تهیه و تنظیم : هادی پلاور

ریاضیات | سراسری ۹۲

۱۰۱- گزینه‌ی«۱»

در دو حالت نمودار معادله‌ی درجه ۲ از ناحیه‌ی اول مختصات نمی‌گذرد.

الف) $\begin{cases}\Delta \le 0 \\ (x^2 \text{ ضریب }) < 0\end{cases}$ ج) $\begin{cases}\Delta > 0 \\ \alpha\beta > 0 \\ \alpha+\beta < 0 \\ (x^2 \text{ ضریب }) < 0\end{cases}$

الف)

$\Delta = a^2 - 4(-1)(a-3) = a^2 + 4a - 12 = (a+6)(a-2) < 0 \Rightarrow -6 \le a \le 2$ (۱)

$a - 3 < 0 \Rightarrow a < 3$ (۲)

$(1),(2) \Rightarrow -6 \le a \le 2$ (*)

ب) $\Delta = (a+6)(a-2) > 0 \Rightarrow -6 > a$ یا $a > 2$ (۱)

$\alpha\beta = \frac{-1}{a-3} > 0 \Rightarrow a - 3 < 0 \Rightarrow a < 3$ (۲)

$\alpha + \beta = \frac{-a}{a-3} < 0 \Rightarrow$

	a		0		3	
$\frac{-a}{a-3}$	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

$\Rightarrow a < 0$ یا $a > 3$ (۳)

$(x^2 \text{ ضریب}) < 0 \Rightarrow a - 3 < 0 \Rightarrow a < 3$ (۴)

$(1),(2),(3),(4) \Rightarrow a < -6$ (**)

از اجتماع (الف) و (ب) داریم:

$(*),(**) \Rightarrow a \le 2$

۱۰۲- گزینه‌ی«۳»

باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد یعنی $xf(x) \ge 0$.

	-4		-3		0		1		2	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$		
$f(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	0	
$x.f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	

$x.f(x) \ge 0 \Rightarrow -3 \le x < 0$ یا $1 \le x \le 2$

$\Rightarrow x \in [-3,0] \cup [1,2]$

۱۰۳- گزینه‌ی«۱»

$$y = a\sin\pi(\frac{۱}{۲}+bx) = a\sin(\frac{\pi}{۲}+b\pi x) = a\cos(b\pi x)$$

$$\xrightarrow{(۰,۲)} ۲ = a\cos(b\pi(۰)) \Rightarrow ۲ = a\times\cos۰ \Rightarrow a = ۲$$

از طرفی شکل نمودار مربوط به ۳ دوره‌ی تناوب است. می‌دانیم دوره تناوب نمودار توابع $y = a\sin(bx)$ و $y = a\cos(bx)$ $(a,b\neq ۰)$ برابر $T = \frac{۲\pi}{|b|}$ است بنابراین برای تابع $y = ۲\cos(b\pi x)$ داریم:

$$۳T = ۳/۵ - (-۲/۵) = ۶$$

$$\Rightarrow T = \frac{۶}{۳} = ۲ \Rightarrow \frac{۲\pi}{b\pi} = ۲ \Rightarrow \frac{۲}{b} = ۲ \Rightarrow b = ۱$$

$$a.b = ۲\times۱ = ۲$$

۱۰۴- گزینه‌ی«۲»

۳ دانش‌آموز را از ۶ منطقه کشور انتخاب کنیم.

$$\binom{۶}{۳} = \frac{۶!}{۳!۳!} = ۲۰$$

چون هر منطقه ۱۵ دانش‌آموز دارد. بنابراین هر دانش‌آموز انتخابی به ۱۵ طریق می‌تواند انتخاب شود. پس:

$$۲۰\times۱۵\times۱۵\times۱۵ = ۶۷۵۰۰$$

۱۰۵- گزینه‌ی«۳»

معادله درجه ۲ که جواب‌های آن $x_۱$ و $x_۲$ باشد به صورت $x^۲ - Sx + P = ۰$ است که در آن $S = x_۱ + s_۲$ و $P = x_۱x_۲$

$$۲x^۲ - ۳x - ۴ = ۰ \Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta = \frac{-(-۳)}{۲} = \frac{۳}{۲}\\ \alpha\beta = \frac{-۴}{۲} = -۲\end{cases}$$

$$S = (\frac{۱}{\alpha}+۱)+(\frac{۱}{\beta}+۱) = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+۲ = \frac{\frac{۳}{۲}}{-۲}+۲ = \frac{۵}{۴}$$

$$P = (\frac{۱}{\alpha}+۱)(\frac{۱}{\beta}+۱) = \frac{۱}{\alpha\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+۱ = \frac{۱}{-۲}+\frac{\frac{۳}{۲}}{-۲}+۱ = \frac{-۱}{۴}$$

$$x^۲ - Sx + P = ۰ \Rightarrow x^۲ - \frac{۵}{۴}x - \frac{۱}{۴} = ۰ \Rightarrow ۴x^۲ - ۵x - ۱ = ۰$$

۱۰۶- گزینه‌ی«۴»

ابتدا تعیین علامت می‌کنیم:

$$x > ۰ \Rightarrow (x-۴)x < ۲x - ۵ \Rightarrow x^۲ - ۴x < ۲x - ۵ \Rightarrow x^۲ - ۶x + ۵ < ۰$$

$$(x-۵)(x-۱) < ۰ \xrightarrow{x>۰} ۱ < x < ۵ \qquad (۱)$$

$$x < ۰ \Rightarrow (x-۴)(-x) < ۲x - ۵ \Rightarrow -x^۲ + ۴x < ۲x - ۵ \Rightarrow -x^۲ + ۲x + ۵ < ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۲x - ۵ > ۰ \Rightarrow (x-۱)^۲ - ۶ > ۰ \Rightarrow x - ۱ > \sqrt{۶} \text{ یا } x - ۱ < -\sqrt{۶}$$

$$\Rightarrow x > ۱ + \sqrt{۶} \text{ یا } x < ۱ - \sqrt{۶} \xrightarrow{x<۰} x \in (-\infty \text{ یا } ۱ - \sqrt{۶}) \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow (-\infty, ۱-\sqrt{۶}) \cup (۱,۵)$$

۱۰۷- گزینه‌ی«۳»

$$\begin{cases} g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20 \\ f(x) = 2x + 3 \end{cases} \Rightarrow g(2x+3) = 8x^2 + 22x + 20$$

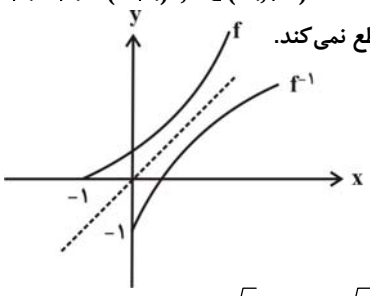
از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم:

$$2x + 3 = t \Rightarrow 2x = t - 3$$
$$g(2x+3) = 2(2x)^2 + 11(2x) + 20 \Rightarrow g(t) = 2(t-3)^2 + 11(t-3) + 20$$
$$\Rightarrow g(x) = 2x^2 - x + 5 \Rightarrow fog(x) = 2(2x^2 - x + 5) + 3 = 4x^2 - 2x + 13$$

۱۰۸- گزینه‌ی«۴»

$$f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2, x \in (-1, +\infty)$$

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل، f و f^{-1} در هیچ نقطه‌ای یکدیگر را قطع نمی‌کند.



۱۰۹- گزینه‌ی«۳»

$$2\sqrt{2}\sin x\cos x = \sin x + \cos x \Rightarrow \sqrt{2}\sin 2x = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow \sin 2x = \sin(x + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} & (1) \\ 2x = 2k\pi + \pi - x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4} & (2) \end{cases}$$

اجتماع (۱) و (۲) جواب مسأله است که برابر $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$

نکات درسی: $\begin{cases} \sin 2x = 2\sin x\cos x \\ \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) \end{cases}$

۱۱۰- گزینه‌ی«۲»

ابتدا حدود x را مشخص می‌کنیم:

$$\sin^{-1}(x^2 + x + 1) \Rightarrow -1 \le x^2 + x + 1 \le 1 \qquad (1)$$
$$\tan^{-1}\sqrt{x^2 + x} \Rightarrow x^2 + x \ge 0 \Rightarrow x^2 + x + 1 \ge 1 \qquad (2)$$
$$(1),(2) \Rightarrow x^2 + x + 1 = 1 \Rightarrow x^2 + x = 0$$
$$\tan^{-1}\sqrt{x^2 + x} + \sin^{-1}(x^2 + x + 1) \xrightarrow{x^2 + x = 0} \tan^{-1}(0) + \sin^{-1}(0 + 1) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

۱۱۱- گزینه‌ی«۲»

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin x}}{\cos(x + \frac{\pi}{4})} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{(\sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin x})(\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x})}{\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x - \sin x)(\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x})}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)}{(\cos x - \sin x) \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times 2(\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}})} = \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2^{(-\frac{1}{2})}}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}} \times 2^{-\frac{1}{4}}} = 2^{-\frac{1}{4}} \Rightarrow 2^{-\frac{1}{4}} = 2^a \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

۱۱۲- گزینه‌ی«۱»

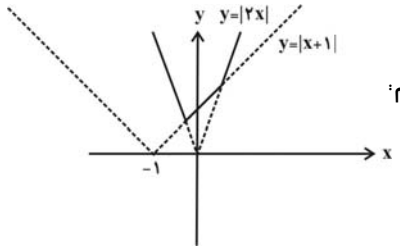
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=f'(-1)$$

$$f'(-1)=\lim_{x\to(-1)}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim_{x\to(-1)}\frac{(x^2-x-2)\sqrt[3]{x^2-7x}-0}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to(-1)}\frac{(x+1)(x-2)\sqrt[3]{x^2-7x}}{(x+1)}=\lim_{x\to(-1)}(x-2)\sqrt[3]{x^2-7x}=-3\times\sqrt[3]{8}=-6$$

۱۱۳- گزینه‌ی«۲»

نمودار تابع $f(x)=\max\{|2x|,|x+1|\}$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل نقطه‌ی می‌نیمم تابع محل برخورد دو تابع $y=|2x|$ و $y=|x+1|$ است داریم:

طول نقطه‌ی می‌نیمم $|x+1|=|2x|\xrightarrow{-1<x<0}x+1=-2x\Rightarrow 3x=-1\Rightarrow x=-\frac{1}{3}$

$$y=|2x|\xrightarrow{x=\frac{-1}{3}}y=|2(\frac{-1}{3})|=|\frac{-2}{3}|=\frac{2}{3}$$

۱۱۴- گزینه‌ی«۱»

روش اول: هوپیتال:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(1+\cos x)}{1-\cos 2x}\overset{Hop}{=\!=}\lim_{x\to\pi}\frac{-\sin x\times\cos(1+\cos x)}{2\sin 2x}=\lim_{x\to\pi}\frac{-\sin x\times\cos(1+\cos x)}{4\sin x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{-\cos(1+\cos x)}{4\cos x}=\frac{-\cos(1-1)}{4\cos\pi}=\frac{-1}{-4}=\frac{1}{4}$$

روش دوم: استفاده از تغییر متغیر:

$$x-\pi=t\Rightarrow x=\pi+t\qquad(x\to\pi\Rightarrow t\to 0)$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin(1+\cos(\pi+t))}{1-\cos(2(\pi+t))}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(1-\cos t)}{1-\cos 2t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(2\sin^2(\frac{t}{2}))}{2\sin^2(\frac{t}{2})}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(2\sin^2(\frac{t}{2}))}{2\sin^2(\frac{t}{2})}\times\frac{2\sin^2(\frac{t}{2})}{2\sin^2 t}=\lim_{t\to 0}(1\times\frac{2(\frac{t}{2})^2}{2t^2})=\frac{1}{4}$$

نکته: $1+\cos t=2\sin^2(\frac{t}{2})$

۱۱۵- گزینه‌ی«۴»

نکته $[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in Z\\ -1 & x\notin Z\end{cases}$

$$f(x)=[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in Z\\ -1 & x\notin Z\end{cases}\Rightarrow g(x)=\begin{cases}-1 & x\notin Z\\ 0-1 & x\in Z\end{cases}\Rightarrow g(x)=-1$$

بنابراین تابع g همواره پیوسته است.

۱۱۶- گزینه‌ی«۴»

$$f(x)=x+\sqrt[3]{x^2-x^3}=x-\sqrt[3]{x^3-x^2}$$

داریم:

$$\sqrt[3]{x^3}\geq\sqrt[3]{x^3-x^2}\Rightarrow x\geq\sqrt[3]{x^3-x^2}\Rightarrow x-\sqrt[3]{x^3-x^2}\geq 0\Rightarrow f(x)\geq 0$$

بنابراین f همواره نامنفی است بنابراین کم‌ترین مقدار f برابر صفر است.

۱۱۷- گزینه‌ی«۲»

تابع f روی هر یک از ضابطه‌هایش پیوسته و مشتق‌پذیر است. مشتق‌پذیری f را روی نقطه‌ی مرزی آن بررسی می‌کنیم.

۱) شرط پیوستگی: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(ax^3+bx)=a+b\\ f(1)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}2\sqrt{4x-3}=2\end{cases}\Rightarrow a+b=2\qquad(1)$$

۲) $f'_-(1)=f'_+(1)$

$$f(x)=\begin{cases}ax^3+bx & ; \quad x<1\\ 2\sqrt{4x-3} & ; \quad x\geq 1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}3ax^2+b & ; \quad x<1\\ 2\times\dfrac{4}{2\sqrt{4x-3}} & ; \quad x>1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}f'_+(1)=\dfrac{4}{\sqrt{4-3}}=4\\ f'_-(1)=3a(1)^2+b=3a+b\end{cases}\Rightarrow 3a+b=4\qquad(2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow a=1,b=1$$

۱۱۸- گزینه‌ی«۲»

$$f'(g(x)).g'(x)=[f(g(x))]'$$

$$f(g(x))=\frac{(\sqrt[3]{x-1})^3-2}{1+(\sqrt[3]{x-1})^3}=\frac{x-1-2}{1+x-1}=\frac{x-3}{x}=1-\frac{3}{x}$$

$$[f(g(x))]'=(1-\frac{3}{x})'=0-(\frac{-3}{x^2})=\frac{3}{x^2}$$

۱۱۹- گزینه‌ی«۳»

$$(e,\alpha)\in f^{-1}\Rightarrow(a,e)\in f\qquad(1)$$

$$f(x)=xe^x\xrightarrow{(1)}f(a)=ae^a=e\xrightarrow{x>0}a=1\Rightarrow(e,1)\in f^{-1}$$

معادله‌ی خط مماس بر f^{-1} در نقطه‌ی $(e,1)$.

$$y-1=(f^{-1})'(e)(x-e)\qquad(2)$$

$$(f^{-1})'(e)=\frac{1}{f'(1)}\qquad(3)$$

$$f(x)=xe^x\Rightarrow f'(x)=e^x+xe^x\Rightarrow f'(1)=e+1\times e=2e\qquad(4)$$

$$(2),(3),(4)\Rightarrow y-1=\frac{1}{2e}(x-e)$$

طول نقطه‌ی برخورد خط با محور yها برابر صفر است.

$$x=0\Rightarrow y-1=\frac{1}{2e}(0-e)\Rightarrow y-1=\frac{-1}{2}\Rightarrow y=\frac{1}{2}$$ عرض نقطه‌ی برخورد

نکته: اگر $(a,b)\in f$ باشد. داریم:

$$(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}$$

۱۲۰- گزینه‌ی«۴»

تقعر منحنی به سمت بالا باشد یعنی $y'' > 0$.

$$y = x^4 + ax^3 + \frac{3}{2}x^2 \Rightarrow y' = 4x^3 + 3ax^2 + 3x \Rightarrow y'' = 12x^2 + 6ax + 3$$

$$y'' = 3(4x^2 + 2ax + 1)$$

برای این‌که y'' بزرگ‌تر از صفر باشد چون y'' تابع درجه ۲ است باید:

$$\begin{cases} \Delta < 0 \\ (x^2 \text{ ضریب }) > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (2a)^2 - 4(4)(1) < 0 \\ 4 > 0 \text{ همواره برقرار} \end{cases} \qquad \Rightarrow 4a^2 - 16 < 0 \Rightarrow a^2 < 4 \Rightarrow -2 < a < 2$$

۱۲۱- گزینه‌ی«۴»

$$y = x|x^2 - 4x| \Rightarrow y = \begin{cases} (x^3 - 4x^2) & ; \quad x \geq 4 \text{ یا } x \leq 0 \\ -(x^3 - 4x^2) & ; \quad 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} 3x^2 - 8x & ; \quad x > 4 \text{ یا } x < 0 \\ -(3x^2 - 8x) & ; \quad 0 < x < 4 \end{cases}$$

$$y'' = \begin{cases} 6x - 8 & ; \quad x > 4 \text{ یا } x < 0 \\ -(6x - 8) & ; \quad 0 < x < 4 \end{cases}$$

نقاطی که در آن $y'' = 0$ باشد و یا وجود نداشته باشد به شرط آن که y'' تغییر علامت بدهد، نقاط عطف هستند اما باید دقت کنید این نقاط باید عضو دامنه‌ی y و y' باشند یعنی بتوان در این نقاط خط مماس رسم کرد.

$$y'' = 0 \Rightarrow -(6x - 8) = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

y'' وجود ندارد. $x = 0, 4$

در $x = 4$، $y'_+(4) \neq y'_-(4)$ بنابراین y'' وجود ندارد. بنابراین این نقطه عطف نیست پس در مجموع دو نقطه‌ی عطف $\{0, \frac{4}{3}\}$ داریم.

۱۲۲- گزینه‌ی«۱»

مجانب قائم f خط $x = 1$ است. بنابراین $x = 1$ باید ریشه‌ی مخرج باشد. از طرفی با توجه به این که وقتی $x \to 1$، $y \to +\infty$ بنابراین $x = 1$ ریشه‌ی مکرر مخرج است.

$$x^2 + bx + c \equiv (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow b = -2, c = 1 \qquad (1)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2(x+a)}{(x-1)^2}$$

از طرفی ریشه‌های f برابر است با:

$$x^2(x+a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -a \end{cases}$$

اما دقت کنید با توجه به شکل f تنها یک ریشه در $x = 0$ دارد بنابراین:

$$-a = 0 \Rightarrow a = 0 \qquad (2)$$

$$(2), (1) \Rightarrow bc - a = (-2)(1) - 0 = -2$$

۱۲۳- گزینه‌ی«۲»

قضیه‌ی مقدار میانگین در انتگرال: $f(c)=\frac{\int_{0}^{4}\sqrt{x}dx}{4-0}\Rightarrow f(c)=\frac{(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}})\Big|_{0}^{4}}{4}=\frac{\frac{2}{3}4^{\frac{3}{2}}}{4}=\frac{\frac{2}{3}\times 8}{4}=\frac{4}{3}$

$\sqrt{c}=\frac{4}{3}\Rightarrow c=\frac{16}{9}$

۱۲۴- گزینه‌ی«۳»

$(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{x^2})^2+1=(\frac{x^2}{4})^2+(\frac{1}{x^2})^2-2(\frac{1}{4})(x^2)(\frac{1}{x^2})+1=(\frac{x^2}{4})^2+(\frac{1}{x^2})^2+\frac{1}{2}=(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{x^2})^2$

$\Rightarrow\int_{1}^{4}\sqrt{(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{x^2})^2+1}dx=\int_{1}^{4}\sqrt{(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{x^2})^2}dx=\int_{1}^{4}(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{x^2})dx=(\frac{x^3}{12}-\frac{1}{x})\Big|_{1}^{4}=(\frac{4^3}{12}-\frac{1}{4})-(\frac{1}{12}-1)=6$