(a+\frac{۱}{a})$ را بیابید.

۱۷- محیط دایره‌ای به شعاع واحد را به ۶ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و با نقاط بدست آمده یک ۶ ضلعی‌منتظم می‌سازیم و سپس وسط‌های اضلاع مجاور این ۶ ضلعی را به یک‌دیگر وصل می‌کنیم تا ۶ ضلعی‌منتظم دیگری پدید آید. اگر این روند را مرتباً تکرار کنیم، مجموع مساحت همه‌ی ۶ ضلعی‌ها و محیط همه‌ی ۶ ضلعی‌های بدست آمده را بیابید.

۱۸- سه ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $۳x$ را مطابق شکل به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کنیم تا مثلث متساوی‌الاضلاع دیگری پدید آید. اگر این عمل را مرتباً تکرار کنیم، مجموع مساحت‌های همه‌ی مثلث‌ها را بیابید.



۱۹- مجموع چند جمله‌ی دنباله‌ی هندسی $۶,-۱۲,۲۴,\ldots$ برابر ۱۰۲۶ است؟

۲۰- حداکثر چند جمله‌ی ابتدای دنباله‌ی $۱,\frac{۱}{۵},\frac{۱}{۲۵},\ldots$ را جمع کنیم تا حاصل کم‌تر از $۱/۲۴۹۹۵$ شود.

۲۱- در یک دنباله‌ی هندسی با جمله اول a و قدر نسبت q، قدر نسبت را مربع می‌کنیم. نسبت مجموع n جمله‌ی اول تصاعد هندسی بدست آمده به مجموع n جمله‌ی اول تصاعد هندسی اولی را بیابید.

تقسیم چند جمله‌ای‌ها و بخش پذیری

❖ **اگر چند جمله‌ای درجه nام $P(x)$ را بر چند جمله‌ای درجه mام $K(x)$ که $m \le n$، تقسیم کنیم؛ خارج قسمت تقسیم، چند جمله‌ای است مانند $Q(x)$ از درجه $n-m$ و باقی‌مانده صفر و یا چند جمله‌ای مانند $R(x)$ می‌باشد که درجه آن از m کمتر است و می‌توان نوشت:**

$$P(x)=K(x)Q(x)+R(x)$$

که آن را تساوی تقسیم می‌نامیم.

مثال: اگر چند جمله ای درجه هفتم را بریک چند جمله‌ای درجه پنجم تقسیم کنیم خارج قسمت چند جمله‌ای از درجه ۲ و باقی مانده صفر و یا چند جمله‌ای است که درجهٔ آن حداکثر ۴ می‌باشد.

مثال: در تقسیم چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x^۲-۳x+۲$ باقی مانده برابر با $۳x-۱$ می‌باشد $P(۲)$ را بیابید.

حل: بنا به تساوی تقسیم داریم $P(x)=(x^۲-۳x+۲)Q(x)+(۳x-۱)$ و در نتیجه $P(۲)=(۴-۶+۲)Q(۲)+(۶-۱)$ بنابراین $P(۲)=۵$.

تمرین: در تقسیم چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x^۳-۴x$، باقی‌مانده $۵x+۲$ می‌باشد، $P(۰)$ و $P(-۲)$ را بدست آورید.

❖ **اگر $P(x)$ و $q(x)$ دو چند جمله‌ای باشند برای اینکه تساوی $P(x)=q(x)$ به ازای هر مقدار x برقرار باشد، باید P و q هم درجه باشند و ضرایب هم درجه P و q با هم برابر باشند و برای اینکه تساوی $P(x)=۰$ به ازای هر مقدار x برقرار باشد باید ضرایب کلیه جملات P صفر باشد.**

مثال: a و b راچنان بیابید تا تساوی $\frac{a}{۳x-۱}+\frac{b}{۳x+۱}=\frac{۱}{۹x^۲-۱}$ به ازای هر مقدار x $(x\neq\pm\frac{۱}{۳})$ برقرار باشد.

حل:

$$\frac{a}{۳x-۱}+\frac{b}{۳x+۱}=\frac{۱}{۹x^۲-۱}\Rightarrow\frac{a(۳x+۱)+b(۳x-۱)}{(۳x-۱)(۳x+۱)}=\frac{۱}{۹x^۲-۱}\Rightarrow a(۳x+۱)+b(۳x-۱)=۱$$

$$\Rightarrow ۳(a+b)x+a-b=۱\Rightarrow a+b=۰\ ,\ \ a-b=۱\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}\ ,\ b=-\frac{۱}{۲}$$

مثال: a و b را چنان بیابید تا تساوی $(a^۲-۴)x^۲+(a-b)x+b-۲=۰$ به ازای هر مقدار x برقرار باشد.

حل: باید $a^۲-۴=۰$ و $a-b=۰$ و $b-۲=۰$ باشد که از اینجا داریم: $a=b=۲$

مثال: بدون انجام عمل تقسیم، باقی مانده و خارج قسمت تقسیم $x^۳-۲x^۲+۵x-۱$ را بر $x^۲+۱$ بیابید.

حل: می‌دانیم خارج قسمت و باقی مانده به ترتیب به صورت $Q(x)=ax+b$ و $R(x)=cx+d$ می‌باشند بنابراین داریم:

$$x^۳-۲x^۲+۵x-۱=(x^۲+۱)(ax+b)+(cx+d)$$

درنتیجه:

$$x^۳-۲x^۲+۵x-۱=ax^۳+bx^۲+(a+c)x+b+d$$

بنابراین:

$$a=۱\ ,\ b=-۲\ ,\ a+c=۵\ ,\ b+d=-۱\Rightarrow a=۱\ ,\ b=-۲\ ,\ c=۴\ ,\ d=۱$$
$$\therefore Q(x)=x-۲\ ,\ R(x)=۴x+۱$$

تمرین:

بدون انجام عمل تقسیم، خارج قسمت و باقی‌مانده تقسیم $x^۴+۱$ را بر $x^۲-۳$ بیابید.

❖ **اگر در تقسیم P بر K باقی‌مانده صفر شود گوئیم P بر K بخش‌پذیر است و K را یک مقسوم علیه (یک عامل یا یک فاکتور) Q گوییم.**

مثال: $x-۲$ یک فاکتور $x^۲-۵x+۶$ می‌باشد زیرا: $x^۲-۵x+۶=(x-۲)(x-۳)$

تمرین:

۱- آیا $x-۱$ یک فاکتور $x^۳-۲x^۲+x$ می‌باشد.

۲- عبارت $x^۳-۴x^۲+۳x-۱۲$ یک فاکتور درجه اوّل و یک فاکتور درجه دوم دارد آنها را بیابید.

❖ **در تقسیم چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x-a$ داریم:**

$$P(x)=(x-a)Q(x)+R$$

❖ **باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-a$ برابر است با: $P(a)$.**

❖ **چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیر است اگر و تنها اگر $P(a)=۰$.**

مثال: باقی‌مانده تقسیم $x^۷-۳x^۲+۴x-۵$ را بر $x+۱$ بدست آورید.

حل:

$$R=P(-۱)\Rightarrow R=(-۱)^۷-۳(-۱)^۲+۴(-۱)-۵\Rightarrow R=-۱۲$$
$$P(x)=x^۷-۳x^۲+۴x-۵$$

مثال: b,a را طوری بیابید تا $x^۳-۲x^۲+ax+b$ بر $x^۲+x-۲$ بخش‌پذیر باشد.

حل: چون $x^۲+x-۲=(x+۲)(x-۱)$ و $P(x)=x^۳-۲x^۲+ax+b$ می‌باشد، باید $P(-۲)=۰$ و $P(۱)=۰$، در نتیجه:

$$(-۲)^۳-۲(-۲)^۲+a(-۲)+b=۰\ ,\ (۱)^۳-۲(۱)^۲+a(۱)+b=۰\Rightarrow -۲a+b=۱۶, a+b=۱$$
$$\Rightarrow a=-۵, b=۶$$

مثال: اگر باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x-۲$ و $x-۳$ به ترتیب ۲ و ۷ باشد، باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ را بر $X^۲-۵X+۶$ بیابید.

حل: با توجه به فرض داریم $P(۲)=۲$ و $P(۳)=۷$ و طبق تساوی تقسیم
$P(x)=(x^۲-۵x+۶)Q(x)+(ax+b)$ بنابراین $P(۲)=۲a+b$ و $P(۳)=۳a+b$ در نتیجه:

$$\begin{cases}۲a+b=۲\\ ۳a+b=۷\end{cases}\Rightarrow a=۵,\ b=-۸\Rightarrow R=۵x-۸$$

تمرین:

۱- در تقسیم $x^۷-۵x^۳+۴x^۲-۹$ بر $x^۳-x$ باقی‌مانده $R(x)$ می‌باشد $R(-۱)$ را بیابید.

۲- $b\ ,\ a$ را چنان بیابید تا $x^۳+ax^۲+bx+۴$ بر $(x-۲)^۲$ بخش‌پذیر باشد.

۳- a را چنان بیابید تا باقی‌مانده تقسیم $x^۲+ax+۴$ بر $x+۲$، عدد ۵ باشد.

۴- باقی‌مانده تقسیم یک چند جمله‌ای درجه دوم بر x و $x+۱$ و $x-۱$ به ترتیب $۱\ ,\ ۲\ ,\ ۳$ می‌باشد باقی‌مانده تقسیم آن را بر $x-۴$ بیابید.

۵- چند جمله‌ای درجه سومی بیابید که باقی‌مانده تقسیم آن بر هر یک از عبارت‌های $x+۱$، $x-۱$ و $x-۲$ برابر با ۴۸ و بر $x-۳$ بخش‌پذیر باشد.

❖ باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای $P(x)$ بر $ax+b\ (a\neq ۰)$ برابر است با $P\left(-\frac{b}{a}\right)$.

مثال: نشان دهید $۲x+۳$ یک فاکتور $۲x^۳+۳x^۲-۸x-۱۲$ می‌باشد سپس نشان دهید دو فاکتور درجه اوّل دیگر نیز دارد.

حل: باید نشان دهیم عبارت $g(x)=۲x^۳+۳x^۲-۸x-۱۲$ به ازای $x=-\frac{۳}{۲}$ صفر است.

$$g\left(-\frac{۳}{۲}\right)=۲\left(-\frac{۳}{۲}\right)^۳+۳\left(-\frac{۳}{۲}\right)^۲-۸\left(-\frac{۳}{۲}\right)-۱۲=-\frac{۲۷}{۴}+\frac{۲۷}{۴}+۱۲-۱۲=۰$$

برای بدست آوردن فاکتورهای دیگر، $g(x)$ را بر $۲x+۳$ تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{r|l}۲x^۳+۳x^۲-۸x-۱۲ & ۲x+۳\\ \hline ۲x^۳+۳x^۲ & x^۲-۴\\ \hline -۸x-۱۲ & \\ -۸x-۱۲ & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

بنابراین:

$$۲x^۳+۳x^۲-۸x-۱۲=(۲x+۳)(x^۲-۴)\Rightarrow ۲x^۳+۳x^۲-۸x-۱۲=(۲x+۳)(x-۲)(x+۲)$$

در نتیجه فاکتورهای مورد نظر $x+۲\ ,\ x-۲$ می‌باشد.

تمرین:

۱- نشان دهید نمودار $y=۹x^۳-۱۸x^۲-x+۲$ محور xها را در نقطه‌ای به طول $-\frac{۱}{۳}$ قطع می‌کند سپس سایر نقاط تقاطع نمودار با محور Xها را بیابید.

۲- $a\ ,\ b$ را چنان بیابید تا چند جمله‌ای $x^۳+ax+b$ بر $۴x^۲-۹$ بخش‌پذیر باشد.

❖ برای بدست آوردن باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای $P(x)$ بر ax^n+b $(a\neq ۰\ ,\ n\in N)$ می‌توان در عبارت $P(x)$ به جای همه x^nها عدد $-\frac{b}{a}$ را قرار داد و حاصل را ساده نمود.

مثال: باقی‌مانده تقسیم $x^{۱۳۸۹}+۳x^۷-۴x+۱$ را بر $x^۳+۱$ بیابید.

حل: چون $-\frac{b}{a}=-۱$ و $x^{۱۳۸۹}+۳x^۷-۴x+۱=(x^۳)^{۴۶۳}+۳(x^۳)^۲x-۴x+۱$ می‌باشد پس:

$$R=(-۱)^{۴۶۳}+۳(-۱)^۲x-۴x+۱\Rightarrow R=-x$$

تمرین:

۱- نشان دهید $x^۴-۳x^۳+۶x-۱۶$ بر $x^۲-۴$ بخش‌پذیر است.

۲- $a\ ,\ b$ را چنان بیابید تا $x^۶-۳x^۳+۴ax^۲+b$ بر $x^۳-۱$ بخش‌پذیر باشد.

۳- اگر $x^{۱۴}+۲x^۸+ax^۲+۵$ بر $x^۲+۱$ بخش‌پذیر باشد باقی‌مانده تقسیم آن را $x-۱$ بیابید.

۴- $a\ ,\ b$ را چنان بیابید تا $x^۴+ax^۳+bx^۲+۵x-۲$ بر $x^۲-۱$ بخش‌پذیر باشد.

۵- اگر $(n\in N)\ ax^{۲n+۲}+x^{۲n+۱}+x^{۲n}$ بر $x+۲$ بخش‌پذیر باشد، a را بیابید.

۶- باقی‌مانده تقسیم $x^{۴۱}-x^{۲۱}+۳x^۴-۷$ را بر $x^۴+۱$ بیابید.

۷- $a\ ,\ b$ را چنان بیابید تا $x^۳+ax^۲+bx+۴$ بر $(x-۱)^۲$ بخش‌پذیر باشد.

۸- اگر به چند جمله‌ای $P(x)$ عبارت $۸x-۱$ را اضافه کنیم باقی‌مانده تقسیم آن بر $x^۲-۹$ برابر با $۵x+۲$ می‌شود، $P(-۳)$ را بیابید.

۹- اگر باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای‌های $f(x)\ ,\ g(x)$ بر $x^۲+x+۳$ به ترتیب $x-۲\ ,\ x+۷$ باشد باقی‌مانده تقسیم $f(x)\,g(x)$ بر $x^۲+x+۳$ را بیابید.

۱۰- باقی‌مانده تقسیم $x^{۱۰}-۱$ را بر $x^۲+x+۱$ بیابید.

۱۱- ثابت کنید که $(n\in N)\ x^n-a^n$ بر $x-a$ بخش‌پذیر است و سپس نشان دهید که:

الف) $x^n-a^n=(x-a)(x^{n-۱}+ax^{n-۲}+a^۲x^{n-۳}+\ldots+a^{n-۱})$

ب) $x^n-۱=(x-۱)(x^{n-۱}+x^{n-۲}+\ldots+۱)$

۱۲- ثابت کنید $۳۱^۳ - ۷۱^۳$ بر ۴۰ بخش‌پذیر است.

۱۳- باقی‌مانده تقسیم‌های زیر را بیابید. $(n \in N)$

الف) $x^n - a^n$ بر $x+a$

ب) $x^n + a^n$ بر $x-a$

ج) $x^n + a^n$ بر $x+a$

۱۴- حاصل عبارت $۱ + x + x^۲ + ... + x^{۱۹}$ را به ازای $x = ۲$ بیابید.

۱۲-به ازای چه مقدار b دو چند جمله‌ای $x^۵ + ۴x - ۵$ و $x^۴ + x^۳ + ۵x + b$ در تقسیم بر $x+۲$ هم باقی‌مانده می‌باشند.

۱۳- اگر باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x+۱$ برابر با ۹ باشد باقی‌مانده تقسیم $P(x^۳)$ را بر $x^۲ - x + ۱$ بیابید.

۱۴-اگر $f(x)$ یک چند جمله‌ای و $۵f(x) + ۲f(-x) = ۱۶ - x^۳$ باشد باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ را بر $x-۲$ بیابید.

۱۵-نشان دهید عدد $۲^{۶۴n} - ۱$ $(n \in N)$ بر ۱۷ بخش‌پذیر است.

۱۶-نشان دهید عدد $۵^{۴n} - ۲n$ $(n \in N)$ بر ۶۲۱ بخش‌پذیر است.

۱۷-اگر $P(x)$ یک چند جمله‌ای و $f(x) = ۷۲x^۲ + ۸ + P(۳x)$ و باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $۳x-۱$ برابر ۵ باشد $P(۱)$ رابیابید.

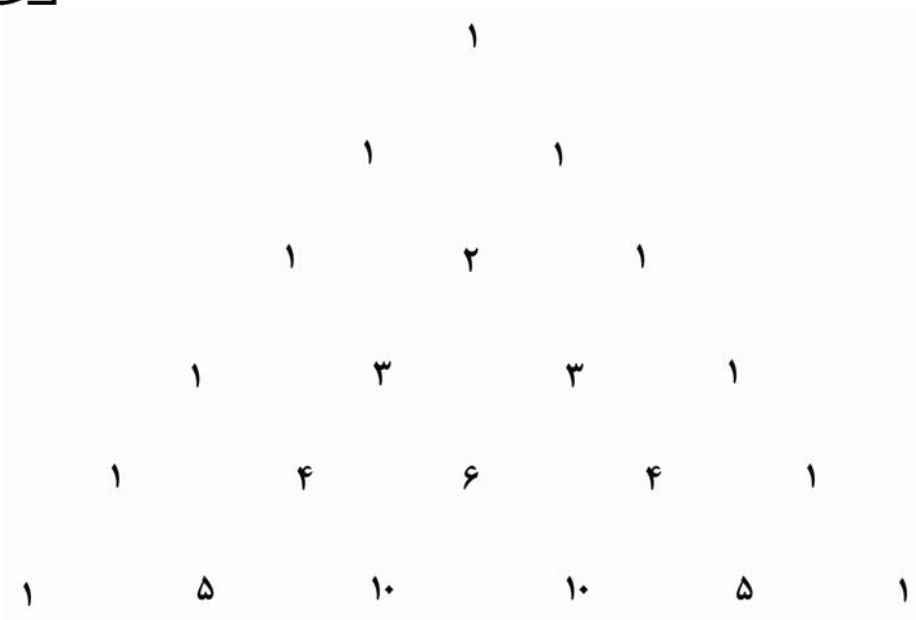
❖ بسط دو جمله‌ای غیاث‌الدین جمشید کاشانی و مثلث خیام – پاسکال:

اگر $n \in N$ باشد $(a+b)^n$ به دو جمله‌ای کاشانی معروف می‌باشد که بسط آن به صورت زیر است:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-۱}b + \frac{n(n-۱)}{۲}a^{n-۲}b^۲ + ... + b^n$$

❖ این بسط:

- ✓ دارای $n+۱$ جمله است
- ✓ مجموع توان‌های a , b در هر جمله n است.
- ✓ اگر آن را بر حسب توان‌های نزولی n مرتب کنیم ضریب اوّلین جمله ۱ و ضریب جملات بعدی برابر است با ضریب جمله قبلی ضربدر توان a تقسیم بر تعداد جملات قبل از آن.
- ✓ ضریب جملات در جدول زیر موسوم به مثلث خیام پاسکال آمده است.



.....

مثال: بسط $(x+y)^{۳}$ را بنویسید.

حل:

$$(x+y)^{۳} = x^{۳} + ۳x^{۲}y + ۳xy^{۲} + y^{۳}$$

مثال: بسط $(۲x-۳)^{۴}$ را بنویسید.

حل:

$$(۲x-۳)^{۴} = (۲x)^{۴} + ۴(۲x)^{۳}(-۳) + ۶(۲x)^{۲}(-۳)^{۲} + ۴(۲x)(-۳)^{۳} + (-۳)^{۴}$$
$$= ۱۶x^{۴} - ۹۶x^{۳} + ۲۱۶x^{۲} - ۲۱۶x + ۸۱$$

تمرین:

۱- بسط عبارت‌های $(x-y)^{۴}$, $(۳x-۱)^{۳}$, $(x-۱)^{۵}$ را بنویسید.

۲- بسط عبارت $(x+\frac{۲}{x})^{۳}$ را بدست آورید.

❖ **برای بدست آوردن مجموع ضرایب یک چند جمله‌ای کافی است به جای متغیرها عدد یک قرار داده و حاصل را بدست آوریم.**

مثال: مجموع ضرایب $۳x^{۴} - ۲x^{۳} + xy^{۲} + ۷y - ۲$ را بیابید.

حل: حاصل عبارت را به ازای $x=۱ , y=۱$ بدست می‌آوریم در نتیجه داریم :

مجموع ضرایب $= ۳ - ۲ + ۱ + ۷ - ۲ = ۷$

مثال: مجموع ضرایب بسط $(۲x^{۳} + ۳x^{۲} - ۶)^{۷۱}$ را بیابید.

حل:

مجموع ضرایب $= (۲ + ۳ - ۶)^{۷۱} = (-۱)^{۷۱} = -۱$

❖ **بسط دو جمله‌ای کاشانی را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:**

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}b^n$$

که جمله $(k+1)$ام آن به صورت $\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ می‌باشد.

مثال: جمله سوم بسط $(2x-y)^7$ را بیابید.

حل:

$$\binom{7}{2}(2x)^2(-y)^5 = \frac{7!}{2!\times 5!}(4x^2)(-y)^5 = -60x^2y^5$$

تمرین :

۱- مجموع ضرایب بسط $(5x^2-3y^3)^{10}$ را بیابید.

۲- در مثلث خیام – پاسکال مجموع اعداد روی سطر بیستم را بیابید.

۳- اگر مجموع ضرائب بسط $(a+b)^{2n}$ برابر با ۶۴ باشد بسط عبارت $(2x-1)^n$ را بنویسید.

۴- ضریب x^3y^2 را در بسط $(2x-3y)^5$ بیابید.

۵- بسط عبارت $(\sqrt[3]{x}+\sqrt{y})^8$ چند جمله گویا دارد؟

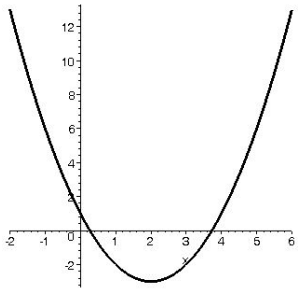
۶- ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n عدد 5^n-4n-1 بر ۱۶ بخش‌پذیر است.

معادلات

❖ **ریشه‌های معادله $f(x)=0$ برابر است با طول‌های نقاط مشترک نمودار تابع $y=f(x)$ با محور x ها.**

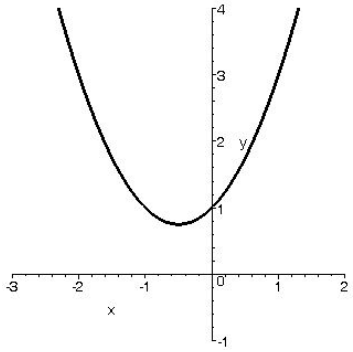
مثال: تعداد و علامت ریشه‌های معادله $x^2-4x+1=0$ را تعیین کنید .

حل: چون نمودار $y=x^2-4x+1$ به صورت زیر می‌باشد بنابراین معادله دارای دو ریشه مثبت می‌باشد.



مثال: نشان دهید معادله $x^2+x+1=0$ ریشه ندارد.

حل: با توجه به نمودار تابع که به صورت زیر می‌باشد معادله فوق ریشه ندارد.



❖ **ریشه‌های معادله $f(x)=g(x)$ برابر است با طول‌های نقاط مشترک نمودار توابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$.**

مثال: معادله $x=x^2$ چند ریشه دارد.

حل: نمودار $y=x$ و $y=x^2$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.

با توجه به نمودار فوق معادله دو ریشه دارد.

مثال: معادله $4X+\cos X=0$ چند ریشه دارد؟

حل:

$$4x+\cos x=0 \Rightarrow \cos x=-4x$$

حال نمودار $y=\cos x$ و $y=-4x$ را رسم می‌کنیم. با توجه به نمودار یک ریشه منفی دارد.

❖ **معادله $ax+b=0$ با شرط $a\neq 0$ دارای یک ریشه برابر با $-\frac{b}{a}$ می‌باشد.**

مثال : معادله $3x^2-4x+1=0$ را حل کنید.

$$3x^2-4x+1=0\Rightarrow (3x-1)\ (x-1)=0\Rightarrow 3x-1=0\ ,\ x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{3}\ ,\ x=1$$

❖ **اگر در معادله $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ عبارت b^2-4ac را دلتا (Δ) بنامیم آنگاه:**

الف) اگر $\Delta<0$ باشد معادله ریشه ندارد.

ب) اگر $\Delta=0$ باشد معادله دارای ریشه مضاعف $x=-\frac{b}{2a}$ می‌باشد.

ج) اگر $\Delta>0$ باشد معادله دارای دو ریشه متمایز می‌باشد که از دستورات $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ بدست می‌آید.

مثال: m را چنان بیابید تا معادله $x^2-3x+m-1=0$ دارای ریشه مضاعف باشد.

حل:

$$\Delta=0\Rightarrow (-3)^2-4(1)(m-1)=0\Rightarrow 9-4m+4=0\Rightarrow m=\frac{13}{4}$$

مثال: ریشه‌های معادله $3x^2-7x=1$ را بیابید.

$$3x^2-7x=1\Rightarrow 3x^2-7x-1=0$$

$$\Delta=(-7)^2-4(3)(-1)\Rightarrow \Delta=61\Rightarrow\ x_1=\frac{7+\sqrt{61}}{6}\quad ,\quad x_2=\frac{7-\sqrt{61}}{6}$$

تمرین :

۱- تعداد و علامت ریشه‌های معادله $x(1-x)=3$ را بیابید.

۲- حدود t را چنان بیابید تا $(t-1)x^2-2tx+t+2=0$ دارای دو ریشه متمایز باشد.

❖ **اگر α و β ریشه های معادله $ax^2+bx+c=0$ باشد آنگاه:**

$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|\alpha|}\quad ,\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}\quad ,\quad \alpha+\beta=-\frac{b}{a}$$

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2-5x+2=0$ باشد حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف) $\alpha^2+\beta^2$ ب) $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ ج) $\alpha^3+\frac{1}{\alpha^3}$

حل:

$$\alpha+\beta=-\frac{-5}{2}=\frac{5}{2}\quad ,\quad \alpha\beta=\frac{2}{2}=1$$

الف) $\alpha^۲+\beta^۲=(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta=(\frac{۵}{۲})^۲-۲(۱)=\frac{۲۱}{۴}$

ب) $T=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\Rightarrow T^۲=\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)^۲=\alpha+\beta+۲\sqrt{\alpha\beta}\Rightarrow T^۲=\frac{۵}{۲}+۲\Rightarrow T=\sqrt{\frac{۹}{۲}}$

ج) $\alpha\beta=۱\Rightarrow\beta=\frac{۱}{\alpha}$

$$\Rightarrow\alpha^۳+\frac{۱}{\alpha^۳}=\alpha^۳+\beta^۳=(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)=\left(\frac{۵}{۲}\right)^۳-۳(۱)\left(\frac{۵}{۲}\right)=\frac{۶۵}{۸}$$

تمرین: اگر α و β ریشه‌های معادله $x^۲+۴x+۲=۰$ باشد a را چنان بیابید تا $\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}=a$ باشد.

❖ **اگر مجموع دو عدد S و حاصلضرب آنها P باشد این دو عدد (در صورت وجود) ریشه‌های معادله $x^۲-Sx+P=۰$ می‌باشد.**

مثال: دو عدد بیابید که مجموع آنها ۱ و حاصل ضربشان ۳- باشد.

حل:

$$S=۱\quad,\quad P=-۳$$

$$x^۲-x-۳=۰\quad,\quad\Delta=۱+۱۲\quad,\quad\alpha=\frac{۱+\sqrt{۱۳}}{۲}\quad,\quad\beta=\frac{۱-\sqrt{۱۳}}{۲}$$

تمرین: اگر مجموع دو عدد ۱- و حاصل ضرب آن‌ها نیز ۱- باشد تفاضل آن دو را بیابید.

❖ **معادله درجه دومی که ریشه‌هایش α و β باشد عبارت است از $x^۲-Sx+P=۰$ که در آن $S=\alpha+\beta$ و $P=\alpha\beta$.**

مثال: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های $۵-۳\sqrt{۲}$, $۵+۳\sqrt{۲}$ باشد

حل: داریم:

$$S=(۵-۳\sqrt{۲})+(۵+۳\sqrt{۲})=۱۰\quad\text{و}\quad P=(۵-۳\sqrt{۲})(۵+۳\sqrt{۲})=۷$$

بنابراین معادله به صورت $x^۲-۱۰x+۷=۰$ می‌باشد.

تمرین :

۱- معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های $\frac{۱}{۳}$, $-\frac{۱}{۵}$ باشد.

۲- معادله درجه دومی بیابید که ریشه‌های $\frac{۱}{۳-۲\sqrt{۲}}$ و $\frac{۱}{۳+۲\sqrt{۲}}$ باشد.

❖ **برای تشکیل معادله‌ای که بین هر یک از ریشه‌هایش و هر یک از ریشه‌های معادله مفروضی، رابطه $y=f(x)$ برقرار باشد (x ریشه معادله داده شده و y ریشه معادله خواسته شده) می‌توان از این رابطه x را برحسب y پیدا نموده و در معادله داده شده قرار داده و آن را ساده کنیم.**

مثال: معادله درجه دومی بیابید که هر یک از ریشه‌هایش نصف هر یک از ریشه‌های معادله $3x^2-7x+1=0$ باشد.

حل: چون طبق فرض داریم $y=\frac{x}{2}$ بنابراین $x=2y$ و در نتیجه $3(2y)^2-7(2y)+1=0$ و معادله موردنظر عبارت است از $12y^2-14y+1=0$.

❖ **نمودار $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ یک سهمی است که خط به معادله $x=-\frac{b}{2a}$ محور تقارن آن و نقطه $S\left(-\frac{b}{2a}\ ,\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ رأس آن می باشد اگر $a>0$ باشد، نقطه S نقطه مینیمم نمودار و اگر $a<0$ باشد نقطه S ماکزیمم نمودار می‌باشد.**

مثال: کم‌ترین مقدار عبارت x^2-5x+2 را بیابید.

حل:

کمترین مقدار $=\frac{4(1)(2)-(-5)^2}{4(1)}=\frac{-17}{4}$

مثال: t را چنان بیابید تا بیشترین مقدار تابع $f(x)=-x^2+6x+t$ برابر با ۸ باشد.

حل: به ازای $x=-\frac{6}{-2}=3$ تابع بیشترین مقدار را دارد بنابراین باید $f(3)=8$ باشد پس داریم:

$-9+18+t=8\Rightarrow t=-1$

تمرین :

۱- در معادله $4x^2-16x+m=0$ یکی از ریشه‌ها ۵ واحد کمتر از ریشه دیگر آن می‌باشد ، m را بیابید.

۲- به ازای چه مقدار t هر یک از ریشه‌های معادله $x^2+5x+t=0$، ۲ واحد کمتر از هر یک از ریشه‌های معادله $x^2+x-2=0$ می‌باشد.

۳- k را چنان بیابید تا حاصل ضرب ریشه‌های معادله $(x+k)(x^2-7x-4)=0$ برابر با ۲۵ باشد.

۴- a را چنان بیابید تا نقطه ماکزیمم نمودار $y=-x^2+ax-2$ روی نیم ساز ربع سوم باشد.

۵- a را چنان بیابید تا نمودار $y=ax^2-(3a+1)x+2$ دارای مینیممی برابر با ۲- در ناحیه چهارم باشد.

۶- معادله درجه دومی بنویسید که مجموع معکوسات دو ریشه آن ۱- و مجموع مربعات ریشه‌های آن ۳ باشد.

۷- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2-\sqrt[3]{1389}x+1=0$ باشد حاصل عبارت $\alpha^3+\frac{1}{\alpha^3}+3\beta+\frac{3}{\beta}$ را بیابید.

۸- به ازای چه مقادیری از m نمودار $y=x^2-25x+m$ محور xها را قطع نمی‌کند.

۹- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2-2x-1=0$ و $\alpha<\beta$ باشد حاصل عبارت $5\alpha^2+\beta^2$ را بیابید.

۱۰- m را چنان بیابید تا نمودار $y=(x-2)(x^2+mx+1)$ بر محور xها مماس باشد.

۱۱-حدود k را چنان بیابید تا هر دو ریشه معادله $kx^2-(k-1)x+k-2=0$ منفی باشد.

۱۲- m را چنان بیابید تا معادله $3x^2-5mx+m^2=7m$ دارای ریشه‌های مختلف‌العلامه باشد.

۱۳- بدون حل معادله $1389x^2+2010x+1431=0$ تعداد و علامت ریشه‌های آن را مشخص کنید.

❖ معادله $(a\neq 0 \quad ax^4+bx^2+c=0)$ را معادله دو مجذوری گوئیم، برای حل این‌گونه معادلات معمولاً از تغییر متغیر $(t\geq 0)\ x^2=t$ استفاده می‌کنیم.

مثال: معادله $4x^4-3x^2-1=0$ را حل کنید.

حل:

$$4x^4-3x^2-1=0\ ,\ x^2=t\Rightarrow 4t^2-3t-1=0\ ,\quad \Delta=9+16=25\Rightarrow t_1=\frac{3\pm 5}{8},\ t_2=\frac{3-5}{8}$$

$$\Rightarrow t_1=1\ ,\ t_2=-\frac{1}{4}\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$$

❖ بعضی از معادلات را مانند معادلات دو مجذوری می‌توان با یک تغییر متغیر مناسب به معادله ساده‌تری تبدیل نمود و به کمک آن جواب‌های معادله را بدست آورد.

مثال: معادله $(x^2-1)^2-2x^2-1=0$ را حل کنید.

حل: معادله را چنین می‌نویسیم

$$(x^2-1)^2-2(x^2-1)-3=0$$

حال اگر $x^۲-۱=t$ باشد داریم:

$$t^۲-۲t-۳=۰\Rightarrow (t-۳)(t+۱)=۰\Rightarrow t=۳\ ,\ t=-۱$$
$$x^۲-۱=۳\Rightarrow x^۲=۴\Rightarrow x=\pm ۲$$
$$x^۲-۱=-۱\Rightarrow x^۲=۰\Rightarrow x=۰$$

❖ **اگر $y=f(x)$ باشد، ریشه‌های معادله $f(x)=۰$ را صفرهای تابع $y=f(x)$ گوییم.**

مثال: صفرهای تابع $f(x)=۲x^۶+۳x^۳-۵$ را بیابید.

$$۲x^۶+۳x^۳-۵=۰\quad ,\ x^۳=t\Rightarrow$$
$$۲t^۲+۳t-۵=۰\Rightarrow t=۱\ ,\ t=-\frac{۵}{۲}$$
$$x^۳=۱\Rightarrow x=۱$$
$$x^۳=-\frac{۵}{۲}\Rightarrow x=-\sqrt[۳]{\frac{۵}{۲}}$$

❖ **اگر $P(x)=a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+...+a_۱x+a_۰\ ,(a_۰\neq ۰)$ یک چند جمله‌ای از درجه n باشد و از روی آن چند جمله‌ای $Q(x)=a_۰x^n+a_۱x^{n-۱}+...+a_{n-۱}x+a_n$ را بسازیم ریشه‌های این دو چند جمله‌ای وارون یک‌دیگرند و چند جمله‌ای $Q(x)$را وارونه چند جمله‌ای $p(x)$ گوییم.**

مثال: وارونه چند جمله‌ای $P(x)=۳x^۲-۷x+۲$ چند جمله‌ای $Q(x)=۲x^۲-۷x+۳$می‌باشد.

تمرین:

۱- هریک از معادلات زیر را با انتخاب تغییر متغیر مناسب حل کنید.

الف) $x^۲(۲x^۲-۵)=-۳$ ب) $x^۶-x^۳-۲=۰$

ج) $\left(x+\frac{۱}{x}\right)^۲-۳\left(x+\frac{۱}{x}\right)+۲=۰$ د) $\left(\frac{x^۲}{۵}-\frac{۱}{۲}\right)^۲-\left(\frac{x^۲}{۵}-\frac{۱}{۲}\right)-۶=۰$

هـ) $x^۳+x^۲+x+\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x^۲}+\frac{۱}{x^۳}=-۲$ و) $(x^۲-x)^۲-۴x^۲+۴x+۳=۰$

۲- صفرهای هر یک از توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x)=x^۲-۶x+۹$ ب) $g(x)=(x-\frac{۱}{x})^۲+(x-\frac{۱}{x})-\frac{۱۵}{۴}$

❖ **برای حل معادلات شامل عبارات گویا، طرفین معادله را در کوچکترین مضرب مشترک مخرج کسرها ضرب نموده و معادله حاصل را حل می‌کنیم جواب‌هایی از این معادله که مخرج هیچ یک از کسرها را صفر نکنند جواب معادله اصلی می‌باشد.**

مثال: معادله $\frac{۳}{x-۲}+\frac{۴x+۳}{x+۲}=۶$ را حل کنید.

حل: کوچکترین مضرب مشترک $x-۲$ و $x+۲$ برابر است با: $(x+۲)(x-۲)$

طرفین معادله را در این عبارت ضرب می‌کنیم.

$$(x+۲)(x-۲)\left(\frac{۳}{x-۲}+\frac{۴x+۳}{x+۲}\right)=۶(x+۲)(x-۲)\Rightarrow$$
$$۳(x+۲)+(۴x+۳)(x-۲)=۶(x+۲)(x-۲)\Rightarrow$$
$$x^۲+x-۱۲=۰\Rightarrow x=۳\ ,\ x=-۴$$

تمرین:

۱- هریک از معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\frac{x}{x-۱}+\frac{x^۲+x}{x^۲-۱}=۵$

ب) $\frac{x+۱}{۲x-۲}-\frac{x}{۱۰}=\frac{۱}{x-۱}$

ج) $\frac{۲x+۵}{x-۲}-\frac{۲x-۵}{x+۲}=\frac{۱۸}{x^۲-۴}$

د) $\frac{x}{x-۳}-\frac{x}{x+۲}=۷$

هـ) $\frac{۲}{x^۲-۳x+۲}=\frac{۳}{x^۲-۷x+۲}$

۲- به ازای چه مقدار a یکی از ریشه‌های معادله $\frac{a}{x-۱}+\frac{۴}{x+۲}=۱۱$ برابر با ۳ می‌باشد.

۳- به ازای چه مقدار a , b معادله $\frac{a}{x^۲+x+۱}-\frac{b}{x^۲+۳}=۴$ دارای مجموعه جواب $\{۱,-۱\}$ می‌باشد.

❖ برای حل معادلات گنگ، با توان رساندن مناسب طرفین معادله، آن را به یک معادله چند جمله‌ای تبدیل می‌کنیم و معادله حاصل را حل می‌کنیم، جواب‌هایی از این معادله که در معادله اصلی صدق کند، مجموعه جواب معادله می‌باشد.

مثال: معادله $\sqrt{x-۲}-۳=۰$ را حل کنید.

حل:

$$\sqrt{x-۲}-۳=۰\Rightarrow\sqrt{x-۲}=۳\Rightarrow x-۲=۹\Rightarrow x=۱۱$$

چون $x=۱۱$ در معادله اصلی صدق می‌کند، قابل قبول است.

مثال: معادله $\sqrt{x-۱}+x=۳$ را حل کنید.

حل:

$$\sqrt{x-۱}+x=۳\Rightarrow\sqrt{x-۱}=۳-x\Rightarrow x-۱=(۳-x)^۲\Rightarrow x-۱=۹-۶x+x^۲\Rightarrow$$
$$x^۲-۷x+۱۰=۰\Rightarrow x=۲\ ,\ x=۵$$

$x=۲$ در معادله صدق می‌کند ولی $x=۵$ در معادله صدق نمی‌کند بنابراین مجموعه جواب معادله $\{۲\}$ می‌باشد.

تمرین:

۱- مجموعه جواب هر یک از معادلات زیر را بیابید.

الف) $x+\sqrt{x}=۰$ ب) $\sqrt{۲x-۳}-x=-۱$

ج) $\sqrt{x-۳}-\sqrt{x-۲}=۱$ د) $\frac{\sqrt{x^۲-۴}}{\sqrt{x+۲}}=۰$

هـ) $(x^۲-۹)\sqrt{x-۳}=۰$ و) $\sqrt{۳x+۴}-\sqrt{x+۵}=\sqrt{۲x-۷}$

ز) $\sqrt{x-۲}+۱=۰$

۲- عددی بیابید که جذر آن با معکوسش برابر باشد.

۳- آیا عدد صحیحی وجود دارد که با ۳ برابر جذرش برابر باشد.

۴- معادله $\sqrt[۳]{x-۱}+\sqrt[۳]{x+۶}=۳$ را حل کنید.

۵- آیا معادله $\sqrt{x-۳}+\sqrt{x-۴}=\sqrt{۱-x}$ جواب دارد؟

۶- معادله $(x-۱)^۲+\sqrt{x^۲-۳x+۲}+\sqrt{x^۲-x}=۰$ را حل کنید.

❖ **اگر $a\in R$ و نقطه نظیر آن روی محور $x'ox$، A باشد فاصله نقطه A تا مبدأ را قدر مطلق عدد a نامیده و آن را با نماد $|a|$ نمایش می‌دهیم.**

مثال: $|۳|$ برابر است با ۳، زیرا فاصله نقطه نظیر این عدد تا مبدأ ۳ است.

مثال: $|-\sqrt{۲}|$ برابر با $\sqrt{۲}$ می‌باشد، زیرا فاصله نقطه نظیر این عدد تا مبدأ $\sqrt{۲}$ است.

❖ **می‌توان نشان داد که:**

$$|a|=\begin{cases}a & , \quad a\geq ۰\\ -a & , \quad a<۰\end{cases}$$

مثال: هریک از عبارات $|۲-\sqrt{۳}|$, $|\sin x-۱|$, $|۲-\cos x|$, $|x-۵|$را بدون قدر مطلق بنویسید.

حل:

$۲-\sqrt{۳}>۰$ است پس $|۲-\sqrt{۳}|=۲-\sqrt{۳}$.

$\sin x-۱\leq ۰$ می‌باشد بنابراین $|\sin x-۱|=-(\sin x-۱)=۱-\sin x$.

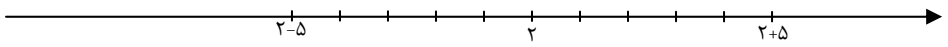
$۲-\cos x>۰$ در نتیجه $|۲-\cos x|=۲-\cos x$.

با توجه به اینکه برای $x\geq ۵$, $x-۵\geq ۰$ و برای $x<۵$, $x-۵<۰$ می‌باشد بنابراین:

$$|x-۵|=\begin{cases}x-۵ & , x\geq ۵\\ ۵-x & , x<۵\end{cases}$$

❖ **برای هر دو عدد حقیقی a , b ، $|a-b|$ را فاصله a تا b گوئیم، واضح است که $|a-b|=|b-a|$.**

مثال: $|x-۲|=۵$ یعنی فاصله x تا ۲ برابر با ۵ می‌باشد که نمایش هندسی آن به صورت



می‌باشد یعنی $x=۷$ یا $x=-۳$

مثال: مجموعه اعدادی که فاصله آن‌ها از عدد -۳ کمتر از ۰/۱است را به صورت قدر مطلق بنویسید.

حل: اگر x عضوی از این مجموعه باشد داریم: $|x-(-۳)|<۰/۱$ به عبارتی $|x+۳|<۰/۱$.

❖ چند ویژگی قدرمطلق:

$|a|=۰ \Leftrightarrow a=۰$

$a=b \Rightarrow |a|=|b|$

$|a|=|b| \Leftrightarrow a=b$ یا $a=-b \Leftrightarrow a^۲=b^۲$

$|-a|=|a|$

$|a-b|=|b-a|$

$|ab|=|a||b|$

$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$, $b\neq ۰$

$|a|^۲=|a^۲|=a^۲$

$|a|^n=|a^n|$, $n\in N$

$\sqrt{a^۲}=|a|$

مثال: معادله $||۲x-۱|-۳|=۸$ را حل کنید.

حل:

$||۲x-۱|-۳|=۸ \Rightarrow |۲x-۱|-۳=۸$ یا $|۲x-۱|-۳=-۸$

اگر $|۲x-۱|-۳=۸$ باشد، داریم $|۲x-۱|=۱۱$. پس $۲x-۱=۱۱$ یا $۲x-۱=-۱۱$. بنابراین $x=۶$ یا $x=-۵$.

اگر $|۲x-۱|-۳=-۸$ باشد، داریم $|۲x-۱|=-۵$ که غیر ممکن است.

مثال: معادله $|x^۲-۱|-|x-۱|=۰$ را حل کنید.

حل:

$$|x^۲-۱|-|x-۱|=۰ \Rightarrow |x^۲-۱|=|x-۱| \Rightarrow x^۲-۱=x-۱ \text{ یا } x^۲-۱=-(x-۱)$$

$$x^۲-۱=x-۱ \Rightarrow x^۲=x \Rightarrow x(x-۱)=۰ \Rightarrow x=۰ \text{ یا } x=۱$$

$$x^۲-۱=-(x-۱) \Rightarrow x^۲+x-۲=۰ \Rightarrow (x+۲)(x-۱)=۰ \Rightarrow x=-۲ \ , \ x=+۱$$

مثال: معادله $\sqrt{x^۲+۲x+۱}-۳|x-۲|+۷x=۱۶$ را حل کنید.

حل: چون $\sqrt{x^۲+۲x+۱}=|x+۱|$ و صفرهای $(x+۱)$ و $(x-۲)$ مساوی -۱ و ۲ می‌باشد داریم:

$$\begin{cases} x<-۱ \\ -(x+۱)+۳(x-۲)+۷x=۱۶ \Rightarrow x=\frac{۲۳}{۹} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -۱\le x\le ۲ \\ x+۱+۳(x-۲)+۷x=۱۶ \Rightarrow x=\frac{۲۱}{۱۱} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>۲ \\ x+۱-۳(x-۲)+۷x=۱۶ \Rightarrow x=\frac{۹}{۵} \end{cases}$$

با توجه به محدوده x تنها جواب قابل قبول $\frac{۲۱}{۱۱}$ می‌باشد.

تمرین:

۱- هریک از معادلات زیر را حل کنید.

الف) $|x^۲-۴|=۲$ ب) $\sqrt{x^۲-۴x+۴}=x$

ج) $|۲x-۱|-|x+۱|=۰$ د) $۲|x-۱|+۴|x-۷|+۹x=۲۰$

هـ) $|x+۲|+|x-۳|=۱$ و) $\sqrt{۴x^۲-۴x+۱}-\sqrt{x^۲+۶x+۹}+۲x=۰$

۲- نمودار $y=|x-۱|$ را رسم کنید.

۳- نمودار $y=۳|x-۱|-|x+۱|$ را رسم کنید.

۴- نمودار $y=|۲x-۱|+|x-۳|$ را رسم کنید.

۵- نمودار $|x-۲|+|y-۱|=۲$ را رسم کنید.

❖ چند ویژگی قدرمطلق:

$$-|a| \le a \le |a|$$
$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \Leftrightarrow x^2 < a^2 \ , \ (a > 0)$$
$$|x| > a \Leftrightarrow x < -a \ , \ x > a \Leftrightarrow x^2 > a^2 \ , \ (a \ge 0)$$
$$|a+b| \le |a| + |b|$$
$$|a-b| \le |a| + |b|$$
$$|a+b| \ge |a| - |b|$$
$$|a-b| \ge |a| - |b|$$
$$|a_1 + a_2 + ... + a_n| \le |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|$$
$$|a-b| \le |a-c| + |b-c|$$

مثال: نامعادله $|2x-3| < 4$ را حل کنید.

حل:

$$|2x-3| < 4 \Rightarrow -4 < 2x-3 < 4 \Rightarrow -1 < 2x < 7 \Rightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}$$

مثال: مجموعه جواب نامعادله $-1 < \frac{3}{x-2} < 1$ را بیابید.

حل:

$$-1 < \frac{3}{x-2} < 1 \Rightarrow \left|\frac{3}{x-2}\right| < 1 \Rightarrow \left|\frac{x-2}{3}\right| > 1 \Rightarrow \frac{x-2}{3} > 1 \text{ یا } \frac{x-2}{3} < -1 \Rightarrow x > 5 \text{ یا } x < -1$$

بنابراین مجموعه جواب معادله عبارت است از:

$$\{x \mid x < -1 \text{ یا } x > 5\}$$

تمرین:

۱- نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $|x-1| - x < 2$ ب) $|3x+2| < |x-2|$

ج) $|1-5x| - 5 < 0$ د) $|x^2+x+1| - |x^2-x+5| < 0$

هـ) $|4x-1| - 3x - 1 < 0$

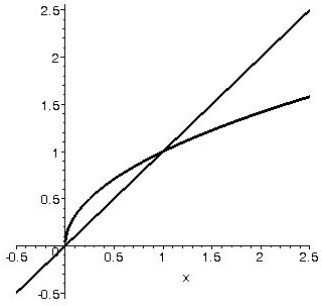
۲- مجموعه جواب نامعادله $|2x-3| < x$ را به صورت $|x-\alpha| < \beta$ نوشته‌ایم $3\alpha - 2\beta$ را بیابید.

۳- مجموعه جواب دستگاه $\begin{cases} |x| < 2 \\ 2x-1 < |x| \end{cases}$ را بیابید.

❖ **برای بدست آوردن مجموعه جواب نامعادله $f(x)<g(x)$ نمودار توابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ را رسم می‌کنیم و سپس طول نقاطی را پیدا می‌کنیم که نمودار $y=f(x)$ زیر نمودار $y=g(x)$ واقع باشد و در ضمن $f(x)$ و $g(x)$ با معنی باشد.**

مثال: مجموعه جواب نامعادله $x<\sqrt{x}$ را بیابید.

حل: نمودار توابع $y=x$, $y=\sqrt{x}$ به صورت زیر می‌باشد که با توجه به نمودار مجموعه جواب مجموعه‌ی $(۰\ ,\ ۱)$ می‌باشد.

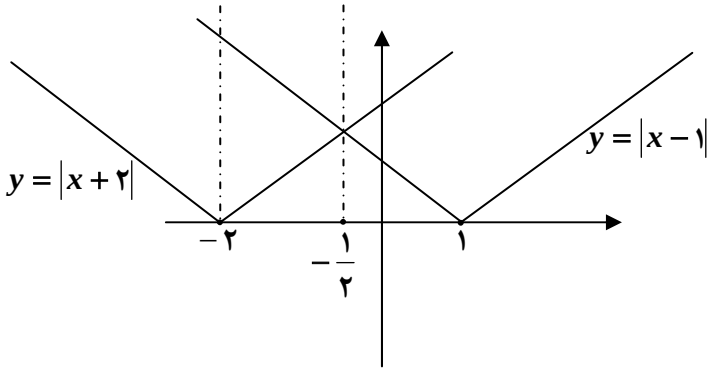


مثال: مجموعه جواب نامعادله $|x-۱|-|x+۲|<۰$ را بیابید.

حل:

$$|x-۱|-|x+۲|<۰\Rightarrow|x-۱|<|x+۲|$$

نمودار $y=|x-۱|$ و $y=|x+۲|$ به صورت زیر می‌باشد که با توجه به نمودار مجموعه جواب $(-\frac{۱}{۲},\infty)$ می‌باشد



تمرین:

مجموعه جواب نامعادلات زیر را به روش هندسی بیابید.

الف) $\sqrt{x^۲}-x<۰$ ب) $|x-۱|<۳$

ج) $|x+۱|+|x-۲|<۴$ د) $\sqrt{x-۱}-x>۰$

هـ) $\sqrt{x^۲+۴x+۴}-\sqrt{x^۲-۲x+۱}>۰$