بسم الله الرحمن الرحیم

رهیافت
و
حل مسئله ریاضی

عظیمه سادات خاکباز
دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی
دانشگاه شهید باهنرکرمان

بهار ۱۳۸۵

مقدمه :
درطول حل مسئله واقعا چه روی می دهد؟چه دانشی برای مسئله حل کن به کار می آید؟این دانش چگونه انتخاب میشود؟چه رابطه ا ی بین فهمیدن مسئله و حل آن است؟چه مقدار تلاش برای حل مسئله احتیاج است؟وسوالاتی از این قبیل ذهن بشر را به خود مشغول کرده است وهدف از مطالعه روی آنچه مسئله حل کن انجام می دهد توضیحی برای این قبیل سوالات است.چهارچوب کلی برای تجزیه وتحلیل رفتارمسئله حل کن به اعتقاد **شونفلد** از چهار بخش اصلی تشکیل شده است.

او در کتابش بیان می کند این چهاربخش عبارتند از:
۱.**ذخائردانشی**
۲.**رهگشایی نوین (رهیافت)**
۳.**کنترل**
۴.**سیستم باورها**
تجربیات مسئله حل کن بر اساس دانش او از ریاضیات است که ما آن راذخائردانشی گوییم.مسئله حل کن باید با حوزه ی وسیعی از تکنیکهای حل مسئله آشنا شود که به آنها رهیافت گوییم.برای موفقیت در حل مسئله باید این ذخائر دانشی را در اختیار گرفته وهدایت کند.روشهای رهگشایی باید کنترل شوند.گروه آخر یعنی سیستم باورها خیلی ظریف است.زیرا آزمایش روی مسئله حل کردن دانش آموزان نشان می داد که خیلی از آنها دچار سوء تعبیر در مفاهیم ریاضی هستندواین روی رفتار مسئله حل کردن آنها تأثیر منفی می گذارد.
چهارچوب تجزیه رفتار ریاضی:
الف)ذخائردانشی:
برای فهمیدن اینکه تلاش برای حل مسئله چگونه باعث استنتاج راه حل آن می شود باید اول بدانیم مسئله حل کن با چه ابزاری شروع می کند.اولین گروه که باید برای این موضوع مورد بررسی قرارگیرد ذخائر دانشی است.این که ما بفهمیم در توضیح رفتار مسئله حل کن بیشتر با معرفت شناسی تکوینی سروکارداریم تا با معرفت شناسی مجرد ریاضی حائز اهمیت است.ما مجبوریم رفتارها ودانش فرد را مورد بررسی قرار دهیم تا بفهمیم اطلاعات چگونه طبقه بندی می شوند ودر دسترس قرار می گیرند.در واقع ذخائر دانشی پایه هایی هستند که ساختمان حل مسئله روی آن بنا می شود.شناخت این پایه هاکه مرکب است از آنچه مسئله حل کن می داند ویا روشهایی که برای حل مسئله به کار می برد.برای درک وقایعی که حین حل مسئله رخ می دهد امری اساسی است.از میان آگاهیها وذخائردانشی که به حل مسئله مربوط می شوندمی توان به موارد زیر اشاره کرد:
۱.آگاهیهای غیرصوری وشهودی درباره ی موضوع
۲.واقعیتهاوتعریفهاوامثالهم
۳.فرآیندهای الگوریتمی
۴.فرآیندهای سرراست وامثالهم
۵.آگاهی از قوانین آن موضوع
ب)رهیافت:
وقتیکه **پولیا** در سال ۱۹۴۵کتاب **چگونه حل کنیم** را منتشر کرد مطالعه ی رهیافت کاملا فراموش شده بود.**چگونه حل کنیم** کوششی برای زنده کردن رهگشایی نوین بود و راهنمایی برای تکنیکهای حل مسئله محسوب می شد.**چگونه حل کنیم** به سبکی مقدماتی ودو جلد کتاب ریاضیات واستدلال: استقراوقیاس در ریاضی والگوهای استنباط که در هردو استراتژیهای رهیافت با مهارت به کاررفته بودند به شکل مبسوطتر در پی این هدف بودند.
استراتژیهای رهیافت قوانینی هستند برای حل موفق مسئله،پیشنهادهای کلی که به فرد کمک می کندتا مسئله را بهتر بفهمد وراهی برای حل آن بیابد.آن استراتژیها شامل به کار بردن شباهتها،معرفی کردن عناصرکمکی

یا کار کردن با مسائل کمکی، استدلال با استفاده از تناقض، تجزیه وترکیب، به کار بردن مسائل وابسته، ترسیم شکل، استفاده از برهان خلف، تخصیص، استفاده از برهان غیر مستقیم، تغییرمسئله وبرعکس عمل کردن است. ریاضیدانان بر کارامد بودن این استراتژیها اجماع دارند.

ج) کنترل:

این گروه ازرفتارها برای این است که اطلاعاتی به شکل پتانسیلی در اختیار فرد قرار دهد. این گروه بیشتر بر آنچه در فرآیند حل مسئله انجام می شودونظراتی که داده می شودوبه طور خلاصه بر کوشش برای حل مسئله متمرکز است. رفتارهایی مثل ساختن طرح، انتخاب هدف کلی واهداف جزئی، نشان دادن آنچه از راه حل استنتاج می شود، تجدید نظر کردن یا رها کردن نقشه، ارزیابی کارهایی که باید انجام شود، نظریات راهنما یا نظریات استراتژیکی همه نوعی فرآیندکنترل محسوب میشود. درانتها به **فراشناخت** می رسیم، زیراکنترل عملیات حل مسئله به دیدگاهی که شخص نسبت به افکار خوددارد یعنی این که میداندچه می کندمربوط است واین به نوعی با باورهای ریاضی او ارتباط پیدا می کند.

د) سیستم باورها:

دراین بخش طبیعت تجربه گرایانه ی دانش آموزان وآثارباورهای آنها روی تجربه های حل مسئله شان توضیح داده میشود. ممکن است آن دانش آموزان فاقدطبیعت فهمیدن بحثهای ریاضی باشندورابطه ای بین مسائل کمکی و مسئله ی اصلی نبینند، این مشکلات منشأ شناختی دارندوبسیاری از دانش آموزان با این مشکلات روبرو هستند. اغلب اینگونه دانش آموزان بسیار سطحی نگرهستندواز ابزارهاوپتانسیلهای ریاضی که در دسترس دارند استفاده نمی کنند، چون برایشان کارآیی آن ابزار ناشناخته بوده و موقعیت استفاده از آنها برایشان پیش نیامده است. برای این قبیل دانش آموزان بحثهای مربوط به فرآیندهای کشف ساختار مسائل ریاضی مبهم است. سه باور از باورهای دانش آموزان و نتایج آنها در زیر بیان شده است.

باوراول: ریاضیات صوری در حل مسئله تأثیرناچیزی دارد.

نتیجه : دریک مسئله ریاضی صوری به کار نمی آید.

باوردوم: اگر مسئله ای حل شدنی باشد باید درکمترازده دقیقه حل شود.

نتیجه: اگر فردی نتواند مسئله ای را در ده دقیقه حل کند باید آن را رها کند.

باورسوم: فقط نوابغ قادربه اکتشاف درریاضی هستند.

نتیجه اول: اگر شما هنگام حل مسئله چیزی رافراموش کنید اتفاق بدی افتاده است چون شما نابغه نیستیدوقادر نخواهید بود که خودتان آن را حل کنید.

نتیجه دوم: شاگردان باید تسلیم مسائل بوده و سعی نکنند که بفهمند چرا آن عملیات خاص را هنگام حل مسئله انجام میدهند. باورها بسیار بحث برانگیزندوبه چندین بخش طبقه بندی می شوند، نکته ی اصلی اینکه دیدهرشخص نسبت به ریاضی راهی راکه او در حل مسئله پیش می گیرد شکل می دهد.

حال که طرح مختصری از آنالیز رفتاری مسئله حل کن در برخوردبا مسائل ریاضی از دیدگاه **شونفلد** رابیان کردیم به شرح قسمت دوم از این دسته بندی چهارگروهی یعنی رهگشایی نوین یا **رهیافت** را بیشترمورد بررسی قرار خواهیم داد.

رهگشایی نوین (رهیافت):

"رهیافت نام شاخه ای از مطالعات است که چگونگی آن هنوز به درستی معلوم نشده است. فلسفه، منطق، رروانشناسی به صورت مختصر در این شاخه بیان شده اند اما به ندرت از جزئیات آنها چیزی می بینیم. این شاخه دیگر امروزه به طور کامل فراموش شده است. هدف رهیافت مطالعه روشها وقوانین اکتشاف وابداع است ...

به طورخلاصه رهیافت یعنی به کار رفتن در اکتشاف. "ج.پولیا.چگونه حل کنیم.

سی و پنج سال بعد از بیان اهداف رهیافت که توسط **پولیا** بیان شد،**شورای معلمان آمریکا** در سال۱۹۸۰دستورکاری راتحت عنوان **نظریه هایی در ریاضی مدارس** منتشرکرد.دستورالعمل آن چنین بود:**حل مسئله درسرلوحه ی برنامه ی ریاضی مدارس قرار می گیرد.**برای کمک به تحقق چنین هدفی سالنامه ی این شورا به حل مسئله در ریاضیات مدارس اختصاص یافت.درسالنامه هاوانتشارات بعدی این شورا هم موضوعات مشابهی دنبال شد.برای رواج بیشتر این نظرات درداخل جلدسالنامه الگوی چهارمرحله ای به نقل ازچگونه **حل کنیم** نقش بسته بود.علاوه بر این همه ی مقالات سالنامه به واقع براساس اندیشه های **پولیا** نوشته شده بود.خلاصه آنکه **حل مسئله در آموزش ریاضی یعنی حل مسئله به سبک پولیا.**

فلسفه ی رهیافت:

براساس تعریف **پولیا**روش حل مسئله درواقع تدبیری است که دوباربه کار رفته است.اومعتقدبودکه اگرروشی دوبارموفق شود فردهنگام روبرویی بامسائل مشابه آن رابه کار می برد،دراین حالت روش حل مسئله به یک استراتژی تبدیل می شود.بنابراین هرفرد مجموعه ای از استراتژیهای حل مسئله داردولی این به این معنی نیست که دوفرددر برخوردبایک مسئله باید به شیوه ی مشابه عمل کنند،بلکهآنها یک فصل مشترک دارند و]ن تلاش برای حل مسئله است.

باکالبدشکافی درآنچه مسئله حل کن انجام می دهدتعدادزیادی از این استراتژیهای راهیابانه قابل شناسایی است.این همان پروژه هایی است که **پولیا**تحت عنوان **واژه نامه ی راهیابی** در کتاب **چگونه حل کنیم** به کاربرد.

پس از کشف استراتژیهای راهیابی گام بعدی گردآوری این استراتژیها به صورت شفاف است تا مسئله حل کن هنگام حل مسائل دشواروطولانی به وسیله ی این اصول عمومی که درواقع برگرفته از رفتارخودش است بتواند به موفقیت برسد.اما اینجا مشکلی سرراه است وآن اینکه اگر تلاش نباشداین استراتژیهابه کار نمی آیند.

ادبیات آموزش ریاضی پرازمطالعات درباره ی رهیافت است.برای مثال تحقیقات **ویلسون(۱۹۶۷)** و**اسمیت(۱۹۷۳)** نشان می دادکه به نظر می آیدرهیافت در موقعیتهای جدید خوب عمل نمی کند.نمرات آزمون موفقیت نشاندهنده همبستگی بین استفاده از رهیافت وموفقیت در حل مسئله بودامانتایج دوگانه ای را هم نشان می دادکه توسط **لومر(۱۹۸۰)** و**گلدبرگ(۱۹۷۴)** بیان شد.

به طور خلاصه رهیافت بسیار پیچیده تر از آن بودکه انتظار می رفت.۷۵مطالعه ی تجربی روی استراتژیهای حل مسئله این موضوع راروشن می کرد.تلاشهابرای ارائه برنامه های حل مسئله براساس رهیافت شبیه به آنچه که پولیا انجام داد ناموفق بود،وعلی رقم آنکه توجه زیادی رادرآموزش ریاضی به خوداختصاص دادجزئیات کافی نداشت.درواقع باید ساختاری تهیه می شد با جزئیات کافی تا مسئله حل کن بتوانددربرخورد با مسائل از آن استفاده کند. دراغلب مطالعات استراتژیهای رهیافت دستورالعمل مناسبی نداشتندوحاوی جزئیات کافی به عنوان راهنمای فرآیندحل مسئله نبود.

این سوال که از کدام استراتژی وکجاوچه وقت باید استفاده کردبه موضوع بحرانی درآموزش ریاضی تبدیل شده است.تلاش برای تدریس کاربرد این استراتژیها به طورکلی باموفقیت همراه بوده اما مشکلاتی هم داشت به طورمثال:

۱.استراتژیهابه تفسیر بیشتری احتیاج داشت.به طورمثال استراتژی **آزمایش نمونه های خاص** بایدبا جزئیات بیشتری مطرح می شد.

۲.بسیاری از استراتژیها خیلی بیشتر ازآنچه به نظر می آمدپیچیده بود.به طورمثال استراتژی **کاربرد مسئله ی وابسته** شامل ۶یا۷فاز دیگربودوتعلیم هراستراتژی باید شامل تعلیم همه ی استراتژیهای جزئی آن می شد.
۳.باوجودی که استراتژیهای رهیافت به عنوان راهنما به کار می روند اما نبایدجایگزین دانش شوند.اغلب کاربردهای موفق استراتژیهای رهیافت به طوراساسی به دلیل ذخایردانشی است.این بسیار غیرعاقلانه است که از آن استراتژیها انتظارزیادی داشته باشیم.
مسئله چیست؟مسئله حل کن کیست؟
مشکل درتعریف مسئله این است که حل مسئله نسبی است.برای برخی یک تمرین معمولی است وبرای برخی بسیارکار می بردوبرای ریاضیدانان فقط یادآوری دانسته هاست.مسئله بودن یک خاصیت ذاتی نیست بلکه ارتباطی خاص بین فردوکاری است که او برای حل مسئله می کند .لغت مسئله به عنوان یک کارمشکل برای فردی که سعی می کند آن را حل کندمحسوب می شود،درحقیقت بیشتربه میزان فهم شخص برمی گرددتا یک کارمحاسباتی یا بهتربگوییم درحالت کلی اگرکسی آمادگی دسترسی به طرح حل برای کارریاضی داشته باشد آن کاریک تمرین است ومسئله نیست.
بنابه تعریف فرهنگ **آکسفورد** مسئله یک سوال سخت است،موضوعی برای تحقیق وبحث،یک سوال برای تمرین ذهن.
این مواردی است که **پولیا** ازواژه ی مسئله استخراج کردواستراتژیهای رهیابی را به عنوان ابزاری برای حل مسئله به کار برد.هروقت مسئله حل کن بخواهد آنها رابرای حل مسئله به کار بردباید گفته ی **پولیا** رابه خاطر داشته باشد،وی گفت:هدف اصلی رهیافت مطالعه ی روشها وقوانینی برای کشف وابداع است.به طور نسبی استراتژی رهیافت تکنیکی است که توسط حل کننده ها هنگام مواجه شدن با مشکلات استفاده می شود.یادگرفتن استراتژیهای رهیافت پایه ی ثابتی از ذخایر دانش ومهارت نسبی حل مسئله را می خواهد،یعنی باید مطمئن بود که مسئله حل کن به درجه ای از تکامل ریاضی رسیده است اما به کارگیری این استراتژیها به دانش خیلی زیادهم احتیاج نداردبلکه بیشتر به سطحی از مهارت نیازدارد.
نگاهی به برخی استراتژیهای ساده:
دراین قسمت به آنالیز بعضی استراتژیهای ساده ی رهیافت می پردازیم.تجزیه وتحلیل معلوم می کند که استراتژیهای رهیافت به عنوان استراتژیهای کلی شامل استراتژیهای جزئی است ونیز مسئله حل کن می تواندراستراتژیها را بیاموزدوازآنها استفاده کند،اما این به معنی تمهید ابزاری برای مسئله حل کن که تجربه ی حل مسئله را بهبوددهد نیست.
الف) آزمودن حالتهای خاص:
ما با یک استراتژی کارآمدبرای شروع حل یک مسئله آغاز می کنیم.
استراتژی s:برای بهتر فهمیدن یک مسئله ی نا آشنا باید سعی کنید با استفاده از حالات خاص برای خود مثالهایی بزنید که راه را به شما نشان دهدیا لااقل یک راهنمایی پذیرفتنی به شما بدهد.
درمسائل زیر **استراتژی s**به کار می رود.
مسئله ۱:یک عبارت شسته ورفته تر برای سری روبرو بیابید.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$$

مسئله۲ :$Q(x),P(x)$دو چند جمله ای هستند،باضرایب یکسان اما با **ترتیب وارونه** یعنی:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

$$Q(x) = a_n + a_{n-1} x + a_{n-2} x^2 + \ldots + a_0 x^n$$

چه رابطه ای بین ریشه های$Q(x),P(x)$وجوددارد؟جواب خودراثابت کنید.

مسئله۳ : اعدادحقیقی a_0, a_1 مفروضند.دنباله ی $\{a_n\}$ رابه صورت زیرتعریف می کنیم:

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-2} + a_{n-1}) \qquad \forall n \geq 2$$

آیا این دنباله همگراست؟اگرچنین است به چه مقداری همگراست؟

مسئله۴ : ازهمه ی مثلثها با محیط ثابت Pکدامیک بزرگترین مساحت رادارد؟

حال بررسی می کنیم که **استراتژی s**چگونه درحل مسائل به کار می رود.

در مسئله۱راه حل استانداردبرای حل آن به شرح زیر است :

با مشاهده ی تیزبینانه می توان فهمید : $\forall \; i$

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$$

وقتی سری به این صورت نوشته می شوددیده می شود که به جز جمله ی اول وآخرهمه حذف می شوند.مابه این سری ،**سری تلسکوپی** گوییم.

علی رقم زیبایی این راه آنقدر هم ذکاوت برای حل این سوال لازم نبود. حالتهای خاصی که به حل مسئله کمک می کنندمواردی هستند که پارامترصحیحnمقادیر۱و۲و۳و. . . رااختیارکند.بااین کارالگویی کلی به ذهن می رسدکه به کمک استقرا می توان آن را تأیید کرد.یعنی به راحتی وبا کمک استراتژی s چندجمله ی اول مجموع جزیی عبارتنداز: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$

واین به ما نشان می دهد جواب سوال چیست.

استراتژی sدرسوال۲به صورت دیگری به کار می رود.چون اگر بخواهیم بادرجات مختلف چندجمله ایها کار کنیم کلاهمان پس معرکه است.کلیداستفاده ازاستراتژی sدر این سوال انتخاب چندجمله ای به عنوان نماینده منجربه است.محاسبه باچندجمله ایهایی مثل: $P(x) = x^2 + 5x + 6$ و $Q(x) = 1 + 5x + 6x^2$

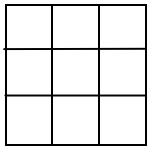
حدس جواب می شود.

درسوال۳برای جلوگیری از پیچیدگی بابررسی مقادیر $a_0 = 0, a_1 = 1$ میتوانیدحالات خاص رابررسی کنیدودنباله ی $0,1,\frac{1}{2},\frac{3}{4},\ldots$ را به دست آورد.این یک الگو القا می کند که منجربه حل سوال می شود.ممکن است با مشاهده ی اختلافات جملات متوالی دنباله ی زیر را به ذست آوردکه نشان دهدجملات یک سری هندسی است واین به حل مسئله منجر شود.

$$+1.-\frac{1}{2},+\frac{1}{4},-\frac{1}{8},+\frac{1}{6},-\frac{1}{32},\ldots$$

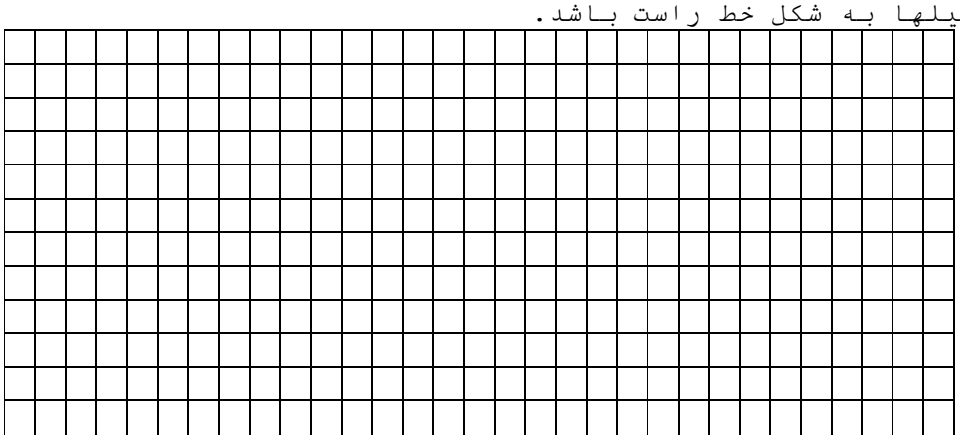
در سوال ۴شخص بایافتن مقدار مناسب Pوتخمین مساحت شکلها ی مثلثهای خاص مثل مثلث متساوی الساقین ویامثلث متساوی الاضلاع یا مثلث قائم الزاویه جواب راحدس بزند.

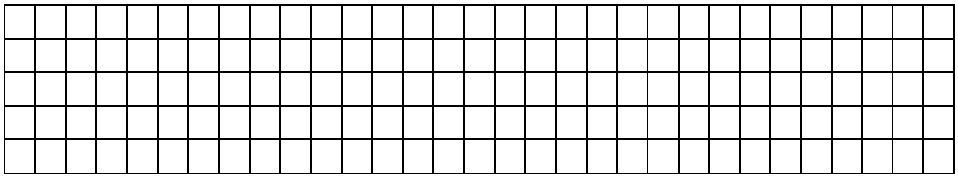
هریک از این مسائل نمونه ی رده ی بزرگی از مسائل ومثالهایی از استراتژیهای متفاوتی برای امتحان کردن حالات خاص است.به بیان دیگر:
استراتژی۱s :برای مسائلی که در آنها یک پارامتر صحیح nنقشی مهم ایفا می کند، امتحان کردن مقادیرمتوالی..n=1,2,3, می توانددرجستجوی یک الگو مفیدباشد.
استراتژی2s :درمسائلی که باریشه های چندجمله ایهاسروکاردارند، امتحان کردن چندجمله ایهایی که به سادگی تجزیه می شوند ممکن است مفید باشد.
استراتژی3s :درمسائل مربوط به دنباله هایا سریهایی که به طوربازگشتی تعریف می شوندامتحان کردن مقادیراولیه ۰و۱ممکن است مفیدباشد.
استراتژی(s4(a :برای بحثهای هندسی مقادیرمناسب برای محاسبه بدون کاستن از کلیت مسئله ممکن است محاسبات را ساده ترکند.
استراتژی(s4(b :وقتی بااشکال هندسی روبروهستیم، امتحان کردن حالات خاص مثل مثلث متساوی الساقین یا مثلث متساوی الاضلاع اغلب کاندیدهای مناسبی هستند.
البته ناگفته پیداست این استراتژیها همه ی استراتژیهای مربوط به حالتهای خاص را در برنمی گیرد.
ب) استراتژی اثبات اهداف جزئی:
استراتژی زیر ازاستراتژی قبلی کمی پیچیده تراست ونیازبه دقت بیشتری دارد.
استراتژیH : اگر نمی توانید مسئله ای راحل کنیدابتدا مسائل جزئیتر راحل کنیدیااهداف جزئی رااثبات کنید ،شاید این کارباعث حل مسئله ی اصلی شود.
درمسائل زیراستراتژی Hبه حل آنها کمک می کند :



مسئله۱: اعداد9_1راطوری درمربع مقابل جادهیدکه جمع هرسطروهرستون وقطرها مشابه شوند.

مسئله۲ :مجموع اعدادازا تا۱۰۰۰راکه شامل اعدادی است که بر۴و۱۱بخشپذیرباشدبیابید.
مسئله ۳ :فرض کنید Gیک شبکه مستطیلی۳۱×۱۷باشد.همانطور که درشکل زیر می بینید.چندمستطیل متفاوت می تواند درGباشد به طوریکه اطراف مستطیلها به شکل خط راست باشد.

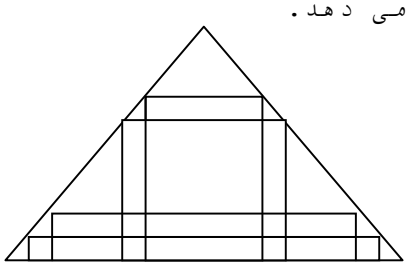




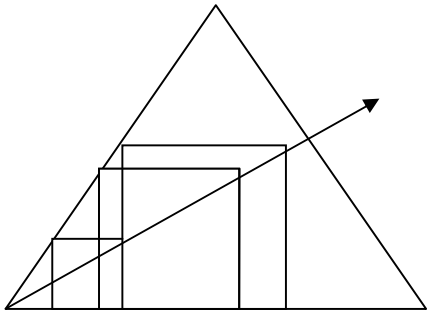
مسائل بالا شامل عملیات مقدماتی روی اعداداست وبا استراتژی Hقابل حل هستند.
درسوال۱روشهای زیادی برای چیدن این ۹عددرخانه هاهست که فقط یکی از آنهاجواب است.بایدبه اهداف جزئی یعنی جمع سطرهاوستونهاوقطرهاتوجه کنید.تمرکزروی اعداد مرکزمهمتراست.
درسوال۲باترکیب دوهدف جزئی یعنی:۱.پیداکردن فرمولی برای سری حسابی و۲.کاربرداین فرمول دراعدادی که مضرب ۴و۱۱هستندوبین۱و۱۰۰۰قراردارند،منجربه پیداکردن ایده ای برای حل مسئله می شوند.
درسوال ۳که به وسیله ی ترکیبیات قابل حل است،فرض کنیم مسئله حل کن با آن فرآیندناآشنا است،دراین صورت بایدباهدف جزئی یعنی حل مسئله ۳۱×۱یا۱۷×۱بعدی وبعدبسط روی مسئله ی اصلی به حل مسئله برسیم.
درسایرحوزه هاهم کاربرداین استراتژی قابل مشاهده است.به طور مثال برای این که نشان دهیم فضای متریک فشرده است،کافی است نشان دهیم فضای متریک بسته وکراندار است.
ازبررسی دودسته استراتژیهای فوق یعنی استراتژی **امتحان حالات خاص واثبات اهداف جزئی**معلوم می شودکه چیزی که اغلب درحکم استراتژی رهیافت بیان می شوددرحقیقت مجموعه ای از استراتژیهای جزئی مرتبط است ودربردارنده ی مجموعه ای از تکنیکهابرای حل مسئله وبرای یاددادن این استراتژی بایدشخص بتواندآنها راگروهبندی ،تجزیه وتوصیف کندوبرای هرراه حل به کاربرد،وبرای این موضوع شخص بایدیادبگیردتکنیکهای درستی برای مسائل انتخاب کند.به هرحال تشخیص دقیق استراتژیهای رهیافت گام اول است.
باید توجه داشت این استراتژی هم شامل استراتژیهای جزئی است،که برخی از آنها به شرح زیراست :
استراتژیH1 :اگر مسئله استانداردوقابل فهم نیست سعی کنید آن رابه مسئله قابل حل واستاندارد(معمولی)تبدیل کنید.
استراتژیH2 :روی مسئله ی مدلسازی شده کارکنید.(مکان هندسی رابیابید.)
استراتژی H3 :اگرنتوانستیدمسئله راحل کنید،سعی کنیدآن را به مسئله ساده وقابل حل تبدیل کنید.سپس شرایط اولیه مسئله راایجادوآن راحل کنید.
استراتژیH4 :درمسائل هندسی سعی کنیدباترسیم شکل درک بهتری ازمسئله داشته باشید.

اجرای یک راه حل رهیافتی:
به مسئله ی زیر که درکتاب **چگونه حل کنیم** شرح داده شده توجه کنید:
مسئلهP :درمثلث دلخواه یک مربع طوری محاط کنیدکه دورأس آن روی قاعده ودورأس دیگردردوضلع دیگرباشند،برهرضلع یک رأس.
برای حل این سوال بااستفاده ازاستراتژی H،چون حل مسئله دشواراست آن رابه مسئله ی ساده ترتبدیل می کنیم :
مسئلهP1 :ثابت کنیدیک مربع محاط در مثلث دلخواه وجوددارد.مکان هندسی یک رأس راطوری بیابیدکه دو رأس روی قاعده ویک رأس روی یکی ازاضلاع مثلث باشد.
تعدادی از مسائل وابسته بهP1 که به حل این سوال کمک می کندبه شرح زیراست :
مسئلهP2 :یک مستطیل در مثلث دلخواه محاط کنید.

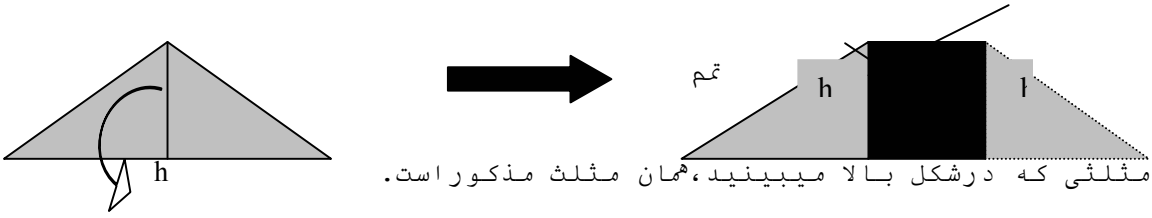
مسئله P3 :یک مربع با۳ضلع روی محیط مثلث دلخواه به دست آورید.
مسئله P4 :یک دایره در مثلث دلخواه محاط کنید.
مسئله P5 :مثلث رااطراف مربع ترسیم کنید.
مسئله P6 :یک مربع در مثلث متساوی الساقین یا متساوی الاضلاع طوری رسم کنید که دورأس آن روی قاعده و دورأس دیگربردوضلع دیگر،هرکدام بریکی،باشند.
البته مسئله حل کن نبایدروی همه ی اینهاکارکند،بلکه با انتخاب درست یکی از آنها طرحی برای حل مسئله می یابد.دراین مرحله اوبایدخیلی دقت کند،زیرا انتخاب نادرست باعث هدررفتن وقت می شود.
اوبابررسی احتمال حل مسئله ی اصلی باهرکدام از استراتژیهای جزئی می تواندتشخیص دهد کدامیک بیشتربه رسیدن به جواب کمک می کند.
به آسانی معلوم می شود حل سوال ازP2فقط به اثبات وجودچنین مربعی منجرمی شود،زیرااگرP2اثبات شودیعنی مستطیلهای کشیده وپهن هم در مثلث محاط می شوندوطبق قضیه ی مقدارمیانگین ،یک مربع جایی بین آنها وجوددارد.پس با P2قابل حل نیست.شکل زیر این موضوع را به خوبی نشان می دهد.



با استفاده از P3می توان فهمیدکه اگرخانواده ی مربعهایی با۳ رأس روی مثلث ورأس چهارم درداخل مثلث را رسم کنیم ،مکان هندسی رأس آزاد یک خط راست است. شکل زیر این موضوع را به خوبی نشان می دهد.



P4بسیار بی ربط است پس آن رارها می کنیم.باP5شخص ازمربع Sباطول اضلاع h شروع می کند وآن را ارتفاع مثلث قرار داده وبه آسانی مثلثی اطرافS به دست می آیدوبا یک ساختارمناسب مسئله حل می شود. . شکل زیر این موضوع را به خوبی نشان می دهد.



مثلثی که درشکل بالا میبینید،همان مثلث مذکوراست.

با P6 نیز می توان در چند مثلث خاص ساختارهای مناسبی به دست آورد.
درواقع استراتژی استفاده شده دراین بحث حل مسئله ی وابسته وراحتتر بود،یعنی همان استراتژیH3. الگوریتم حل این سوال ورفتار مسئله حل کن در این سوال به شرح زیراست :
۱.فکرکردن درموردا ستراتژیهای تصدق کننده
۲.دانستن فرمهای خاص استراتژیهاکه دراین مسئله راهگشاهستند
۳.تولیدمجموعه ای ازمسائل وابسته وآسان
۴.ارزیابی هرسوالی که در ۳ آمده است
۵.انتخاب یک سوال وابسته ی مناسب
۶.حل مسئله ی انتخابی در ۵
۷.به کاربردن راه حل کلی برای پیدا کردن جواب مسئله ی اولیه
درهرکدام از این مراحل که مکانیزم اجرای استراتژیH3راتشکیل می دهند،یک اشتباه ممکن است کل مسئله را دچارمشکل کند.پس باید دقت زیادی کرد.
رابطه ی بین رهیافت وذخایردانشی:
علی رقم این واقعیت که کاربرداستراتژیهای رهیافت موجب پیداکردن ایده ای برای حل مسئله می شود،بایدبه این نکته توجه کردکه اجرای موفق استراتژیهای رهیافت مربوط به میزان ذخایر دانشی است.
مسئله ی زیرکه **شونفلد** آن را سر کلاس حل مسئله ی خود به کار برد اثرمتقابل ذخایردانشی ورهیافت را به خوبی نشان می دهد.به شرح آن که از زبان خوداوبیان شده است توجه کنید :
مسئله ی ۱ :ثابت کنید برای هرمجموعه از اعداد حقیقی a,b,c,d رابطه ی زیرایجاب می کندکه $a=b=c=d$:
$$a^2+b^2+c^2+d^2=ab+bc+cd+da$$
استراتژی کلی برای حل این سوال **کاربرد مسئله ی وابسته** بود.هنگامیکه دیدم شاگردانم قادربه حل این سوال نیستند ،آنها را راهنمایی کردم که برای استفاده از این استراتژی درسوال باید سعی کنند تعداد متغیرهارا کاهش دهند،زیراکارکردن با مسایلی که متغیرهای زیادی دارند گیج کننده است،یکی از آنها مسئله ی وابسته ی زیرراپیشنهادکرد.
مسئله ی وابسته ی ۱ : ($c=d=0$)ثابت کنید اگر a,b اعدادحقیقی باشند که دررابطه ی $a^2+b^2=ab$ صدق کنند آنگاه $a=b$.
اما این مسئله راهگشا نبود.دانش آموزدیگری مسئله ی زیر راپیشنهادکرد :
مسئله ی وابسته ی۲ : ثابت کنید اگر a,b اعدادحقیقی باشند که دررابطه ی $a^2+b^2=ab$ صدق کنند آنگاه $a=b=0$.
ولی این مسئله هم کارآمدنبود،زیرا به ماهیت دوری متغیرها در سمت راست سوال توجه نشده بود .هنگامیکه آنها را متوجه ماهیت دوری متغیرهاکردم آنها این مسئله ی وابسته را پیشنهاد کردند:
مسئله ی وابسته ی۳ : ثابت کنید اگر a,b اعدادحقیقی باشند که دررابطه ی $a^2+b^2=ab+ba(=2ab)$ صدق می کنند آنگاه $a=b$.
این مسئله به راحتی حل می شد زیرا :
$$a^2+b^2=2ab\Rightarrow(a-b)^2=0\Rightarrow a=b$$
واین ایده ای برای حل مسئله ی اولیه بود.
باضرب طرفین معادله در۲خواهیم داشت :
$$2a^2+2b^2+2c^2+2d^2=2ab+2bc+2cd+2da$$
حال داریم :
$$\left[a^2+b^2\right]+\left[b^2+c^2\right]+\left[c^2+d^2\right]+\left[d^2+a^2\right]=2ab+2bc+2cd+2da$$

$$\Rightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2=0$$

دراین حالت یک مجموع مربعات 0 است،بنابراین هرکدام از عبارات باید 0 باشد.این نشان می دهد $a=b,b=c,c=d,d=a$

که این همان چیزی است که دنبالش بودیم.

مشکل در حل این مسئله توجه به ماهیت دوری عبارتها بودواین حتی برای یک مسئله حل کن ماهرهم نابدیهی است.این نشان می دهدکه بدون داشتن ذخایردانشی کافی نمی توان این مسئله راحل کرد.موفقیت درحل مسئله به پایه ی ذخایردانشی در حوزه ی آن مسئله بستگی داردومهارت رهیافتی خوب نمی تواندبه تنهایی از عهده ی حل آن برآید.

کلام آخر:

به هرحال نبایدازاستراتژیهایی مثل رهیافت انتظارمعجزه در حل مسئله را داشته باشیم،اما تجربه ی استفاده از این قبیل استراتژیها،پیش آزمونها وپس آزمونها، نشاندهنده ی پیشرفت قابل توجه مسئله حل کنها است .

ممکن است درآینده ی نزدیک بتوانیم برنامه های کامپیوتری تهیه کنیم که این استراتژیهای رهگشا رااجرا کنند،اگرعرصه ی پژوهش به آنجا کشیده شودرهیافت می توانند به عنوان بخشی ازمبانی یک دانش تفکرواقعی به کارآید.

منابع:

- **Shoenfeld A.H.,"Mathematical problem solving",1985,AcademicPress.inc**
- چگونه مسئله حل کنیم،جرج پولیا،ترجمه احمد آرام
- پولیا،حل مسئله وآموزش،آلن شونفلد،نشرریاضی ،سال۲،شماره ی۲،مرداد۱۳۶۷
- انتخاب استراتژی درفرایندحل مسئله ،روح الله جهانی پور،رشدآموزش ریاضی ، شماره (؟)
- آموزش هنر مسئله حل کردن،آنی شونفلد،نشرریاضی ،سال۱،شماره ی۱،فروردین۱۳۶۷