فصل اول

مقدمات و مفاهيم اساسي

1-1 آناليز خطا (error analysis)

اگر x عددی حقیقی یا مختلط باشد و x^* تقریبی از آن فرض شود دراینصورت خطای تقریب x به وسیله x^* عبارتست از :

$$e = x^* - x$$

مهم ترین خطاها عبارتند از :

۱- خطای داده ها

۲- خطای گرد کردن اعداد

۳- خطای تقریب

اگر x عددی حقیقی یا مختلط باشد و x^* تقریب آن و e خطای تقریب، دراینصورت خارج قسمت $\frac{e}{x}$ یا $\frac{e}{x^*}$ که با نماد e_r یا ε_r یا ε نمایش می دهیم، را خطای نسبی (relative error) تقریب x بوسیله x^* گویند. بنابراین

$$e_r = \frac{e}{x} = \frac{x^* - x}{x}$$

اگر x عددی حقیقی یا مختلط باشد، عدد δ را به طوریکه $|e| \le \delta$ خطای مطلق حدی نامند.

در واقع δ یک کران بالا برای قدر مطلق خطاست.

اگر x عددی حقیقی باشد و x^* تقریب آن فرض شود، چنین می نویسیم:

$$x^* \approx x$$

اگر x و x^* به اندازه کافی به یکدیگر نزدیک باشند:

$$\varepsilon_r = \frac{e}{x} \approx \frac{e}{x^*} \quad , \quad |\varepsilon_r| \le \frac{\delta}{x}$$

اگر x یک کمیت برداری در R^n یا C^n و x^* تقریب آن باشد، دراینصورت $e = x^* - x$ را خطای تقریب گویند.

۱ - خطای داده ها

خطای تحمیل شده بر تقریب ثابت های علمی و یا داده های تجربی حاصل از آزمایشات فیزیکی یا ناشی از عدم اطلاع دقیق از آن ثابت ها یا داده ها و یا حاصل محدودیت ورود آنها در محاسبات است.

۲ - خطای گرد گردن اعداد

خطای حاصل از گرد کردن اعداد حقیقی در محاسبات عددی که با توجه به محدودیت دستگاه های ورودی یا محاسباتی و با توجه به طول کلمه انتخاب شده پیش می آید را خطای گرد کردن اعداد می گویند. طول کلمه (word length) را کمی بعد تعریف می کنیم.

به یاد داریم که همه محاسبات عددی به کمک محاسبات چهار عمل اصلی بر روی اعداد حقیقی شکل می گیرند. حتی در مواردی که اشیاء ریاضی مورداستفاده الزاما عدد نباشند. در این حالات این کمیت ها باید بر حسب اعداد حقیقی یا مختلط قابل بیان باشد.

اگر فرض کنیم

$$P : e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad , \quad \tilde{P} : e \approx \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!} = e^*$$

جواب مساله $\tilde{P}$ ، تقریب جواب مساله P است.

3 – خطاي تقريب

عبارتست از خطای محاسبه یک مقدار ریاضی، وقتی به جای یک مساله P ، مساله دیگری نامند $\tilde{P}$ را که به تقریبی از جواب منجر می شود، قرار می دهیم، مثلا به جای سری بی نهایت نمایش دهنده e یک مجموع متناهی (مجموع جزئی) از سری را مورد استفاده قرار می دهیم، مقدار

$$-\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}-\cdots$$

را خطای تقریب e به وسیله e^* نامند. ($e^*=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$)

یاد آور می شویم که در این جا e پایه لگاریتم طبیعی است.

برای بدست آوردن مقدار تابع $y = f(x)$ به ازای x ، در ضابطه تابع مقدار مشخص x را قرار می دهیم. مقدار حد تابع در $\lim_{x \to x_0} f(x)$ را محاسبه می کنیم، برای محاسبه این حد اگر قضایای حد را نتوان بکار برد و نتوان به نتیجه رسید به x_0 بی نهایت نزدیک می شویم و مقداری را که می تواند بگیرد. به عنوان مثالی دیگر یاد آور می شویم:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(b)$$

(قضیه اصلی حسابان)

و داریم :

$$I = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\,\Delta x_i$$

بنابراین می توان برای یک n داده شده تقریب زیر را به کار برد.

$$I \approx I^* = \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\,\Delta x_i$$

2-1 نمایش اعداد و گرد کردن آنها

هر عدد حقیقی دارای نمایش اعشاری است. خطای تقریب نمایش اعداد نتیجه محدودیت کاربرد مفهوم بی نهایت در محاسبات عددی است یا حاصل گسسته سازی مساله اصلی است .

محاسبات عددی در آنالیز عددی به کمک رایانه ها انجام می شود. در واقع رایانه ها به شکل عمومی شان به دو دسته رایانه های آنالوگ (Analogue computer) و رایانه های رقمی (Digital computer) تقسیم می شوند.

رایانه های آنالوگ، مقادیر و کمیت ها را دقیق تر نمایش می دهد. مانند زلزله نگار حالت مشخصی را نشان می دهد ولی رایانه های رقمی، دقت کمتری دارند.

در عمل رایانه های رقمی در آنالیز عددی مورد استفاده قرار می گیرد و کمیت های ریاضی یا فیزیکی به کمک اعداد حقیقی ویژه ای که به اعداد ماشین موسوم اند، نمایش داده می شوند.

در رایانه های رقمی و در محاسبات عددی، اعداد در دستگاه های اعشاری یا دودویی نمایش داده می شود. در دستگاه اعشاری عدد حقیقی مثبت A به صورت زیر نمایش داده می شود.

$$A = \beta_m \times 10^{m} + \beta_{m-1} \times 10^{m-1} + \cdots + \beta_0 \times 10^{0} + \beta_{-1} \times 10^{-1} + \cdots + \beta_{-n} \times 10^{-n} + \cdots$$

که آن را به طور قرار دادی به صورت زیر نمایش می دهند.

$$A = \underbrace{\beta_m \ \ \beta_{m-1} \cdots \ \beta_1 \ \ \beta_0}_{\text{قسمت صحیح}} \ \overset{\text{ممیز}}{\bullet} \ \underbrace{\beta_{-1} \ \ \beta_{-2} \cdots \ \beta_{-n} \ \ \cdots}_{\text{قسمت اعشاري}}$$

$$\beta_i \in <0,9>$$

β_i ها را رقم نامند.

$$i \in \{ \cdots, -n, -n+1, \cdots, 0, 1, 2, \cdots, m \}$$

نمایش عدد x در دستگاه دودویی به صورت زیر است:

$$x = \pm\left(\alpha_n \times 2^{n} + \alpha_{n-1} \times 2^{n-1} + \cdots + \alpha_0 \times 2^{0} + \alpha_{-1} \times 2^{-1} + \alpha_{-2} \times 2^{-2} + \cdots\right)$$

نمایش فوق برای عدد حقیقی x را نمایش در دستگاه دودویی (Binary) نامند.

در دستگاه اعشاری یا دودویی α_i ها یا β_i ها را ارقام تشکیل دهنده عدد نامند.

در دستگاه اعشاری داریم :

$$x = \pm\, \beta_n \;\; \beta_{n-1} \cdots \beta_1 \;\; \beta_0 \;\bullet\; \beta_{-1} \;\; \beta_{-2} \cdots \beta_{-m} \;\cdots \qquad (۱)$$

$$x = \pm\, \alpha_n \;\; \alpha_{n-1} \cdots \alpha_1 \;\; \alpha_0 \;\bullet\; \alpha_{-1} \;\; \alpha_{-2} \cdots \qquad (۲)$$

در (۱) β_i ها (رقم ها) در مجموعه $<0,9>$ و در (۲) α_i ها در مجموعه $<0,1>$ تغییر می کنند.

در محاسبات دستی و ماشین های حساب از نمایش اعشاری اعداد در محاسبات استفاده می کنیم.
محاسبات در دستگاه دودویی اغلب در ماشین های حساب و کامپیوتر ها مورد استفاده قرار می گیرند،
نمایش اعشاری یا دودویی به صورت های ۱ و ۲ را نمایش با ممیز ثابت (fixed point) نامند.
در دستگاه با ممیز ثابت اعشاری اعداد گویا دارای نمایش متناهی یا نامتناهی اند، ولی در صورت نامتناهی بودن در آنها یک دوره گردش وجود دارد یعنی رشته ای از ارقام به صورت منظم مرتبا تکرار می شود، مانند :

$$\frac{1}{3} = 0.333\cdots$$

اما همه اعداد گنگ یا اصم دارای نمایش نامتناهی و فاقد دوره گردش می باشند.مجموعه اعدادی که در محاسبات با ماشین های حساب و رایانه ها مورد استفاده قرار می گیرند، وابسته به آنها تغییر می کنند و زیر مجموعه ای متناهی از مجموعه اعداد گویا هستند که همه آنها دارای نمایش متناهی اند. بنابراین در این ماشین ها هر عدد حقیقی قابل نمایش دقیق نیست، بلکه با نزدیکترین عدد حقیقی موجود در ماشین تقریب می شود. مجموعه اعداد ماشین را در ماشین های مختلف با توجه به مشخصات فنی آن شناخته می شوند .

تعداد ارقام قابل نمایش برای یک عدد ماشین را طول کلمه می نامند.

در بسیاری از رایانه ها می توان طول کلمه را دو یا حتی چند برابر نمود که این عمل وقتی به کار می آید،که دقت بیشتری مورد نظر باشد.

طول کلمه در ماشین محاسب با n نمایش داده می شود (اگر منظور نمایش در دستگاه دودویی یا اعشاری باشد) قسمت صحیح و اعشاری یا کسری با طول های مناسب دسته بندی می شوند.

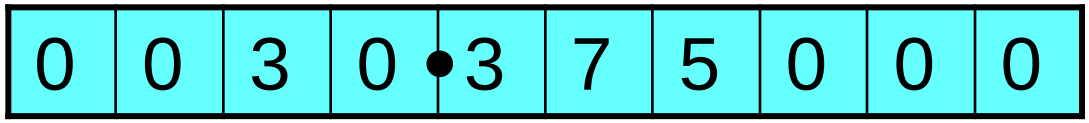
$$n = n_1 + n_2$$

که n_1 طول قسمت صحیح و n_2 طول قسمت کسری است.

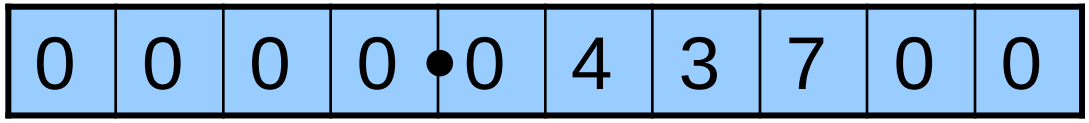
1-2-1 مثال

برای $n = 10$ و $n_1 = 4$ و $n_2 = 6$ داریم:

۳۷۵/۳۰



۰٤۳۷/۰



نمایش اعداد به صورت فوق در پایه ده یا دو را نمایش با ممیز ثابت می نامند.

نمایش با ممیز ثابت در محاسبات عددی معمولی و در محاسبات بازرگانی مورد استفاده قرار می گیرد، در محاسبات عددی دقیق تر در زمینه های علمی از دستگاه دیگری برای نمایش اعداد استفاده می شود که آن را دستگاه با ممیز شناور (floating point) نامند. در این دستگاه هر عدد حقیقی مثبت x به صورت $x = a \times 2^b$ یا $x = a \times 10^b$ ($|a| < 1$) نمایش داده می شود.

a عددی حقیقی در دستگاه ممیز ثابت معمولی (اعشاری یا دودویی) و b عددی صحیح است.

a را مانتیس (mantissa) و b را توان (exponent) نامند.

مثال 2-2-1

از ریاضیات مقدماتی تبدیل دستگاه های دودویی به اعشاری و به عکس را به خاطر داریم، به عنوان مثال عدد $a = 30.375$ در دستگاه اعشاری در دستگاه دودویی به صورت $A = 11110.011$ نمایش داده می شود، زیرا

$$A = 1\times 2^4 + 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 1\times 2^1 + 0\times 2^0 + 0\times 2^{-1} + 1\times 2^{-2} + 1\times 2^{-3} = 30.375$$

قرار داد می کنیم که در نمایش دودویی برای یک نماد L و برای صفر نماد O را به کار می بریم. لذا

$$A = 30.375 = L\,L\,L\,L\,O\,.\,O\,L\,L$$

3–2–1 مثال

به سهولت نتیجه می شود که

$$A = 30.375 = 0.30375 \times 10^{2} = L\,L\,L\,L\,O\,.\,O\,L\,L = O\,.\,L\,L\,L\,L\,O\,L\,L \times 2^{LOL}$$

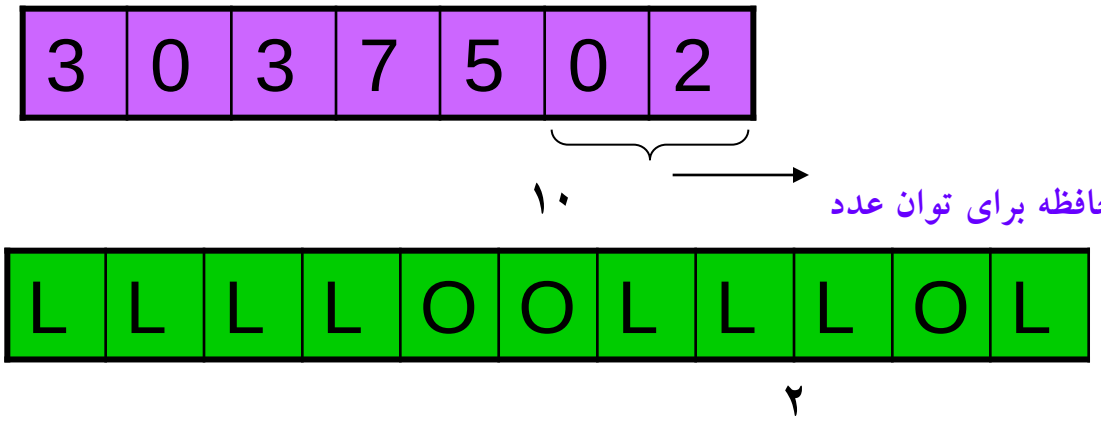
در نمایش موسوم به روتیس هاورز (Rutishauser) می توان سادگی بیشتری در نگارش داشت.

$$A = 30.375 = 0.30375_{10^{2}}$$

این همان معنی ضرب 10^{2} را دارد.

$$A = 30.375 = O\,.\,L\,L\,L\,L\,O\,O\,L\,L_{2^{LOL}}$$

این اعداد در حافظه ماشین به صورت زیر به کار برده می شوند.



در اینجا نیز طول کلمه عبارتست از تعداد جای حافظه برای ارقام نمایش دهنده مانتیس و توان عدد x است . t تعداد ارقام مانتیس و e تعداد ارقام توان است که در (۳) $t=5\,,\,e=2$ و در (٤) $t=8\,,\,e=3$

$$n=t+e$$

تعداد ارقام مانتیس — تعداد ارقام توان

مانتیس کوچکتر از یک است ولی ممکن است متناهی نباشد.

$$\pi=3.14159235\overline{65}\cdot\times10^{0}=\ 0.\overline{31415923565}\cdot\times10^{1}$$

در دستگاه با ممیز شناور به عکس دستگاه با ممیز ثابت، می توان ممیز یا نقطه را در طول ارقام عدد جابجا نمود، مشروط بر اینکه توان b به طور مناسب تغییر کند. اگر ممیز یک رقم به راست حرکت کند، یک واحد به توان اضافه می شود.

بنابراین می توان همیشه دست کم از لحاظ نظری، A را به گونه ای انتخاب کرد که حاوی اطلاعات بیشتر از عدد باشد و صفر های انتهایی چپ A را در نظر نگیریم، یاد آور می شویم که در نمایش اعشاری یک عدد همه ارقام عدد به جز صفر های انتهایی چپ معنی دار نامیده می شود.

مثلا در عدد ۰۰۳۷۵۰۳۷/۰ ، ارقام معنی دار زیر نویس شده اند. می توان از نمایشی از اعداد استفاده نمود که حاوی ارقام معنی دار باشد، این شکل نمایش با ممیز شناور را شکل نرمال شده (normalized) نامند. در این شکل عدد x به صورت زیر است:

$$x = a \times 2^{b} \quad , \quad 2^{-1} \le |a| < 1$$

$$x = a \times 10^{b} \quad , \quad 10^{-1} < |a| < 1$$

3-1 خطاي گرد كردن اعداد و محاسبه با ممیز شناور

در یک سلسله عملیات محاسباتی، با اعدادی حقیقی سروکار داریم، که ممکن است اعداد ماشین باشند و یا نباشند. در صورتیکه x یک عدد ماشین باشد،در محاسبات عینا قابل کاربرد است، و درغیراینصورت باید به کمک تقریبی از آن که عدد ماشین است، محاسبات انجام شود. انتخاب چنین تقریبی را که براساس انتخاب نزدیک ترین عدد ماشین به آن شکل می گیرد، عمل گردکردن (Rounding off) نامند.

بنابراین اگر $x \notin A$ ، گرد کرده x را با نماد $rd(x) \in A$ نمایش می دهیم و چنین تعریف می کنیم:

که A مجموعه اعداد ماشین است.

$$|x - rd(x)| \le |x - g| \quad , \quad \forall g \in A$$

1–3–1 مثال

با فرض $t = 4$ و

$$rd\,(0.14285_{10}\ 0) = 0.1429_{10}\ 0$$

$$rd\,(3.14159_{10}\ 0) = 0.3142_{10}\ 1\ ,$$

$$rd\,(0.142842_{10}\ 2) = 0.1428_{10}\ 2\quad .$$

4–1 گرد کردن در دستگاه اعشاري

اگر $x \notin A$ و در دستگاه ممیز شناور $x = a \times 10^{b}$ داده شده باشد، به طوریکه $|a| \geq 10^{-1}$ باشد

(یعنی نمایش نرمال شده) در صورتیکه

$$|a| = 0.\alpha_1\,\alpha_2 \cdots \alpha_i\,\alpha_{i+1} \cdots \qquad (0 \leq \alpha_i \leq 9) \qquad (\alpha_1 \neq 0)$$

گرد شده x به صورت زیر داده می شود:

$$\tilde{rd}\ (x) = sign\ (x)\ a' \times 10^{b}$$

وقتی فقط t رقم اعشار بعد از ممیز قابل کاربرد باشد، و a' به صورت زیر محاسبه می شود.

$$a' = \begin{cases} 0.\alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_t & 0 \le \alpha_{t+1} \le 4 \\ 0.\alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_t + 10^{-t} & 5 \le \alpha_{t+1} \le 9 \end{cases}$$

(t تعداد ارقام بعد از ممیز در شکل نرمال شده)

1-4-1 خطاي نسبي تقريب $\tilde{rd}(x)$

$$\left|\frac{\tilde{rd}(x)-x}{x}\right| = \frac{\left|a'\times 10^{b} - a\times 10^{b}\right|}{\left|a\right|\times 10^{b}} \underset{a''=sign(x)\times a'}{=} \frac{\left|a''-a\right|}{\left|a\right|}$$

$$\le \frac{5\times 10^{-(t+1)}}{10^{-1}} = 5\times 10^{-t} = eps$$

یعنی خطای نسبی تقریب که آن را با ε نمایش می دهیم:

$$\left|\varepsilon\right| \le 5\times 10^{-t}$$

در حالیکه

$$\varepsilon = \frac{\tilde{rd}(x)-x}{x}$$

لذا

$$\varepsilon\, x = \tilde{rd}\,(x) - x \quad \Rightarrow \quad \tilde{rd}\,(x) = x\,(1+\varepsilon)$$

عدد $eps = 5\times 10^{-t}$ را دقت ماشین نامند.

5–1 گرد کردن در نمایش دودویی اعداد

اگر $x = a\times 10^{2}$ و فرض کنیم نمایش فوق نرمال شده باشد یعنی $|a| \geq 2^{-1}$ در سیستم ممیز شناور

$(2^{-1} \leq |a| \leq 1 = 2^{0})$

$$|a| = 0.\alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_t\,\alpha_{t+1}\cdots \qquad (\alpha_i = 0 \text{ یا } L)$$

دراینصورت اگر

$$a' = \begin{cases} 0.\alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_t & (\alpha_{t+1} = 0) \\ 0.\alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_t + 10^{-t} & (\alpha_{t+1} = L) \end{cases}$$

آنگاه

$$\tilde{rd}\,(x) = sign\,(x)\,a'\times 2^{b}$$

را گردشده عدد x در دستگاه دودویی با t رقم بعد از ممیز نامند.

قرار می دهیم :

$$rd\ (\ x\ ) = \tilde{rd}\ (\ x\ ) \qquad\qquad x \in R \quad , \quad \tilde{rd}\ (\ x\ ) \in A$$

1–5–1 مثال

با فرض $t = 4$ و $e = 2$ (تعداد ارقام توان) به طور معمولی داریم:

$$\begin{cases} \tilde{rd}\ (0.31794_{\ 10}\ 110\ ) = 0.3179_{\ 10}\ 110 \notin A \\ \tilde{rd}\ (0.99997_{\ 10}\ 99\ ) = 0.1000_{\ 10}\ 100 \notin A \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{rd}\ (0.012345_{\ 10}\ -99\ ) = 0.1234_{\ 10}\ -100 \notin A \\ \tilde{rd}\ (0.54321_{\ 10}\ -110\ ) = 0.5432_{\ 10}\ -110 \notin A \end{cases}$$

اشکال اینجاست که e زیاد بزرگ نیست.

دو نتیجه اول و دوم را حاصل سر ریز توان (exponent over flow) و دو نتیجه سوم و چهارم را حاصل ته ریز توان (exponent under flow) می نامند.

در محاسبات با چنین مجموعه A دو عدد اول بی نهایت ماشین تلقی می شوند و محاسبه عموما متوقف می گردد، در مورد سوم و چهارم ممکن است برای پرهیز از دشواری شکل نرمال نشده زیر به کار رود، یعنی داشته باشیم:

$$\tilde{rd}\ (0.012345_{\ 10} - 99\ ) = 0.0123_{\ 10} - 99\ \in\ A$$

$$\tilde{rd}\ (0.54321_{\ 10} - 110\ ) = 0\ \in A$$

در عمل می توان با مقیاس بندی مناسب اعداد مورد استفاده از چنین پیشامدهایی جلوگیری نمود، گرچه اغلب e را به طور فرضی بی نهایت در نظر می گیرند.

به جز موارد خاصی از نوع پیش آمده که در عین حال قابل پیشگیری است، می توان تابع $\tilde{rd}$ را یک تابع از مجموعه اعداد حقیقی R در A تلقی نمود که

$$rd : R \to A$$

$$rd\ (\ x\ ) = x\ (\ 1 + \varepsilon\ )$$

که ε خطای نسبی تقریب x با $rd\ (\ x\ )$ است.

6–1 گرد کردن اعداد در چهار عمل اصلي

در مورد جمع ، تفريق ، ضرب، و تقسيم اعداد ، نتيجه محاسبه نيز گرد می شود . برای سهولت نمايش می دهيم :

$$rd(x \pm y) = x \pm^{*} y$$

$$rd(x \times y) = x \times^{*} y$$

$$rd(x / y) = x /^{*} y$$

در واقع داريم :

$$x +^{*} y = (x + y)(1 + \varepsilon_1)$$

$$x -^{*} y = (x - y)(1 + \varepsilon_2)$$

$$x \times^{*} y = (x \times y)(1 + \varepsilon_3)$$

$$x /^{*} y = (x / y)(1 + \varepsilon_4)$$

با توجه به محدودیت های اعمال اصلی در ماشین، بنابراین عددی غیر صفر y چون با شرایط

$$| y | < \frac{eps}{B} | x |$$

$(y \neq 0)$ وجود دارد به طوریکه

$$x +^{*} y = x$$

که در آن B پایه نمایش اعداد می باشد.

اما برای eps یا دقت ماشین تعریف دقیق تر زیر وجود دارد :

$$eps = \min \{ g \in A \mid 1 +^{*} g > 1 \ , \ g > 0 \ \}$$

اعمال جمع و ضرب در نمایش ممیز شناور و گرد کردن آنها معمولا انجمنی نیستند.

1–6–1 مثال

اگر $t = 8$ باشد و $a = 0.23371258_{10} - 4$ و $b = 0.33678429_{10} 2$ و

آنگاه $c = -0.33677811_{10} 2$

$$a +^{*} (b +^{*} c) = 0.64137126_{10} - 3$$

$$(a +^{*} b) +^{*} c = 0.64100000_{10} - 3$$

در حالیکه داریم:

$$a + b + c = 0.641371258_{10} - 3$$

به ویژه در کم نمودن اعداد هم علامت با یکدیگر معمولا ممکن است پدیده حذف پیش آید. این پدیده در مواردی که ارقام اولیه نمایش دهنده عدد در دستگاه مورد نظر مشترک باشند، پیش آید و گاهی نتایج کلی را کاملا تحت تاثیر قرار می دهد .

برای نمایش اعمال $x \pm^{*} y$ و $x \times^{*} y$ و $x /^{*} y$ و محاسباتی از نوع $\sqrt{x}^{*}$ یا $\cos^{*} x$ یا $\sin^{*} x$ که آنها را نیز توابع مقدماتی می نامیم و به محاسبه یک مقدار E^{*} منتهی می شود، که تقریب E است از نماد $E^{*} = fl(E)$ نیز استفاده می کنیم .

$$fl(x + y) = x +^{*} y$$

$$fl(x - y) = x -^{*} y$$

$$fl(x \times y) = x \times^{*} y$$

$$fl(x / y) = x /^{*} y$$

$$fl(\sqrt{x}) = \sqrt{x}^{*}$$

7-1 انتشار خطا

در حل مسائل عددی به کمک روش های عددی، از الگوریتم های عددی استفاده می کنیم و برای تحلیل خطای تقریب نتیجه نهایی حل یک مساله ریاضی به طور عددی داشتن اطلاع از نوع الگوریتم به کار رفته بسیار مهم است. برای حل یک مساله الزاما یک الگوریتم وجود ندارد و می توان بین الگوریتم های مختلف ممکن، یکی را که به خطای با اندازه کمتری می انجامد، انتخاب نمود.

برای درک بهتر این مفهوم، مفهوم الگوریتم را به طور دقیق تر مطالعه می کنیم. یک الگوریتم عددی را می توان دنباله ای از اعمال مقدماتی در نظر گرفت که به کمک داده های اولیه، جواب یا جواب های مساله را در پایان الگوریتم بدست می دهد.

بنابراین یک الگوریتم عددی را می توان یک دنباله متناهی از اعمال مقدماتی و متوالی به یکدیگر در نظر گرفت. می خواهیم این مفهوم را به صورت دقیق تر مورد مطالعه قرار دهیم تا بررسی خطای تقریب در مراحل مختلف و در نتیجه نهایی میسر شود. فرض می کنیم که یک مساله ریاضی عددی در اختیار داریم و می خواهیم به کمک داده های $x_1, \cdots, x_n$ نتایج $y_1, \cdots, y_m$ را به دست می آوریم.

اگر فرض کنیم که جواب های مساله به طور یکتا تعیین شوند، بنابراین در نهایت می توان الگوریتم را یک تابع φ از $D \subseteq R^n$ در R^m در نظر گرفت که برای آن داریم:

$$\varphi : D \subseteq R^n \to R^m$$
$$y = \varphi(x)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad , \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

که φ خود تابعی از n متغیر حقیقی با مقدار برداری در R^m است. یعنی با m مؤلفه φ_i ($i \in <1, m>$) قابل ارائه است:

$$\varphi = (\varphi_1 , \varphi_2 , \cdots , \varphi_m)$$

بنابراین در واقع داریم که :

$$\begin{cases} (y_1 , y_2 , \cdots , y_m) = \varphi (x_1 , x_2 , \cdots , x_n) \\ \quad \text{یا} \\ y_j = \varphi_j (x_1 , x_2 , \cdots , x_n) \qquad\qquad j = 1, 2, \ldots, m \end{cases}$$

در یک محاسبه هر مرحله از یک عمل مقدماتی تشکیل شده است که در آن یک مجموعه اعداد برای محاسبه مجموعه ای دیگر از اعداد به کار برده می شود.

این مجموعه های اعداد را یک مجموعهٔ عملوند نامند. در هر مجموعه عملوند، مؤلفه ها یا داده های اولیه یا نتایج میانی لازم برای محاسبه نتیجه بعدی است.

اگر قرار دهیم

$$x^{(i)} = \begin{bmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \\ \vdots \\ x_{n_i}^{(i)} \end{bmatrix} \in R^{n_i}$$

و به هر عمل مقدماتی یک تابع موسوم به تابع مقدماتی به صورت

$$\varphi^{(i)} : D_i \subset R^{n_i} \to R^{n_{i+1}}$$

وابسته سازیم.

به این ترتیب الگوریتم φ ، ترکیب توابع مقدماتی $\varphi^{(i)}$ که $i \in < 0 , r >$

در حالیکه قرارداد کرده ایم :

$$\varphi^{(i)} : D_i \subset D_{i+1} \quad , \quad i = 0, 1, \cdots, r \quad , \quad D_j \subseteq R^{n_j}$$

$$\varphi = \varphi^{(r)} \, o \, \varphi^{(r-1)} \, o \, \cdots \, o \, \varphi^{(0)}$$

$$D_0 = D \quad , \quad n_0 = n$$

$$x = x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad , \quad y = x^{(n_{r+1})} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

$\varphi^{(i)}$ ها را توابع مقدماتی می نامند.

1–7–1 مثال

برای محاسبه $\varphi(a,b,c)=a+b+c$ می توان نوشت:

$$(1)\quad \eta=a+b \quad , \quad y=c+\eta$$

$$(2)\quad \eta=b+c \quad , \quad y=a+\eta \qquad (n=3\ ,\ m=1)$$

برای الگوریتم اول، توابع مقدماتی زیر مورد استفاده قرار می گیرند:

$$\varphi^{(0)}(a,b,c)=\begin{bmatrix} a+b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\varphi^{(1)}(u,v)=u+v$$

$$\varphi(a,b,c)=(\varphi^{(1)} o\, \varphi^{(0)})(a,b,c)=\varphi^{(1)}(a+b,c)=(a+b)+c$$

برای الگوریتم دوم ،

$$\varphi^{(0)}(a,b,c)=\begin{bmatrix} a \\ b+c \end{bmatrix} \in R^2$$

$$\varphi^{(1)}(u,v)=u+v \in R$$

$$\varphi(a,b,c)=(\varphi^{(1)} o \varphi^{(0)})(a,b,c)=\varphi^{(1)}(a,b+c)= a+(b+c)$$

مثال 2–7–1

برای محاسبه $y=a^2-b^2$ دو الگوریتم زیر را می توان پیشنهاد نمود:

(1) $\eta_1=a\times a \qquad \eta_2=b\times b \qquad y=\eta_1-\eta_2$

(2) $\eta_1=a+b \qquad \eta_2=a-b \qquad y=\eta_1\times\eta_2$

برای هر یک از الگوریتم های فوق، توابع مقدماتی مورد نیاز به صورت زیر داده می شوند :

1) $\varphi^{(0)}(a,b)=\begin{bmatrix} a^2 \\ b \end{bmatrix}$, $\varphi^{(1)}(u,v)=\begin{bmatrix} u \\ v^2 \end{bmatrix}$

$\varphi^{(2)}(u,v)=u-v$, $\varphi = \varphi^{(2)} o \varphi^{(1)} o \varphi^{(0)}$

2) $\varphi^{(0)}(a,b)=\begin{bmatrix} a \\ b \\ a+b \end{bmatrix}$, $\varphi^{(1)}(a,b,u)=\begin{bmatrix} u \\ a-b \end{bmatrix}$

$\varphi^{(2)}(u,v)=u\times v$

در مورد مثال ۱-۷-۱ می توان خطای نسبی گرد گردن حاصل را محاسبه نمود.

به یاد داریم که

$$fl(x)=x(1+\varepsilon)$$

که ε خطای نسبی تقریب x با $fl(x)$ است.

$$\eta = fl(a+b) = (a+b)(1+\varepsilon_1)$$

$$\tilde{y} = fl(\eta + c) = (\eta + c)(1+\varepsilon_2)$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{y} = [(a+b)(1+\varepsilon_1) + c](1+\varepsilon_2)$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{y} = (a+b+c)\left[1 + \frac{a+b}{a+b+c}\varepsilon_1(1+\varepsilon_2) + \varepsilon_2\right]$$

$$|\varepsilon_1| \le eps \qquad , \qquad |\varepsilon_2| \le eps$$

لذا

$$\varepsilon_y = \frac{a+b}{a+b+c}\varepsilon_1(1+\varepsilon_2) + \varepsilon_2$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_y \approx \left(\frac{a+b}{a+b+c}\right)\varepsilon_1 + 1\times\varepsilon_2$$

$$\left(\varepsilon = \frac{e}{x} = \frac{x^* - x}{x} \quad \rightarrow \quad x^* = x\varepsilon + x = x(1+\varepsilon) \right)$$

اگر ε_1 و ε_2 اعداد بسیار کوچکی باشند از $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ صرفنظر می کنیم و هر چقدر $a+b+c$ کوچکتر شود و $a+b$ عدد بزرگی باشد، قدر مطلق خطا بیشتر می شود .

در صورتیکه $\left| \frac{a+b}{a+b+c} \right|$ از یک کمتر باشد، نتیجه رضایت بخش است، اما در حالت $\left| \frac{a+b}{a+b+c} \right|$ بسیار بزرگ، ممکن است خطای محاسبه قابل توجه باشد، در واقع ممکن است حاصل $(a +^* b) +^* c$ و $a +^* (b +^* c)$ یکی نباشد و علت آن تفاوت مقدار $\frac{a+b}{a+b+c}$ و $\frac{b+c}{a+b+c}$ می باشد.

مثال 3-7-1

در مثالی دیدیم که اگر

$$a = 0.23371258_{10} - 4$$

$$b = 0.33678429_{10}\ 2$$

$$c = 0.33677811_{10}\ 2$$

نتیجه محاسبه $(a +^{*} b) +^{*} c$ نسبت به $a +^{*} (b +^{*} c)$ نا مناسب تر است.

دلیل این امر با توجه به رابطه اخیر برای ε خطای نسبی محاسبه در ممیز شناور به صورت زیر است.

$$\frac{a+b}{a+b+c} = \frac{0.33\ldots_{10^{2}}}{0.64\ldots_{10^{-3}}} \cong \frac{1}{2} \times 10^{5}$$

$$\frac{b+c}{a+b+c} = \frac{0.618\ldots_{10^{-3}}}{0.64\ldots_{10^{-3}}} \cong 0.97$$

8-1 محاسبه خطاي مطلق يك الگوريتم

فرض كنيم كه

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

داده های اولیه، $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$ نتیجه نهایی مورد انتظار در حل یک مساله به کمک الگوریتم مورد نظر باشد،

$$y = \varphi(x)$$

اگر فرض کنیم که $\Delta x = \tilde{x} - x$ که $\tilde{x}$ تقریب داده های x است، در این صورت Δx خطای محاسبه x به کمک $\tilde{x}$ خود یک بردار در R^n است و اگر

$$\Delta x = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix}$$

داریم:

$$\Delta x_i = \tilde{x}_i - x_i \qquad , \qquad i \in <1, n>$$

با توجه به اینکه φ یک تابع از n متغیر حقیقی با مقدار در R^m است.

φ با m مولفه $\varphi_m , \cdots , \varphi_2 , \varphi_1$ مشخص می شود، یعنی داریم:

$$y = (y_1 , y_2 , \cdots , y_m) = \varphi (x_1 , x_2 , \cdots , x_n)$$
$$= \left(\varphi_1 (x_1 , x_2 , \cdots , x_n) , \varphi_2 (x_1 , x_2 , \cdots , x_n) , \cdots , \varphi_m (x_1 , x_2 , \cdots , x_n) \right)$$

یادآوری فرمول تیلور توابع دو متغیره:

$$f (a + \Delta x) = f \left((a_1, \ldots , a_n) + (\Delta x_1 , \ldots , \Delta x_n) \right) = f (a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} (a) \ \Delta x_i$$

$$+ \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j} (a) \, \Delta x_i \, \Delta x_j + \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \, \partial x_j \, \partial x_k} (a) \, \Delta x_i \, \Delta x_j \, \Delta x_k$$

$$+ \cdots$$

اما با توجه به فرمول تیلوری توابع n متغیره حقیقی داریم که:

$$\tilde{y}_i - y_i = \varphi_i(\tilde{x}) - \varphi_i(x) = \varphi_i(x+\Delta x) - \varphi_i(x)$$

$$= \varphi_i(x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x)\,\Delta x_j + \ldots - \varphi_i(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x)\,\Delta x_j$$

$$\Delta y_i = \tilde{y}_i - y_i \approx \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x)\,\Delta x_j \qquad i \in \langle 1, m \rangle$$

$$\Delta y_i \approx \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}(x) \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2}(x) \quad \cdots \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n}(x) \right] \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix}$$

یا

$$\Delta y_i = {}^{t}\nabla \varphi_i(x)\,\Delta x$$

بنابراین با توجه به اینکه

$$\Delta y = \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \vdots \\ \Delta y_m \end{bmatrix}$$

لذا داریم:

$$\Delta y = \begin{bmatrix} {}^t\nabla \varphi_1(x)\,\Delta x \\ {}^t\nabla \varphi_2(x)\,\Delta x \\ \vdots \\ {}^t\nabla \varphi_m(x)\,\Delta x \end{bmatrix}$$

(برای مطالعه بیشتر می توان به کتاب توابع برداری و توابع چند متغیره تالیف ایزدیان و حسینی و یا کتاب سیلور من مراجعه فرمایید.)

$$\Delta y = \begin{bmatrix} {}^t\nabla \varphi_1(x) \\ {}^t\nabla \varphi_2(x) \\ \vdots \\ {}^t\nabla \varphi_m(x) \end{bmatrix} \Delta x \qquad \Rightarrow \qquad \Delta y \approx D\varphi(x)\ \Delta x$$

که $D\varphi(x)$ ماتریس ژاکوبین تابع φ در نقطه x است.

$$D\varphi(x) \approx \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

خطای مطلق تقریب بردار y با $\tilde{y}$ است. خطای نسبی هر یک از درایه های $\tilde{y}_i$ به صورت Δy زیر است.

$$\varepsilon_{y_i} = \frac{\tilde{y}_i - y_i}{y_i} = \frac{\varphi_i(\tilde{x}) - \varphi_i(x)}{\varphi_i(x)} \approx \frac{{}^t\nabla \varphi_i(x)\,\Delta x}{\varphi_i(x)}$$

$$\varepsilon_{y_i} \approx \frac{1}{\varphi_i(x)} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x)\ \Delta x_j \qquad , \qquad i \in <1, m>$$

اما داریم:

$$\varepsilon_{x_i} = \frac{\tilde{x}_i - x_i}{x_i} = \frac{\Delta x_i}{x_i}$$

$$\Delta x_i = x_i \cdot \varepsilon_{x_i}$$

بنابراین داریم:

$$\varepsilon_{y_i} \approx \frac{1}{\varphi_i(x)} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x)\ \Delta x_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\varphi_i(x)} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x)\ \varepsilon_{x_j}$$

$$\varepsilon_{y_i} \approx \frac{x_1}{\varphi_i(x)} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}(x)\ \varepsilon_{x_1} + \cdots + \frac{x_n}{\varphi_i(x)} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n}(x)\ \varepsilon_{x_n}$$

ضرائب ε_{x_j} ها در عبارت فوق اعداد شرطی تقریب y_i با $\tilde{y}_i$ نامند. اگر همه این اعداد به اندازه کافی کوچک باشند (مثلا با مقادیری قابل مقایسه با یک از لحاظ اندازه) آنگاه الگوریتم را خوش رفتار یا خوش شرط یا خوش حالت (well conditionned) در غیر این صورت الگوریتم را بد شرط یا بد حالت (ill conditionned) نامند.

مثال 1–8–1

برای $y = \varphi(a, b, c) = a + b + c$ داریم :

$$\varepsilon_y = \frac{a}{a+b+c}\ \varepsilon_a + \frac{b}{a+b+c}\ \varepsilon_b + \frac{c}{a+b+c}\ \varepsilon_c$$

الگوریتم فوق خوش حالت است، اگر $|a|$ ، $|b|$ و $|c|$ نسبت به قدر مطلق $|a+b+c|$ کوچک باشد، درغیر این صورت بد حالت است.

مثال 2–8–1

اگر $y = \varphi(p, q) = -p + \sqrt{p^2 + q}$ باشد، دراین صورت :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} = -1 + \frac{p}{\sqrt{p^2 + q}} = \frac{-y}{\sqrt{p^2 + q}}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q} = \frac{1}{2\sqrt{p^2+q}}$$

لذا

$$\varepsilon_y = \frac{-p}{\sqrt{p^2+q}}\varepsilon_p + \frac{q}{2y\sqrt{p^2+q}}\varepsilon_q$$

$$= \frac{-p}{\sqrt{p^2+q}}\varepsilon_p + \frac{p+\sqrt{p^2+q}}{2\sqrt{p^2+q}}\varepsilon_q$$

چون $\left| \frac{p}{\sqrt{p^2+q}} \right| \le 1$ و $\left| \frac{p+\sqrt{p^2+q}}{2\sqrt{p^2+q}} \right| \le 1$

اگر $q > 0$ لذا روش خوش حالت است ولی در حالت $q \approx -p^2$ روش بد حالت است.

به طور کلی می توان نشان داد :

$$\varphi(x,y) = x \cdot y \quad , \quad \varepsilon_{xy} \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y$$

$$\varphi(x,y) = x / y \quad , \quad \varepsilon_{x/y} \approx \varepsilon_x - \varepsilon_y$$

$$\varphi(x,y) = x \pm y \quad , \quad \varepsilon_{x\pm y} \approx \frac{x}{x\pm y}\varepsilon_x + \frac{y}{x\pm y}\varepsilon_y$$

$$\varphi(x) = \sqrt{x} \quad , \quad \varepsilon_{\sqrt{x}} \approx \frac{1}{2}\varepsilon_x$$

محاسبه $x \pm y$ در حالتیکه یکی از عوامل $\frac{x}{x \pm y}$ یا $\frac{y}{x \pm y}$ از لحاظ قدر مطلق بزرگ شود،

بد حالت می باشد، دراین حالت می گوییم خطای حذف اتفاق افتاده است.

فرض می کنیم که

$$x = x^{(0)} \in R^n \quad \rightarrow \quad \varphi^{(0)}(x^{(0)}) = x^{(1)} \quad \rightarrow \cdots$$
$$\rightarrow \quad \varphi^{(r)}(x^{(r)}) = x^{(r+1)} = y \in R^m$$

به خاطر داریم که

$$\varphi^{(i)} : D_i \subseteq R^{n_i} \rightarrow R^{n_i+1} \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots, r)$$

و الگوریتم φ از ترکیب $\varphi^{(n)}, \cdots \varphi^{(1)}, \varphi^{(0)}$ تشکیل یافته است.

$$\varphi = \varphi^{(r)} o\, \varphi^{(r-1)} \cdots \varphi^{(1)} o\, \varphi^{(0)}$$
$$\varphi(x) = y$$

اکنون تابع $\psi^{(i)}$ را به صورت زیر پیشنهاد می کنیم:

$$\psi^{(i)} = \varphi^{(r)} o\, \varphi^{(r-1)}\, o\, \cdots\, o\, \varphi^{(i)} : D_i \to R^m \qquad , \qquad i \in <0, r>$$

آشکارا $\psi^{(0)} = \varphi$.

فرض کنید هر $\varphi^{(i)}$ خود تابعی دیفرانسیل پذیر روی D_i باشد، دراین صورت می توان از قاعده زنجیره ای مشتق برای محاسبه ماتریس ژاکوبی تابع مرکب به صورت زیر استفاده کرد.

$$D(f\, o\, g)(x) = D f(g(x))\, D g(x)$$

لذا داریم :

$$D\varphi(x) = D(\varphi^{(r)} o\, \varphi^{(r-1)}\, o \cdots o\, \varphi^{(0)})(x)$$
$$= D\varphi^{(r)}(x^{(r)})\; D\varphi^{(r-1)}(x^{(r-1)}) \;\cdots\; D\varphi^{(0)}(x^{(0)})$$

به ویژه برای $\psi^{(i)}$ داریم:

$$D\psi^{(i)}(x^{(i)}) = D\varphi^{(r)}(x^{(r)})\ D\varphi^{(r-1)}(x^{(r-1)})\ \cdots\ D\varphi^{(i)}(x^{(i)})$$

$$i \in <0, r>$$

در هر مرحله محاسبه از الگوریتم بردار $x^{(i)}$ با بردار $\tilde{x}^{(i)}$ تقریب می شود که در آن

$$\tilde{x}^{(i)} = fl(\varphi^{(i-1)}(\tilde{x}^{(i-1)}))$$

خطای این تقریب را با $\Delta x^{(i)}$ نمایش می دهیم:

$$\Delta x^{(i)} = \tilde{x}^{(i)} - x^{(i)}$$

دراین صورت داریم:

$$\Delta x^{(i+1)} = fl(\varphi^{(i)}(\tilde{x}^{(i)})) - \varphi^{(i)}(x^{(i)})$$

$$= \left[fl(\varphi^{(i)}(\tilde{x}^{(i)})) - \varphi^{(i)}(\tilde{x}^{(i)}) \right] + \left[\varphi^{(i)}(\tilde{x}^{(i)}) - \varphi^{(i)}(x^{(i)}) \right]$$

که در آن

$$fl(\varphi^{(i)}(\tilde{x}^{(i)})) = rd\ (\varphi^{(i)}(\tilde{x}^{(i)}))$$

که آن را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\varphi^{(i)} = (\varphi_1^{(i)}, \cdots, \varphi_n^{(i)})$$

$$\varphi^{(i)} : D_i \subseteq R^{n_i} \rightarrow R^{n_i+1}$$

$$rd\ (\varphi^{(i)}(\tilde{x}^{(i)})) = \begin{bmatrix} rd\ (\varphi_1^{(i)}(\tilde{x}^{(i)})) \\ \vdots \\ rd\ (\varphi_{n_i+1}^{(i)}(\tilde{x}^{(i)})) \end{bmatrix}$$

اما دیدیم که

$$\varphi^{(i)}(\tilde{x}^{(i)}) - \varphi^{(i)}(x^{(i)}) = D\varphi^{(i)}(x^{(i)})\Delta x^{(i)}$$

اما

$$rd\ (\varphi_j^{(i)}(\tilde{x}^{(i)})) = (1+\varepsilon_j)\ \varphi_j^{(i)}(\tilde{x}^{(i)})$$

که در آن ε_j خطای نسبی گرد کردن فوق برای $j \in <1, n_{i+1}>$ یعنی :

$$rd\ (\varphi_j^{(i)}(\tilde{x}^{(i)})) - \varphi_j^{(i)}(\tilde{x}^{(i)}) = \varepsilon_j\ \varphi_j^{(i)}(\tilde{x}^{(i)})$$

$$, \quad |\varepsilon_j| \le eps$$

با قرار دادن مقادیر فوق در بردار $rd\ (\varphi^{(i)}(\tilde{x}^{(i)}))$ نتیجه می شود:

$$fl\ (\varphi^{(i)}(\tilde{x}^{(i)})) = (I + E_{i+1})\ \varphi^{(i)}(\tilde{x}^{(i)})$$

درحالیکه I ماتریس همانی و E_{i+1} ماتریس قطری زیر است:

$$E_{i+1} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & & 0 \\ & \varepsilon_2 & \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_{n_{i+1}} \end{bmatrix}$$

$$= \left[fl\left(\varphi^{(i)}\left(\tilde{x}^{(i)}\right)\right) - \varphi^{(i)}\left(\tilde{x}^{(i)}\right) \right] + \left[\varphi^{(i)}\left(\tilde{x}^{(i)}\right) - \varphi^{(i)}\left(x^{(i)}\right) \right]$$

که می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$fl\left(\varphi^{(i)}\left(\tilde{x}^{(i)}\right)\right) - \varphi^{(i)}\left(\tilde{x}^{(i)}\right)$$

$$= E_{i+1}\,\varphi^{(i)}\left(\tilde{x}^{(i)}\right) \approx E_{i+1}\,\varphi^{(i)}\left(x^{(i)}\right) = E_{i+1}\,x^{(i+1)}$$

لذا داریم:

$$\Delta x^{(i+1)} \approx D\varphi^{(i)}\left(x^{(i)}\right)\,\Delta x^{(i)} + E_{i+1}\,x^{(i+1)}$$

قرار داد می کنیم که :

$$\alpha_{i+1} = E_{i+1}\, x^{(i+1)} \qquad , \qquad (i \in <0, r>)$$

لذا داریم:

$$\Delta x^{(i+1)} \approx D\varphi^{(i)}(x^{(i)})\ \Delta x^{(i)} + \alpha_{i+1}$$

که از آن نتیجه می شود :

$$\Delta x^{(1)} \approx D\varphi^{(0)}(x^{(0)})\ \Delta x^{(0)} + \alpha_1$$

$$\Delta x^{(2)} \approx D\varphi^{(1)}(x^{(1)})\ \Delta x^{(1)} + \alpha_2$$

$$= D\varphi^{(1)}(x^{(1)}) \left(D\varphi^{(0)}(x^{(0)})\ \Delta x^{(0)} + \alpha_1 \right) + \alpha_2$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta x^{(2)} = D\varphi^{(1)}(x^{(1)})\ D\varphi^{(0)}(x^{(0)})\ \Delta x^{(0)}$$

$$+ \alpha_1 D\varphi^{(1)}(x^{(1)}) + \alpha_2$$

$$\therefore \quad \Delta y = \Delta x^{(r+1)} \approx D\varphi^{(r)}(x^{(r)}) \cdots D\varphi^{(0)}(x^{(0)})\, \Delta x^{(0)}$$
$$+ D\varphi^{(r)}(x^{(r)}) \cdots D\varphi^{(1)}(x^{(1)})\alpha_1 + \cdots + \alpha_{r+1}$$

لذا

$$\Delta y \approx D\varphi^{(0)}(x^{(0)})\, \Delta x^{(0)}$$
$$+\left[D\psi^{(1)}(x^{(1)})\, E_1 x^{(1)} + \cdots + D\psi^{(r)}(x^{(r)})\, E_r x^{(r)} + E_{r+1} y \right]$$

مقدار مشخص شده در داخل کروشه فوق نشان دهنده میزان تاثیر خطاهای گرد کردن در الگوریتم به کار برده شده است، که می تواند از یک الگوریتم به الگوریتم دیگر بسیار متفاوت باشد. الگوریتم A نسبت به الگوریتم B قابل اعتمادتر خوانیم هرگاه اندازه خطای

$$D\psi^{(1)}(x^{(1)})\, E_1 x^{(1)} + \cdots + D\psi^{(r)}(x^{(r)})\, E_r x^{(r)} + E_{r+1} y$$

برای A از نظر قدر مطلق نسبت به B کمتر باشد.

مقدار $D\varphi^{(0)}(x^{(0)})\ \Delta x^{(0)}$ را که حداقل خطای مورد انتظار است، بعلاوه $E_{r+1}\ y$

$$D\varphi^{(0)}(x^{(0)})\ \Delta x^{(0)} + E_{r+1}\ y$$

که کمترین خطای مورد انتظار است، به خطای ذاتی الگوریتم موسوم است و داریم:

$$\Delta^{(0)}\ y = \left[\ |D\varphi(x)||x| + |y|\ \right] eps$$

معمولا به عنوان کران بالایی برای خطای فوق به کار برده می شود، به جای آن مورد استفاده قرار می گیرد.زیرا

$$|D\varphi(x^{(0)})\Delta x| \le |D\varphi(x)|\,|\Delta x| \le |D\varphi(x)|\,|x|\,eps$$

$$|E_{r+1}\ y| \le |E_{r+1}|\,|y| \le |y|\ eps$$

$$\left(\ \tilde{x} - x = \varepsilon_x \quad , \quad |\Delta x| \le |x|\ eps\ \right)$$

که در آن منظور از قدرمطلق بردار $y=(y_1, y_2, \cdots, y_m)$ که با نماد $|y|$ نمایش می دهیم، بردار

$$|y| = (|y_1|, |y_2|, \cdots, |y_m|)$$

خطاهای گرد کردن α_i را بی خطر خوانیم هرگاه اندازه α_i ها در حدود خطای ذاتی $\Delta^{(0)} y$ باشند، آنها را بی خطر گویند و هر گاه همه α_i ها بی خطر باشند یا از رتبه $\Delta^{(0)} y$ باشند الگوریتم را پایدار یا خوش رفتار گویند و در غیر این صورت ناپایدار عددی گویند.

درونیابی (Interpolation)

2-1 مقدمه

در مسائل درونیابی می خواهیم یک تابع از متغیر x و مجموعه پارامترهای $a_n , \ldots , a_1 , a_0$ را چون $\Phi (x , a_0 , a_1 , \ldots , a_n)$ به گونه ای تعیین کنیم که برای $(n+1)$ جفت از اعداد حقیقی یا مختلط (x_i , f_i) و $(i \in < 0 , n >)$ داشته باشیم:

$$\Phi (x_i , a_0 , a_1 , \ldots , a_n) = f_i \qquad , \qquad i \in < 0 , n >$$

نقاط (x_i , f_i) نقاط اتکا در مسائل درونیابی (supports points) نامند.

مسائل درونیابی را از نقطه نظر خطی بودن Φ نسبت به $(a_0 , a_1 , \ldots , a_n)$ یا غیرخطی بودن به آن، به دو دسته زیر تقسیم می کنیم:

۱) درونیابی خطی

۲) درونیابی غیر خطی

مساله درونیابی را یک مساله درونیابی خطی نامند، هرگاه Φ نسبت به a_i ها خطی باشد، در غیراین صورت مساله درونیابی را غیر خطی گویند.

از مهم ترین مسائل درونیابی خطی، مسائل درونیابی چند جمله ای، درونیابی مثلثاتی، مساله درونیابی اسپلاین است. در مسائل درونیابی خطی تابع Φ_i به صورت زیر تعیین می شود:

$$\Phi(x, a_0, a_1, \ldots, a_n) = a_0 \Phi_0(x) + \cdots + a_n \Phi_n(x)$$

که Φ نسبت به a_i ها خطی است و Φ_i ، $(i \in <0, n>)$ توابع داده شده نسبت به x اند.

در حالت خاصی که

$$\Phi_i(x) = x^i \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

تابع Φ به صورت زیر می باشد:

$$\Phi (x , a_0 , a_1 , \ldots , a_n) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

در حالتی که

$$\Phi_j (x) = e^{i j x} \qquad , \qquad (j = 0 , 1 , 2 , \ldots , n)$$

و $a_n , \ldots , a_1 , a_0$ اعداد مختلط باشند داریم:

$$\Phi (x , a_0 , a_1 , \ldots , a_n) = a_0 + a_1 e^{i x} + \cdots + a_n e^{n i x}$$

$$e^{i n x} = \cos n x + i \sin n x$$

که در آن $i^2 = -1$ یا $i = \sqrt{-1}$ نماد یکه موهومی است. درونیابی فوق را درونیابی مثلثاتی نامند.

در گونه ای دیگر از مسائل درونیابی خطی از تابع های به طور پاره ای چند جمله ای (و به گونه ای دیگر) از درجات ۱ و ۲ و ۳ و از این قبیل استفاده می کنیم که در روی هر فاصله $[\,x_i\,,\,x_{i+1}\,]$ ، $\left(i \in <0\,,\,n-1>\right)$ تابع از درجه مشخص و در نقاط x_i ، $(i=1\,,\,2\,,\,\cdots\,,\,n-1)$ تابع مشتق پذیر از مرتبه $n-1$ است که n درجه تابع چند جمله ای مورد نظر می باشد، این روش درونیابی خطی را اسپلاین نامند. در حالی که

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$$

از جمله مسائل درونیابی غیر خطی، مساله درونیابی کسری گویاست که در آن Φ به ثابت های $a_n\,,\,\ldots\,,\,a_1\,,\,a_0$ وابسته است، ولی ممکن است نسبت به بعضی آنها غیرخطی باشد.

$$\Phi\,(\,x\,,a_0\,,a_1\,,\ldots\,,a_n\,,b_0\,,b_1\,,\ldots\,,b_m\,)=\frac{a_0+a_1\,x+\cdots+a_n\,x^{\,n}}{b_0+b_1\,x+\cdots+b_m\,x^{\,m}}$$

یک مساله درونیابی غیر خطی دیگر به کمک توابع نمائی با تابع زیر داده می شود:

$$\Phi(x, a_0, a_1, \ldots, a_n) = a_0 e^{\lambda_0 x} + \cdots + a_n e^{\lambda_n x}$$

2-2 درونیابي چند جمله اي

مجموعه همه توابع چند جمله ای از متغیر حقیقی با مقدار حقیقی از درجه نابیشتر از k ، ($k \in N^*$) با Π_k نمایش می دهیم. باز فرض می کنیم که (x_i, f_i) ، $n+1$ نقطه اتکای متمایز داده شده باشند که x_i ها در شرط $x_j \neq x_i$ ، $(i, j = 0, 1, 2, \cdots, n)$ صدق می کنند.

در قضیه زیر ثابت می کنیم که یک چند جمله ای $P(x_i) = f_i$ وجود دارد که

$$P(x_i) = f_i \quad , \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

1-2-2 قضیه

برای $n+1$ نقطه اتکا دلخواه (x_i, f_i) ، $(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ و $x_j \neq x_i$ ، $(i, j = 0, 1, 2, \cdots, n)$ یک چند جمله ای یگانه $P \in \Pi_n$ وجود دارد که:

$$P(x_i) = f_i \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

اثبات

(یکتایی)

اگر فرض کنیم که $P_1(x)$ و $P_2(x)$ دو جواب مساله باشند که هر دو چند جمله ای هایی متعلق به Π_n ، اگر قرار دهیم :

$$Q(x) = P_1(x) - P_2(x)$$

آنگاه

$$Q(x_i) = P_1(x_i) - P_2(x_i) = f_i - f_i = 0 \qquad , \quad i \in <0, n>$$

اگر $Q(x) \neq 0$ ، چون $Q(x)$ یک چند جمله ای از درجه حداکثر n است. ($Q \in \Pi_n$) نتیجه فوق نشان می دهد که Q در $n+1$ نقطه متمایز، x_i صفر می شود. این خلاف قضیه اساسی جبر است.(هر تابع چند جمله ای از درجه n، دارای حداکثر n ریشه متمایز حقیقی یا مختلط است.) لذا Q نمی تواند غیر متحد با صفر باشد لذا باید داشته باشیم:

$$Q(x) \equiv 0 \qquad \Rightarrow \qquad P_1(x) \equiv P_2(x)$$

یعنی جواب یکتاست.

(وجود)

برای اثبات وجود، توابع چند جمله ای از درجه n زیر را در نظر می گیریم:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

یا اگر قرار دهیم:

$$\omega(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \quad , \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

آنگاه

$$L_i(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\,\omega'(x_i)}$$

$L_i(x)$ را چند جمله ای لاگرانژ گویند.

از خواص مهم آن اینست که :

$$L_i(x_j) = \gamma_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad , \quad (i, j \in <0, n>)$$

حال اگر قرار دهیم :

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) \; f_i \qquad (۱)$$

آنگاه $P \in \Pi_n$ و به ویژه داریم :

$$P(x_k) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x_k) \; f_i = f_k \quad , \quad (k \in <0, n>)$$

یعنی $P(x)$ وجود دارد و می تواند با رابطه (۱) داده شود. فرمول

$$f(x) \approx P(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) \; f_i$$

را فرمول درونیابی لاگرانژ نامند.

مثال 2-2-2

برای $n=2$ و $x_i=0,1,3$ و $f_i=1,3,2$ ، $P(x)$ ، $P(2)$ را تعیین کنید.

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(0-1)(0-3)} = \frac{x^2-4x+3}{3}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)} = \frac{x^2-3x}{-2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-0)}{(3-1)(3-0)} = \frac{x^2-x}{6}$$

و

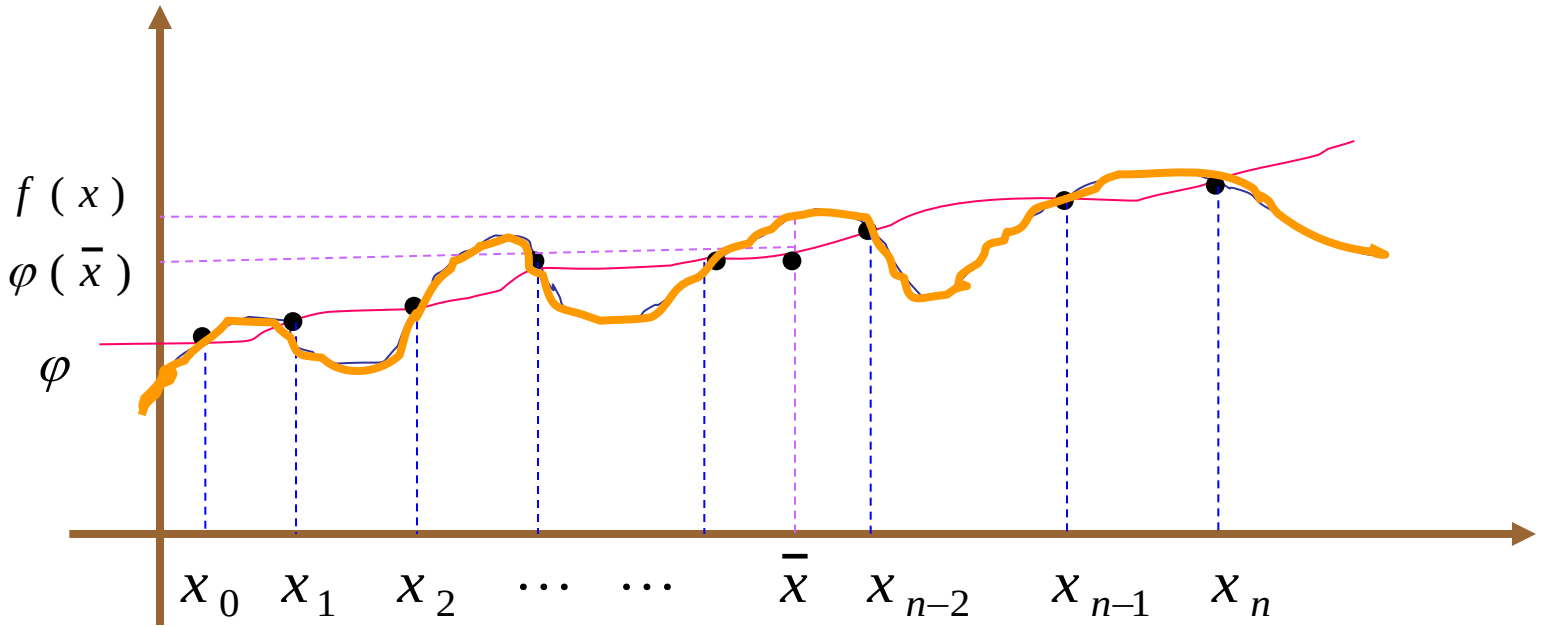
i	o	1	2
x_i	o	1	3
f_i	1	3	2

$$P(x) = \sum_{i=0}^{2} L_i(x)\ f_i(x_i) = \frac{x^2-4x+3}{3} - \frac{3}{2}(x^2-3x) + \frac{1}{3}(x^2-x)$$

$$P(2) = \frac{10}{3}$$

3-2 الگوريتم درونيابي نويل

درونیابی لاگرانژ، هم از لحاظ نظری در آنالیز عددی، و هم در مواردی که بخواهیم ضابطه تابع درونیاب را مشخص سازیم مورد استفاده قرار می گیرد. همچنین در مسائلی که نقاط اتکا با x_i های مشترک و f_i های متفاوت به کار برده می شوند، نیز بسیار مناسب است. زیرا فقط یکبار محاسبه L_i ها انجام می شود و یافتن تابع $P(x)$ برای f_i های متفاوت از توابع متفاوت ساده است. اما در مواردی که بخواهیم تقریبی از تابع درونیاب در یک نقطه را به دست آوریم، کاربرد درونیابی تکراری نویل یا ایتکن مناسب است. در این روش، برای یافتن مقدار تقریبی f در نقطه $\bar{x}$ از درونیابی هایی با نقاط اتکای کمتر محاسبه را آغاز می کنیم و آن را تا آنجایی که تقریب ها به هم نزدیک باشند، ادامه می دهیم.



در واقع تابع زیادی می توان یافت که نمودار از این نقاط اتکاء بگذرد و پیوسته و مشتق پذیر باشد.

در روش نویل، از توابع چند جمله ای درونیاب $P_{i_0\ i_1 \dots i_k}$ که متعلق به Π_k می باشند استفاده می کنیم که نقاط اتکاء (x_{i_j}, f_{i_j}) برای $(j = 0,1,2,\cdots,k)$ را درونیابی می کنند و این توابع را به عنوان توابع تقریب کننده f در $\bar{x}$ در نظر می گیریم.

این توابع را می توان به طریق زیر تولید کرد.

$$P_i(x) = f_i \qquad , \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

$P_i(x)$ چند جمله ای های از درجه صفر اند.

$$P_{i_0 i_1 \cdots i_k}(x) = \frac{(x - x_{i_0}) P_{i_1 i_2 \cdots i_k}(x) - (x - x_{i_k}) P_{i_0 i_1 \cdots i_{(k-1)}}(x)}{x_{i_k} - x_{i_0}}$$

(۲)

$$P_{i_0 i_1 \cdots i_k}(x) = \frac{1}{x_{i_k} - x_{i_0}} \begin{vmatrix} x - x_{i_0} & P_{i_0 i_1 \cdots i_{(k-1)}}(x) \\ x - x_{i_k} & P_{i_1 i_2 \cdots i_k}(x) \end{vmatrix}$$

در این صورت $P_{i_0 i_1 \cdots i_k}(x)$ چند جمله درونیاب از درجه نابیشتر از k برای مجموعه نقاط (x_{i_j}, f_{i_j}) برای $j \in <0, k>$ است .

اثبات

طرف راست رابطه (۲) را $R(x)$ درنظر می گیریم، آشکارا با استقراء روی k نتیجه می شود :

$$R \in \Pi_n$$

اما برای $x = x_{i_0}$ داریم :

$$R(x_{i_0}) = \frac{-(x_{i_0} - x_{i_k}) P_{i_0 i_1 \cdots i_{(k-1)}}(x_{i_0})}{(x_{i_k} - x_{i_0})} = P_{i_0 i_1 \cdots i_{(k-1)}}(x_{i_0}) = f_{i_0}$$

برای $x = x_{i_k}$ نیز داریم :

$$R(x_{i_k}) = \frac{(x_{i_k} - x_{i_0}) P_{i_1 \cdots i_k}(x_{i_k}) - 0}{(x_{i_k} - x_{i_0})} = P_{i_1 i_2 \cdots i_k}(x_{i_k}) = f_{i_k}$$

برای $x = x_{i_j}$ ، $j \in <1, k-1>$ داریم :

$$R(x_{i_j}) = \frac{(x_{i_j} - x_{i_0}) P_{i_1 \cdots i_k}(x_{i_j}) - (x_{i_j} - x_{i_k}) P_{i_0 \cdots i_{k-1}}(x_{i_j})}{(x_{i_k} - x_{i_0})}$$

$$= \frac{f_{i_j}(x_{i_j} - x_{i_0} - x_{i_j} + x_{i_k})}{(x_{i_k} - x_{i_0})} = f_{i_J} \qquad j \in <1, k-1>$$

از الگوریتم فوق برای محاسبه مقدار تابع درونیاب در یک نقطه استفاده می کنیم و معمولا کاربرد جدول زیر مناسب است.

x_i	P_{i_j}	$P_{i_j i_k}$	$P_{i_j i_k i_l}$	$\cdots$
x_0	$f_0 = P_0(x)$			
		$\rightarrow P_{01}(x)$		
x_1	$f_1 = P_1(x)$		$\rightarrow P_{012}(x)$	
		$\rightarrow P_{12}(x)$		$\rightarrow P_{0123}(x)$
x_2	$f_2 = P_2(x)$		$\rightarrow P_{123}(x)$	$\rightarrow P_{01234}(x)$
		$\rightarrow P_{23}(x)$		$\rightarrow P_{1234}(x)$
x_3	$f_3 = P_3(x)$		$\rightarrow P_{234}(x)$	
		$\rightarrow P_{34}(x)$		
x_4	$f_4 = P_4(x)$			
x_5				

مثال 1–3–2

$P_{012}(2)$ را به دست آورید:

x_i	0	1	2	3
$x_0 = 0$	$f_0 = 1$	$\rightarrow P_{01}(2) = 5$		
$x_1 = 1$	$f_1 = 3$	$\rightarrow P_{12}(2) = \frac{5}{2}$	$\rightarrow P_{012}(2) = \frac{10}{3}$	
$x_2 = 3$	$f_2 = 2$			

مثلا

$$P_{01}(2)=\frac{(2-0)\times 3-(2-1)\times 1}{1-0}=5$$

$$P_{12}(2)=\frac{(2-1)\times 2-(2-3)\times 3}{3-1}=\frac{5}{2}$$

$$P_{012}(2)=\frac{(2-0)\times \frac{5}{2}-(2-3)\times 5}{3-0}=\frac{10}{3}$$

برای سهولت کار از نماد زیر برای $P_{i_0 i_1 \cdots i_k}$ استفاده می کنیم، قرار می دهیم:

$$T_{i+k,k}=P_{i,i+1,i+2,\cdots,i+k}(x)$$

که $i+k$ نمایش آخرین اندیس از چپ به راست و k نمایش درجه ماکزیمم است.

لذا جدول محاسباتی اخیر به صورت زیر در می آید:

x_i / درجه	درجه صفر	درجه ۱	درجه ۲	درجه ۳
x_0	$f_0 = T_{00}$			
x_1	$f_1 = T_{10}$	T_{11}	T_{22}	T_{33}
x_2	$f_2 = T_{20}$	T_{21}	T_{32}	
x_3	$f_3 = T_{30}$	T_{31}		

می توان برای محاسبه $T_{i+k,k}$ از شکل زیر که بعدا کاربرد های بیشتری می یابد استفاده نمود:

$$T_{i\,0} = f_i \qquad , \quad i \geq k$$

$$T_{i\,k} = \frac{(x - x_{i-k})\,T_{i,k-1} - (x - x_i)\,T_{i-1,k-1}}{x_i - x_{i-k}}$$

$$= T_{i,k-1} + \frac{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{\frac{x - x_{i-k}}{x - x_i} - 1}$$

$$1 \leq k \leq i \qquad , \quad i = 0, 1, \cdots, n$$

به ویژه اگر $x = 0$ باشد که در مسائل برونیابی مانند ریچاردسون به کار می آید، داریم:

$$T_{i\,k} = \frac{-x_{i-k}\;\; T_{i,\,k-1} + x_i \;\; T_{i-1,\,k-1}}{x_i - x_{i-k}}$$

$$T_{i\,k} = T_{i,\,k-1} + \frac{T_{i,\,k-1} - T_{i-1,\,k-1}}{\dfrac{x_{i-k}}{x_i} - 1}$$

در روش درونیابی نویل هر بار k نقطه اتکا متوالی برای درونیابی تابع مورد استفاده قرار می گیرند، ولی در روش اتیکن چند نقطه اول و یک نقطه آخر مورد استفاده اند.

جدول در این روش به صورت زیر است:

x_i	P_{i_0}	$P_{i_0 i_1}$			
x_0	$f_0 = P_0(x)$				
x_1	$f_1 = P_1(x)$	$P_{01}(x)$			
x_2	$f_2 = P_2(x)$	$P_{02}(x)$	$P_{012}(x)$		
x_3	$f_3 = P_3(x)$	$P_{03}(x)$	$P_{013}(x)$	$P_{0123}(x)$	
x_4	$f_4 = P_4(x)$	$P_{04}(x)$	$P_{014}(x)$	$P_{0124}(x)$	$P_{01234}(x)$

به عنوان نمونه داریم :

$$P_{0124}(x) = \frac{(x - x_3) P_{014}(x) - (x - x_4) P_{012}(x)}{x_4 - x_3}$$

و به طور کلی محاسبه بر اساس رابطه زیر انجام می شود :

$$P_{i_0 i_1 \cdots i_k}(x) = \frac{(x - x_{i_0}) P_{i_1 i_2 \cdots i_k}(x) - (x - x_{i_k}) P_{i_0 i_1 \cdots i_{(k-1)}}(x)}{x_{i_k} - x_{i_0}}$$

4–2 درونیابي نیوتن با تفاضلات تقسیم شده

در درونیابی نیوتن با تفاضلات تقسیم شده تابع های درونیاب جزئی $P_{i_0\ i_1\ \cdots\ i_k} \in \Pi_k$ را مجددا به کار می بریم، در اینجا تابع درونیاب کلی را با نماد $P_{0123\cdots n}(x)$ نمایش می دهیم که $P_{012\cdots n} \in \Pi_n$ و داریم:

$$P_{0123\cdots n}(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

که در آن $a_n, \ldots, a_1, a_0$ مقادیر ثابت و ضرائب در شکل نیوتنی چند جمله ای درونیاب اند.

برای اینکه $P_{012\cdots n}$ جواب مساله درونیابی با نقاط اتکاء (x_i, f_i) باشد $\left(i \in <0, n>\right)$ ، باید داشته باشیم :

$$P_{012\cdots n}(x_i) = f_i \quad , \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

از همین خواص تابع درونیاب برای محاسبه a_i ها استفاده می کنیم، در واقع داریم :

$$P_{012\cdots n}(x_0) = a_0 = f_0$$

$$P_{012\cdots n}(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f_1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = a_1$$

$$P(x_n) = a_0 + a_1(x_n - x_0) + \cdots + a_n(x_n - x_0)\cdots(x_n - x_{n-1}) = f_n$$

از روابط فوق به طور بازگشتی a_i ها محاسبه می شوند. اما محاسبه a_i ها با این روش نیاز به $n(n-1)$ ضرب و n تقسیم دارد. بنابراین اغلب روش زیر ارائه می شود که در حدود $\frac{n(n+1)}{2}$ عمل تقسیم بیشتر نیاز ندارد.

قبل از ارائه نحوه محاسبه جدید توجه می کنیم که در صورت یافتن تابع درونیاب به صورت نیوتنی محاسبه مقدار آن در نقطه $x = \xi$ به کمک طرح هورنر (Horner schene) به شکل زیر با تعداد ضرب کمتر میسر می شود.

$$P(x) = P_{012\cdots n}(x)$$

$$P(\xi) = \Big(\cdots(a_n(\xi - x_{n-1}) + a_{n-1})(\xi - x_{n-2}) + \cdots + a_1\Big)(\xi - x_0) + a_0$$

تعداد ضرب های تودر توی فوق حداکثر n تاست.

برای ساختن $P_{012\cdots n}(x)$ به صورت ساده تر از نماد های $f_{i_0 i_1 \cdots i_k}$ ، $k = 0, 1, 2, \cdots, n$

برای ضرائب استفاده می کنیم و چند جمله ای $P_{i_0 i_1 \cdots i_k}(x)$ را به کمک چندجمله ای $P_{i_0 i_1 \cdots i_{k-1}}(x)$ و ثابت $f_{i_0 i_1 \cdots i_k}$ می سازیم، در حالیکه فرض می کنیم

$$P_{i_0\ i_1\ \cdots\ i_k} \in \Pi_k$$

که تابع درونیاب چند جمله ای برای نقاط اتکا (x_{i_j}, f_{i_j}) ، $j \in <0,k>$ می باشد، در اینجا قرار می دهیم:

$$P_{i_0 i_1 \cdots i_k}(x)$$
$$= P_{i_0 i_1 \cdots i_{k-1}}(x) + f_{i_0 i_1 \cdots i_k}(x - x_{i_0})(x - x_{i_1})(x - x_{i_2}) \cdots (x - x_{i_{k-1}})$$

آشکارا برای $x = x_{i_j}$ ، $j \in <0, k-1>$ داریم:

$$P_{i_0 i_1 \cdots i_k}(x_{i_j}) = P_{i_0 i_1 \cdots i_{k-1}}(x_{i_j})$$

بنا به استقراء روی k داریم:

$$P_{i_0 i_1 \cdots i_{k-1}}(x_{i_j}) = f_{i_j}$$

لذا داریم :

$$P_{i_0 i_1 \cdots i_k}(x_{i_j}) = f_{i_j} \quad , \quad j \in <0, k-1>$$

برای $x = x_{i_k}$ باید داشته باشیم :

$$P_{i_0 i_1 \cdots i_k}(x_{i_k})$$
$$= P_{i_0 i_1 \cdots i_{k-1}}(x_{i_k}) + f_{i_0 i_1 \cdots i_k}(x_{i_k} - x_{i_0}) \cdots (x_{i_k} - x_{i_{k-1}})$$

می خواهیم که $P_{i_0 i_1 \cdots i_k}(x_{i_k}) = f_{i_k}$ لذا از آن نتیجه می شود

$$f_{i_0 i_1 \cdots i_k} = \frac{f_{i_k} - P_{i_0 i_1 \cdots i_{k-1}}(x_{i_k})}{(x_{i_k} - x_{i_0}) \cdots (x_{i_k} - x_{i_{k-1}})}$$

اما خوشبختانه ثابت می شود که می توان $f_{i_0 i_1 \cdots i_k}$ را به صورت زیر محاسبه کردو برای این

منظور می توان از روش تفاضلات تقسیم شده استفاده نمود.

$$f_{i_0 i_1 \cdots i_k} = \frac{f_{i_1 \cdots i_k} - f_{i_0 i_1 \cdots i_{k-1}}}{x_{i_k} - x_{i_0}} = \frac{f_{i_0 \cdots i_{k-1}} - f_{i_1 i_2 \cdots i_k}}{x_{i_0} - x_{i_k}}$$

بنابراین برای خلق $P_{i_0 i_1 \cdots i_k}$ می توان به صورت زیر عمل کرد.

$$P_{i_0}(x) = f_{i_0}$$

$$P_{i_0 i_1}(x) = f_{i_0} + f_{i_0 i_1}(x - x_{i_0})$$

$$\vdots$$

$$P_{i_0 i_1 \cdots i_{k-1}}(x) = f_{i_0} + f_{i_0 i_1}(x - x_{i_0}) + \cdots + f_{i_0 i_1 \cdots i_{k-1}}(x - x_{i_0}) \cdots (x - x_{i_{k-2}})$$

$$\begin{aligned} P_{i_0 i_1 \cdots i_k}(x) &= f_{i_0} + f_{i_0 i_1}(x - x_{i_0}) + \cdots + f_{i_0 i_1 \cdots i_{k-1}}(x - x_{i_0})(x - x_{i_1}) \cdots (x - x_{i_{k-2}}) \\ &\quad + f_{i_0 i_1 \cdots i_k}(x - x_{i_0})(x - x_{i_1}) \cdots (x - x_{i_{k-1}}) \\ &= P_{i_0 i_1 \cdots i_{k-1}}(x) + f_{i_0 i_1 \cdots i_k}(x - x_{i_0}) \cdots (x - x_{i_{k-1}}) \end{aligned}$$

با توجه به آنچه گذشت نتیجه می شود :

1–4–2 قضیه

تفاضلات تقسیم شده $f_{i_0 i_1 \cdots i_k}$ نسبت به جایگشت های $i_k , i_{k-1} , \cdots , i_1 , i_0$ پایاست.

یعنی اگر

$$(j_0 , j_1 , \cdots , j_k) = (i_{s_0} , i_{s_1} , \cdots , i_{s_k})$$

یک جایگشت اندیس های $i_k , i_{k-1} , \cdots , i_1 , i_0$ باشد، آنگاه

$$f_{j_0 j_1 \cdots j_k} = f_{i_0 i_1 \cdots i_k}$$

برای تشکیل تابع چندجمله ای درونیاب با تفاضلات تقسیم شده جدول زیر مورد استفاده قرار می گیرد.

$$f_{i_0 i_1 \cdots i_k} = \frac{f_{i_1 \cdots i_k} - f_{i_0 i_1 \cdots i_{k-1}}}{x_{i_k} - x_{i_0}}$$

x_i	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$\cdots$	$k=n$
x_0	f_0				
x_1	f_1	f_{01}	f_{012}		
x_2	f_2	f_{12}		$\cdots$	$f_{012,\cdots,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
x_{n-1}			$f_{n-2,n-1,n}$		
x_n	f_n	$f_{n-1,n}$			

با درنظر گرفتن $P_{012\cdots n}$ به صورت زیر

$$P_{01\cdots n} = f_0 + f_{01}(x-x_0) + f_{012}(x-x_0)(x-x_1) + \cdots$$
$$+ f_{012\cdots n}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

مقادیر $f_{01\cdots k}$ از جدول زیر بدست می آیند و در هر ستون اولین عنصر، ضریب مطلوب است.

مثال 2–4–2

برای $x_0 = 0$ ، $x_1 = 1$ ، $x_2 = 3$ ، $f_0 = 1$ ، $f_1 = 3$ ، $f_2 = 3$ داریم:

x	$k=0$	$k=1$	$k=2$
$x_0 = 0$	$f_0 = 1$		
		$f_{01} = 2$	
$x_1 = 1$	$f_1 = 3$		$f_{012} = -\frac{5}{6}$
		$f_{12} = -\frac{1}{2}$	
$x_2 = 3$	$f_2 = 2$		

$$P_{012}(x) = f_0 + f_{01}(x - x_0) + f_{012}(x - x_0)(x - x_1)$$

$$= 1 + 2(x - 0) - \frac{5}{6}(x - 0)(x - 1)$$

$$= -\frac{5}{6}x^2 + \frac{7}{6}x + 1$$

3–4–2 تذکر

اغلب برای نمایش تفاضلات تقسیم شده از نمادی ویژه استفاده می کنیم که تفاضلات تقسیم شده را به صورت یک تابع از متغیرهای $x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ ارائه می کند که در پاره ای از کاربردها اهمیت دارد. قرار داد می کنیم

$$f[x_0] = f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1] = f_{01} = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

4–4–2 قضیه

تفاضلات تقسیم شده $f[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}]$ **توابع متقارنی از آرگومان ها می باشند ،**

یعنی نسبت به جایگشت های $x_{i_k}, \dots, x_{i_1}, x_{i_0}$ **پایدار هستند .**

اثبات

با توجه به قضیه اخیر در مورد $f_{i_0 i_1 \cdots i_k}$ **آشکار است.**

5–4–2 قضیه

اگر f **یک چند جمله ای از درجه** n **باشد، دراینصورت**

$$f[x_0, \dots, x_k] = 0 \qquad , \qquad k > N$$

اثبات

با توجه به اینکه تابع درونیاب از درجه نابیشتر از n برای درونیابی $N+1$ نقطه اتکاء (x_i , f_i) ، $i \in <0, N>$ یکتاست، لذا اگر f خود یک چند جمله ای از درجه N باشد، دراینصورت آشکارا

$$P_{012\ldots k}(x) \equiv f(x) \qquad , \qquad k \geq N$$

اکنون اگر فرض کنیم که $k > N$ است و از روش تفاضلات تقسیم شده نیوتن استفاده نمائیم داریم:

$$\begin{aligned} P(x) = {} & f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) \\ & + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ & + f[x_0, x_1, \ldots, x_k](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1}) \end{aligned}$$

با توجه به اینکه $\deg(P(x)) = N$ لذا باید ضریب درجات بالاتر از N صفر باشد، یعنی

$$f[x_0, \ldots, x_k] = 0 \qquad , \qquad k > N$$

6-4-2 مثال

برای تابع $f(x)=x^2$ جدول تفاضلات تقسیم شده با ۵ نقطه x_i به صورت زیر است :

x	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$x_0=0$	0				
		1			
$x_1=1$	1		1		
		3		0	
$x_2=2$	4		1		0
		5		0	
$x_3=3$	9		1		
		7			
$x_4=4$	16				

توجه داریم که

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$$

اگر f در x_0 مشتق پذیر باشد، داریم:

$$\lim_{x_1 \to x_0} f[x_0, x_1] = f'(x_0)$$

بنابراین قرار می دهیم :

$$f[x_0, x_0] = f'(x_0)$$

بنابراین تفاضل تقسیم شده برای آرگومان های برابر نیز قابل تعریف است، مشروط به اینکه f به مرتبه کافی مشتق پذیر باشد و در این موارد مقدار تفاضل به کمک مشتق تعریف می شود.

5–2 خطاي درونيابي چند جمله اي

اگر فرض کنیم که (x_i , f_i)، ($i \in <0,n>$) برای $n+1$ نقطه اتکاء داده شده از تابع f باشند، دراینصورت یک تابع یکتا $P(x) \equiv P_{012\ldots n}$ از درجه نابیشتر از n یعنی $P \in \Pi_n$ وجود دارد به طوریکه

$$P(x_i) = f_i \qquad , \qquad i \in <0,n>$$

اکنون می خواهیم برای نقطه $x = \bar{x}$ مقدار خطای درونیابی را که برابر $P(\bar{x}) - f(\bar{x})$ است ، ارزیابی کنیم.

1–5–2 قضیه

اگر تابع f دارای مشتق مرتبه $n+1$ باشد، دراینصورت برای هر $\bar{x}$ یک نقطه ξ متعلق به $I[x_0 , x_1 , \ldots , x_n , \bar{x}]$ (که I کوچک ترین فاصله در بردارنده همه نقاط x_i و $\bar{x}$ است برای $i = 0,1,2,\cdots,n$) وجود دارد، به طوریکه

$$f(\bar{x}) - P_{012\cdots n}(\bar{x}) = \frac{\omega(\bar{x})\, f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}$$

که در آن $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$ باقیمانده لاگرانژ است.

اثبات

درحالیکه $\bar{x} = x_i$ است، آشکارا

$$f(\bar{x}) - P_{012\cdots n}(\bar{x}) = 0$$

و مطلبی برای اثبات وجود ندارد. اگر $\bar{x} \neq x_i$، برای $i \in <0, n>$ دراینصورت یک k ثابت وجود دارد، به طوریکه

$$f(\bar{x}) - P(\bar{x}) - k\,\omega(\bar{x}) = 0$$

لذا تابع $F(x)$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$F(x) = f(x) - P(x) - k\,\omega(x)$$

آشکارا $i \in <0, n>$ ، $F(x_i) = 0$ و $F(\bar{x}) = 0$.

اما F در واقع جمع جبری دو تابع چند جمله ای از درجه نابیشتر از n و دقیقا $n+1$ و تابع f است.

اما چون f ، $n+1$ بار مشتق پذیر است، لذا F نیز $n+1$ بار مشتق پذیر است و همه مشتق های تا مرتبه n آن پیوسته اند. با کاربرد قضیه رل به طور متوالی برای F و مشتقات آن نتیجه می شود که

$$\exists\ \xi \in I[x_0, x_1, \dots, x_n, \bar{x}] \quad ; \qquad F^{(n+1)}(\xi) = 0$$

یعنی

$$F^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - k(n+1)! = 0$$

$$\Rightarrow \qquad k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

$$f(\bar{x}) - P(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\ \omega(\bar{x})$$

$$e(\bar{x}) = I(\bar{x}) - f(\bar{x}) = -\frac{\omega(\bar{x})}{(n+1)!}\ f^{(n+1)}(\xi)$$

.■

می توانیم به کمک تفاضلات تقسیم شده صورت دیگری از نتیجه فوق برای خطا را بدست آوریم، فرض کنیم که (x_i , f_i) برای $i \in <0 , n>$ ، $n+1$ نقطه اتکاء داده شده از تابع f باشد، و $\bar{x}$ نقطه ای داده شده دراینصورت یک چند جمله ای

$$P(x) \equiv P_{012\ldots n}(x)$$

به طور یکتا برای درونیابی (x_i , f_i) ، $i \in <0 , n>$ وجود دارد، اکنون اگر فرض کنیم که $f_{n+1} = f(\bar{x})$ و $x_{n+1} = \bar{x}$ با توجه به درونیابی نیوتن تقسیم شده و با فرض $\bar{x} \neq x_i$ برای $i \in <0 , n>$ ، داریم:

$$f(\bar{x}) = P_{012\ldots n+1}(x)$$
$$= P_{012\ldots n}(x) + f[x_0 , x_1 , \ldots , x_n , \bar{x}]\,(x , x_0)\ldots(x , x_n)$$

اگر $x = \bar{x}$ فرض شود داریم :

$$f(\bar{x}) = P_{012\ldots n}(\bar{x}) + f[x_0 , x_1 , \ldots , x_n , \bar{x}]\,\omega(\bar{x})$$

یا

$$f(\bar{x}) - P_{012\ldots n}(\bar{x}) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, \bar{x}]\ \omega(\bar{x})$$

با مقایسه با نتیجه قضیه داریم:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n, \bar{x}] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

$$\xi \in I[x_0, x_1, \ldots, x_n, \bar{x}]$$

این رابطه نتیجه مهمی است و به طور کلی داریم:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$$

به ویژه

$$f[\underbrace{x_i, \ldots, x_i}_{k+1}] = \frac{f^{(k)}(x_i)}{k!} \quad , \quad i \in <0, n>$$

2-5-2 مثال

اگر $f(x)=\sin x$ باشد و $x_i = \frac{\pi}{10}\, i$ ، $i \in <0, n>$ ، دراینصورت داریم:

$$\sin(x) - P(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_5)\frac{-\sin\xi}{6!}$$

که $P \in \Pi_5$ است، داریم:

$$\left|\sin(x) - P(x)\right| \le \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_5)}{720}$$

3-5-2 تذکر مهم

۱) نتایج به دست آمده از درونیابی برای ارزیابی مقدار تقریبی f در خارج فاصله درونیابی، یعنی $I[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ معمولا رضایت بخش نیست و باید در چنین مواردی نتایج با احتیاط به کار رود، چنین تقریبی را تقریب برون یابی نامند.

۲) نمی توان انتظار داشت که با افزودن نقاط اتکاء بیشتر، دقت محاسبات افزایش یابد، یعنی خطای تقریب به صفر گراید، در واقع در مورد توابعی مانند:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad , \qquad [a,b] = [-5,5]$$

و

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad , \qquad [a,b] = [0,1]$$

نشان داده شده است (به کتاب ISSACSON و KELLER مراجعه کنید) که با کاربرد افراز یکنواخت و تظریف آن خطا به سمت صفر میل نمی کند.

$$x_i^{(m)} = a + i\,\frac{(b-a)}{m} \qquad , \qquad i = 0,1,2,\cdots,m$$

6–2 درونیابي هرمیت

فرض می کنیم $m+1$ عدد حقیقی ξ_i به صورت $\xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_m$ داده شده باشند و اعداد حقیقی $y_i^{(k)}$ ، برای $k = 0,1,2,\cdots,n_i-1$ با شرط $i = 0,1,2,\cdots,m$ نیز در دست باشند.

مساله درونیابی هرمیت عبارتست از یافتن یک چند جمله ای در مجموعه Π_n به طوریکه

$$n+1 = \sum_{i=0}^{m} n_i$$

که اگر آن را $P(x)$ بنامیم، داشته باشیم:

$$P^{(k)}(\xi_i) = y_i^{(k)} \quad , \quad k \in <0, n_i - 1> \quad , \quad i = 0,1,2,\cdots,m$$

یعنی در هر نقطه گره ξ_i برای تابع f ، n_i اطلاع داده شده است.

$$y_i^{(k)} = f^{(k)}(\xi_i) \quad ; \quad \begin{matrix} k = 0,1,2,\cdots,n_i-1 \\ i = 0,1,2,\cdots,m \end{matrix}$$

1–6–2 قضیه

برای اعداد دلخواه $\xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_m$ ، $y_i^{(k)}$ یک و فقط یک چند جمله ای از درجه نابیشتر از P_n ($P \in \Pi_n$) به طوریکه $n+1 = \sum_{i=0}^{m} n_i$ وجود دارد که در شرایط

$$P^{(k)}(\xi_i) = y_i^{(k)} \quad ; \quad \begin{matrix} k = 0,1,2,\cdots,n_i - 1 \\ i = 0,1,2,\cdots,m \end{matrix} \qquad (۳)$$

صدق می کنند.

اثبات

نخست یکتایی را ثابت می کنیم. فرض می کنیم که P_1 و P_2 دو چند جمله ای در Π_n باشد که برای آنها شرایط (۳) برقرار است. لذا

$$Q(x) = P_1(x) - P_2(x)$$

درصورتیکه $P_1 \neq P_2$ یک چند جمله ای از درجه نابیشتر از n است.

اما با توجه به روابط (۳) نیز نتیجه می شود که

$$Q^{(k)}(\xi_i) = P_1^{(k)}(\xi_i) - P_2^{(k)}(\xi_i) = y_i^{(k)} - y_i^{(k)} = 0$$

یعنی تابع $Q(x)$ یک تابع متعلق به Π_n است که در $n+1$ نقطه صفر می شود.

بنابراین بنا به قضیه اساسی جبر که یک چند جمله ای از درجه n دارای حداکثر n ریشه است. این امر ناممکن است مگر آنکه $Q \equiv 0$.

بنابراین $P_1(x) \equiv P_2(x)$ یعنی جواب یکتاست.

اثبات وجود را به کمک یکتایی انجام می دهیم، در واقع چون $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ در معادلات $n+1$ گانه (۳) صدق می کند و یک دستگاه معادلات از $n+1$ معادله با $n+1$ مجهول بر حسب a_i ها تشکیل می دهد که هر یک از معادلات نسبت به a_i ها خطی اند، لذا چون دستگاه دارای جواب یکتاست، دترمینان ماتریس ضرایب غیر صفر است، یعنی دستگاه دارای جواب است. ■

با توجه به قضیه فوق مانند روش لاگرانژ به هر صورت که یک چند جمله ای از درجه نابیشتر از n که در شرایط (۳) صدق کنند، بدست آوریم، به جواب دست یافته ایم.

در روش مشابهی با روش درونیابی لاگرانژ از تابع زیر استفاده می کنیم.

$$P(x)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n_i-1} y_i^{(k)}\, L_{ik}(x) \qquad (۱)$$

که در آن $L_{ik}\in \Pi_n$ برای $k=0,1,2,\cdots,n_i-1$ ، $i=0,1,2,\cdots,m$.

این چند جمله ای ها به صورت زیر تعریف می شوند:

$$L_{i,n_i-1}(x)=l_{i,n_i-1}(x) \quad , \quad i=0,1,2,\cdots,m$$

که در آن l_{ik} به صورت زیر تعریف می شوند:

$$l_{ik}(x)=\frac{(x-\xi_i)^k}{k!}\prod_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{m}\left(\frac{x-\xi_j}{\xi_i-\xi_j}\right)^{n_j} \qquad (۲)$$

و

$$L_{ik}(x) = l_{ik}(x) - \sum_{\upsilon=k+1}^{n_i-1} l_{ik}^{(\upsilon)}(\xi_i)\, l_{i\upsilon} \qquad (۳)$$

$$, \quad k = n_i - 2, n_i - 3, \cdots, 0$$

با محاسبه نه چندان مختصر ثابت می شود که :

$$L_{ik}^{(\sigma)}(\xi_j) = \begin{cases} 1 & (i,k) = (j,\sigma) \\ 0 & (i,k) \neq (j,\sigma) \end{cases} \quad ; \quad \begin{matrix} i, j \in <0, m> \\ k, \sigma \in <0, n_i - 1> \end{matrix}$$

(٤)

با توجه به رابطه اخیر مشاهده می کنیم که

$$P^{(k)}(\xi_i) = y_i^{(k)}$$

تکلیف 1 : رابطه (٤) را ثابت کنید.

تکلیف 2 : روش هرمیت را برای $n_0 = n_1 = \cdots = n_m = 2$ بنویسید.

کاربرد روش فوق از لحاظ عملی چندان ساده نیست. اما استفاده نظری این روش به صورت ارائه شده میسر است. در عمل می توانیم از مفهوم تفاضلات تقسیم شده به صورت مناسب برای تعیین تابع چند جمله ای درونیاب هرمیت استفاده کنیم.

برای این منظور نقاط اتکاء زیر را در نظر می گیریم:

$$(x_i\ ,\ f_i) \qquad ,\quad i=0,1,2,\cdots,n$$

که تشکیل مجموعه $F_n=\left\{(x_i\ ,\ f_i)\,\middle|\, i=0,1,\ldots,n\right\}$ را می دهند.

$n+1$ جفت $(x_i\ ,\ f_i)$ را به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$(x_0\ ,\ f_0),(x_1\ ,\ f_1),\ldots,(x_{n_0-1}\ ,\ f_{n_0-1}),(x_{n_0}\ ,\ f_{n_0}),\ldots,(x_n\ ,\ f_n)$$

جفت های فوق به ترتیب جفت های زیر اند که به ترتیب عبارتند از:

$$(\xi_0\ ,\ y_0^{(0)}),(\xi_0\ ,\ y_0^{(1)}),\ldots,(\xi_0\ ,\ y_0^{(n_0-1)}),(\xi_1\ ,\ y_1^{(0)}),\ldots,(\xi_m\ ,\ y_m^{(n_m-1)})$$

توجه داریم که

$$x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_n$$

یعنی نقاط x_i الزاما متمایز نیستند و هر ξ_i دقیقا n_i بار تکرار می شود و x_i ها در مجموع $\{\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_m\}$ تغییر می کنند. به طور دقیق تر

$$x_0 = x_1 = \cdots = x_{n_0-1} = \xi_0$$

$$x_{n_0} = x_{n_0+1} = \cdots = x_{n_0+n_1-1} = \xi_1$$

$$\vdots$$

$$x_{n_0+n_1+\cdots+n_{m-1}} = \cdots = x_n = \xi_m$$

همچنین نماد زیر را قرارداد و تعریف می کنیم :

$$[\![x-x_0]\!]^j = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})$$

قرار می دهیم :

$$[\![x-x_0]\!]^0 = 1$$

لذا $[\![x-x_0]\!]^j$ یک چند جمله ای از درجه j است. می خواهیم، چند جمله ای $P(x)$ جواب مساله هرمیت را به صورت زیر بدست آوریم که :

$$P(x) = a_0 + a_1 [\![x-x_0]\!] + a_2 [\![x-x_0]\!]^2 + \cdots + a_n [\![x-x_0]\!]^n$$

که در آن a_i ها برای $i = 0, 1, 2, \cdots, n$ ثابت هایی هستند که باید به گونه ای تعیین شوند که $P(x)$ همان چند جمله ای جواب مساله باشد.

به ویژه نشان می دهیم که با تعریف عمومی تری برای تفاضلات تقسیم شده نیوتن

$$a_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k] \quad , \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n$$

در واقع اگر $\zeta_0 < \zeta_1 < \cdots < \zeta_n$ ، $n+1$ نقطه گره متمایز فرض شود و قرار دهیم که

$$f_i = P(\zeta_i)$$

که f_i ها همان چند جمله ای یگانه جواب مساله درونیابی در نقاط x_i است، آشکارا با توجه به درونیابی تقسیم شده نیوتن داریم :

$$f[\zeta_i] = P(\zeta_i) \qquad , \qquad i = 0, 1, 2, \cdots, n$$

$$f[\zeta_i, \ldots, \zeta_{i+k}] = \frac{f[\zeta_{i+1}, \ldots, \zeta_{i+k}] - f[\zeta_i, \ldots, \zeta_{i+k-1}]}{\zeta_{i+k} - \zeta_i}$$

و P به صورت $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j [\![x - \zeta_0]\!]^j$ در حالیکه

$$a_j = f[\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_j]$$

توجه داریم که نقاط اتکاء برای درونیابی اخیر (ζ_i, f_i) هستند .

اکنون با توجه به اینکه مشتق تابع f در نقطه ξ_i تا مرتبه $n_i - 1$ وجود دارد لذا می توانیم از مفهوم حد برای تعریف تفاضلات تقسیم شده در حالت فعلی وقتی آرگومان ها با هم برابر می شوند، استفاده کنیم.

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \lim_{\zeta_j \to x_j} f[\zeta_i, \zeta_{i+1}, \ldots, \zeta_{i+k}]$$
$$i \le j \le i+k$$

به ویژه

$$\lim_{\zeta_j \to x_j} f[\zeta_i, \zeta_{i+1}, \ldots, \zeta_{i+k}] = \frac{P^{(k)}(x_i)}{k!} \quad , \quad i \le j \le i+k$$

هرگاه با شرط $x_i = x_{i+1} = \cdots = x_{i+k}$.

اگر $r(i)$ را کوچک ترین اندیس x_j ها در نظر بگیریم که $x_r = x_{r+1} = \cdots = x_i$

دراینصورت:

$$P^{(k)}(x_i) = P^{(k)}(x_r) = f_{r(i)+k}$$

به این ترتیب اکنون همه چیز برای نوشتن ضابطه تابع درونیاب اصلی هرمیت آماده است. قرار می دهیم:

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \left[\!\left[x - x_0 \right]\!\right]^j$$

که در آن

$$a_j = f[x_0, x_1, \ldots, x_j] \qquad , \qquad j = 0, 1, 2, \cdots, n$$

که تفاضلات فوق به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f_{r(i)+k}}{k!} \qquad (۵)$$

هرگاه $x_i = x_{i+1} = \cdots = x_{i+k}$ ، و درغیر این صورت (یعنی تمایز دست کم دو x_j)

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \qquad (٦)$$

2-6-2 مثال

مساله هرمیت زیر را به صورت مناسب تبدیل و آن را به کمک تفاضلات تقسیم شده حل کنید

$$m = 2 , n_0 = 2 , n_1 = 3$$

$$\xi_0 = 0 , y_0^{(0)} = -1 , y_0^{(1)} = -2$$

$$\xi_1 = 1 , y_1^{(0)} = 0 , y_1^{(1)} = 10 , y_1^{(2)} = 40$$

$$(x_0 , f_0) = (0 , -1) \qquad (x_1 , f_1) = (0 , -2) \qquad (x_2 , f_2) = (1 , 0)$$

$$(x_3 , f_3) = (1 , 10) \qquad (x_4 , f_4) = (1 , 40)$$

$$x_0 = x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = x_3 = x_4 = 1$$

اکنون برای ادامه کار و یافتن تابع درون یاب جدول زیر را در نظر می گیریم.

نماد * مشخص کننده استفاده از فرمول (۵) است.

x	$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	
$\xi_0 = x_0 = 0$	$-1^* = f[x_0]$			
		$-2^* = f[x_0, x_1]$		
$\xi_0 = x_1 = 0$	$-1^* = f[x_1]$		$3 = f[x_0, x_1, x_2]$	
		$1 = f[x_1, x_2]$		$6 = f[x_0, \ldots, x_3]$
$\xi_1 = x_2 = 1$	$0^* = f[x_2]$		$9 = f[x_1, x_2, x_3]$	
		$10^* = f[x_2, x_3]$		$11 = f[x_1, \ldots, x_4]$
$\xi_1 = x_3 = 1$	$0^* = f[x_3]$		$20^* = f[x_2, x_3, x_4]$	
		$10^* = f[x_3, x_4]$		
$\xi_1 = x_4 = 1$	$0^* = f[x_4]$			

داریم :

$$P_{01234}(x) = P(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1]\,[\![x - x_0]\!] + f[x_0, x_1, x_2]\,[\![x - x_0]\!]^2$$
$$+ f[x_0, x_1, x_2, x_3]\,[\![x - x_0]\!]^3 + f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]\,[\![x - x_0]\!]^4$$
$$= -1 - 2\,[\![x - 0]\!] + 3\,[\![x - 0]\!]^2 + 6\,[\![x - 0]\!]^3 + 5\,[\![x - 0]\!]^4$$
$$= -1 - 2x + 3x^2 + 6x^2(x-1) + 5x^2(x-1)^2$$

3–6–2 قضیه

اگر f تابعی از متغیر حقیقی با مقدار حقیقی باشد که $n+1$ بار روی فاصله $[a, b]$ مشتق پذیر است و $m+1$ نقطه متمایز ξ_i ، در فاصله $[a, b]$ به صورت زیر باشند:

$$a = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_m = b$$

و هرگاه $P(x)$ چند جمله ای از درجه نابیشتر از n باشد به طوریکه

$$n+1 = \sum_{i=0}^{m} n_i$$

که در شرایط درونیابی هرمیت $P^{(k)}(\xi_i) = f^{(k)}(\xi_i)$ صدق می کند، دراین صورت برای هر $\bar{x} \in [a, b]$ یک نقطه $\bar{\xi}$ متعلق به $I[\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m, \bar{x}]$ وجود دارد که

$$f(\bar{x}) - P(\bar{x}) = \frac{\omega(\bar{x}) f^{(n+1)}(\bar{\xi})}{(n+1)!}$$

که در آن

$$\omega(x) = (x-\xi_0)^{n_0} (x-\xi_1)^{n_1} \cdots (x-\xi_m)^{n_m}$$

اثبات

تمرین (مشابه قضیه خطای درونیابی چند جمله ای معمولی است).

از روش درونیابی هرمیت برای تقریب تابع حقیقی f به صورت به طور پاره ای چند جمله ای استفاده می شود. به طور دقیق تر برای تقریب f روی فاصله $[a, b]$ از تابعی چون φ در فضای توابع هرمیت $H_{\Delta}^{(\upsilon)}$ که υ عددی است طبیعی و Δ یک افراز فاصله $[a, b]$ است، استفاده می شود.

$$\Delta = \{a = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_m = b\}$$

$\varphi : [a,b] \to R$ تابعی است با خواص زیر:

الف) $\varphi \in C^{\upsilon-1}[a,b]$ (یعنی توابع φ ، $\upsilon-1$ بار مشتق پذیر روی فاصله $[a,b]$ است).

ب) $\varphi\big|_{I_i} \in \prod_{2\upsilon-1}$ (که در آن $I_i = [\xi_i, \xi_{i+1}]$ ، برای $i = 0,1,2,\cdots,m-1$).

یعنی تحدید φ به هر فاصله I_i یک تابع چند جمله ای از درجه نابیشتر از $2\upsilon-1$ است.

با توجه به آنچه بیان شد، آشکارا φ یک تابع به طور پاره ای چند جمله ای روی $[a,b]$ است که در همه نقاط ξ_i ، $i \in <0,m>$ دارای مشتقات تا مرتبه $\upsilon-1$ است و روی هر فاصله I_i ، $i \in <0,m-1>$ یک چند جمله ای از درجه نابیشتر از $2\upsilon-1$ است.

به ویژه اگر قرار دهیم:

$$\varphi(x) = P_i(x) \quad , \quad x \in I_i = [\xi_i, \xi_{i+1}]$$

$$i = 0,1,2,\cdots,m-1$$

یا

$$P_i = \varphi \Big|_{I_i} \quad , \quad P_i \in \prod_{2\upsilon-1}$$

با توجه به (الف) و (ب) داریم:

$$P_i^{(k)}(\xi_i) = f^{(k)}(\xi_i) \quad , \quad k = 0, 1, 2, \cdots, \upsilon - 1$$

$$P_i^{(k)}(\xi_{i+1}) = f^{(k)}(\xi_{i+1})$$

با توجه به خطا در درونیابی هرمیت داریم:

$$\left| f(x) - P_i(x) \right| \le \frac{\left| (x-\xi_i)(x-\xi_{i+1}) \right|^{\upsilon}}{(2\upsilon)!} \max \left| f^{(2\upsilon)}(\xi) \right|$$

$$, \quad \xi \in I_i$$

اگر $f \in C^{2\upsilon}[a,b]$ که به سهولت نتیجه می شود (به عنوان تمرین بررسی کنید).

$$\left| f(x) - P_i(x) \right| \le \frac{\left| \xi_{i+1} - \xi_i \right|^{2\upsilon}}{2^{2\upsilon}(2\upsilon)!} \max \left| f^{(2\upsilon)}(\xi) \right|$$

اگر نامساوی های اخیر را برای همه فاصله $[a,b]$ به کار ببریم، داریم :

$$\| f - \varphi \|_\infty = \max \left| f(x) - \varphi(x) \right| \le \frac{1}{2^{2\upsilon}(2\upsilon)!} \left\| f^{(2\upsilon)} \right\|_\infty \| \Delta \|^{2\upsilon}$$

$$x \in [a,b]$$

درصورتی که بدانیم

$$\| \Delta \| = \max \left| \xi_{i+1} - \xi_i \right| \quad , \quad i \in <0, m-1>$$

$\| \Delta \|$: ظرافت افراز

علاوه بر روابط اخیر روابط زیر نیز برای مشتقات f و P به وسیله " سیارله ، شولتز ، وارگا " ثابت شده اند:

$$\left| f^{(k)}(x) - P_i^{(k)}(x) \right| \leq \frac{\left| (x-\xi_i)(x-\xi_{i+1}) \right|^{\upsilon-k}}{k!\,(2\upsilon-2k)!} (\xi_{i+1}-\xi_i)^k \max \left| f^{2\upsilon}(\xi) \right|$$

برای همه $x \in I_i$ ، $\xi \in I_i$ ، $i \in <0, m-1>$ ، $k \in <0, \upsilon>$ لذا :

$$\left\| f^{(k)} - \varphi^{(k)} \right\|_\infty \leq \frac{\|\Delta\|^{2\upsilon-k}}{2^{2\upsilon-2k}\, k!\,(2\upsilon-2k)!} \left\| f^{2\upsilon} \right\|_\infty$$

7–2 درونيابي با توابع كسري گويا

1–7–2 خواص اصلي درونيابي گويا

فرض می کنیم که (x_i , f_i) برای $i \in <0,n>$ ، $n+1$ نقطه اتکاء داده شده از تابع حقیقی f باشد. در درونیابی های گویا، که از جمله مسائل درونیابی غیر خطی می باشند، تابع درونیاب را یک تابع کسری گویای به صورت $\Phi^{\mu,\nu}$ در نظر می گیریم. به طور دقیق تر

$$\Phi^{\mu,\nu}(x) = \frac{P^{\mu,\nu}(x)}{Q^{\mu,\nu}(x)}$$

که

$$P^{\mu,\nu}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_\mu x^\mu$$

$$Q^{\mu,\nu}(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_\nu x^\nu$$

یعنی

$$\Phi^{\mu,\nu}(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_\mu x^\mu}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_\nu x^\nu}$$

یعنی $P^{\mu,\nu} \in \Pi_{\mu}$ و $Q^{\mu,\nu} \in \Pi_{\nu}$ است.

جفت مرتب (μ,ν) را گاهی شبه درجه تابع Φ نامند.

می خواهیم Φ را به گونه ای تعیین کنیم که در شرایط درونیابی زیر صدق کند.

$$\Phi^{\mu,\nu}(x_i) = f_i \qquad , \qquad i = 0,1,2,\cdots,n$$

مجموعه شرایط فوق را مساله $A^{\mu,\nu}$ نامیم.

تابع درونیاب $\Phi^{\mu,\nu}$ ،هنگامی معین می شود که ثابت های $a_0, a_1, \cdots, a_{\mu}$ و $b_0, b_1, \cdots, b_{\nu}$

تعیین شود. برای تعیین این ثابت ها با توجه به مساله $A^{\mu,\nu}$ باید داشته باشیم که :

$$\frac{P^{\mu,\nu}(x_i)}{Q^{\mu,\nu}(x_i)} = f_i$$

یعنی

$$a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^{\,2} + \cdots + a_{\mu} x_i^{\,\mu} - f_i (b_0 + b_1 x_i + \cdots + b_{\nu} x_i^{\,\nu}) = 0$$

در اینجا فرض می کنیم که $n=\mu+\nu$ باشد.

مساله فوق را که از $A^{\mu,\nu}$ به دست آمده است، مساله $S^{\mu,\nu}$ نامیم.

در واقع $S^{\mu,\nu}$ ، دستگاهی از $1+\mu+\nu$ معادله و $2+\mu+\nu$ مجهول $a_\mu,\cdots,a_1,a_0$ $b_\nu,\cdots,b_1,b_0$ را در اختیار ما قرار می دهد، که یک دستگاه معادلات خطی همگن است.

لذا $S^{\mu,\nu}$ دستگاهی از $2+\mu+\nu$ مجهول و $1+\mu+\nu$ معادله خطی است، که چون تعداد مجهولات از تعداد معادلات بیشتر است، در صورت وجود جواب ، دارای بی نهایت جواب است.

خواهیم دید که جواب $S^{\mu,\nu}$ ، ممکن است، جواب $A^{\mu,\nu}$ نباشد.

2–7–2 مثال

برای نقاط اتکای

x_i	0	1	2
f_i	1	2	2

و $\mu=\nu=1$ داریم:

$$\begin{cases} a_0 - b_0 = 0 \\ a_0 - a_1 - 2\,(b_0 + b_1) = 0 \\ a_0 - 2\,a_1 - 2\,(b_0 + 2\,b_1) = 0 \end{cases}$$

یک جواب دستگاه فوق به صورت زیر است:

$$a_0 = b_0 = 0 \quad ; \quad a_1 = 2 \quad , \quad b_1 = 1$$

لذا

$$P^{1,1}(x) = 2x \quad ; \quad Q^{1,1}(x) = x$$

یعنی

$$\Phi^{1,1}(x) = \frac{2x}{x}$$

تابع فوق برای $x = 0$ به $\frac{0}{0}$ منجر می شود که مبهم است، لذا تابع $\Phi^{1,1}(x)$ را جواب $S^{\mu,\nu}$

می توان در نظر گرفت، در حالیکه این تابع جواب $A^{\mu,\nu}$ نیست و نقطه $(0,1)$ در آن صدق نمی کند. یعنی ممکن است، جواب های $S^{\mu,\nu}$ جواب $A^{\mu,\nu}$ نباشد، همین مساله کاربرد روش های درونیابی گویا را دشوار می سازد که باید با دقت مورد مطالعه قرار گیرد.در واقع در صورتی که جواب $S^{\mu,\nu}$ ، مساله $A^{\mu,\nu}$ را حل نکند، مساله درونیابی گویا را حل ناپذیر خوانیم.

در حل مسائل درونیابی گویا، مفهوم توابع گویای هم ارز، نقش مهمی دارد.

3-7-2 تعریف

اگر $\Phi_2(x) = \dfrac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ و $\Phi_1(x) = \dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ باشد Φ_1 و Φ_2 را هم ارز خوانیم هر گاه داشته باشیم:

$$P_1(x)\ Q_2(x) \equiv P_2(x)\ Q_1(x)$$

در این حالت چنین نمایش می دهیم:

$$\Phi_1 \sim \Phi_2$$

4–7–2 تعریف

تابع گویای $\Phi(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ را نسبتا اول نامند، هرگاه توابع $P(x)$ و $Q(x)$ نسبت به هم اول باشند.

یادآور می شود که دو چند جمله ای را نسبت به هم اول نامند هرگاه آنها، مقسوم علیه چند جمله ای با درجه بیشتر از صفر نداشته باشند.

5–7–2 قضیه

دستگاه معادلات خطی همگن، $S^{\mu,\nu}$ همواره دارای یک جواب غیر بدیهی است و برای هر جواب غیر بدیهی

$$\Phi^{\mu,\nu}(x) = \frac{P^{\mu,\nu}(x)}{Q^{\mu,\nu}(x)} \quad ; \quad Q^{\mu,\nu} \neq 0$$

برقرار است، یعنی همه جواب های غیر بدیهی $A^{\mu,\nu}$ ، عبارت های گویا اند.

اثبات

چون دستگاه معادلات خطی $S^{\mu,\nu}$ ، خطی همگن است لذا دست کم یک جواب صفر دارد، به دلیل بیشتر بودن تعداد مجهولات از تعداد معادلات، جواب غیر بدیهی نیز وجود دارد. اگر $S^{\mu,\nu}$ دارای جواب غیر بدیهی باشد و $Q(x) \equiv 0$ شود، با توجه به غیر بدیهی بودن جواب داریم:

$$(a_0, a_1, \cdots, a_\mu \ , \ b_0, b_1, \cdots, b_\nu) \neq 0 \qquad (۷)$$

و از طرف دیگر

$$S^{\mu,\nu}: \ P(x_i) - f_i \ Q(x_i) = 0 \quad , \quad i = 0,1,2,\cdots,\mu+\nu$$

یعنی

$$P(x_i) = 0 \quad , \quad i = 0,1,2,\cdots,\mu+\nu$$

یعنی تابع چند جمله ای $P(x)$ دارای $1+\mu+\nu$ ریشه است، در حالیکه درجه آن حداکثر $\mu+\nu$ است، لذا ناچارا باید (۷) متحد با صفر باشد. یعنی $P(x) \equiv 0$ $a_0 = a_1 = \cdots = a_\mu = 0$

و در نتیجه جواب $(a_0, a_1, \cdots, a_\mu, b_0, b_1, \cdots, b_\nu)$ غیر بدیهی نیست که خلاف فرض است. لذا

$$Q(x) \neq 0$$

6–7–2 قضیه

اگر Φ_1 و Φ_2 هر دو جواب های نابدیهی دستگاه معادلات همگن $S^{\mu,\nu}$ باشند، دراین صورت آنها هم ارزند و یک تابع گویا را نمایش می دهند.

اثبات

فرض می کنیم که

$$\Phi_1(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \quad , \quad \Phi_2(x) = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$$

هر دو مساله $S^{\mu,\nu}$ را حل کنند، در این صورت اگر

$$P(x) = P_1(x)Q_2(x) - P_2(x)Q_1(x)$$

آشکارا داریم :

$$P(x_i) = f_i\, Q_1(x_i)\, Q_2(x_i) - f_i\, Q_2(x_i)\, Q_1(x_i) = 0$$

$$i = 0, 1, 2, \cdots, \mu + \nu$$

یعنی تابع $P(x)$ که یک چند جمله ای از درجه نابیشتر از $\mu + \nu$ است در $1 + \mu + \nu$ نقطه صفر می شود. لذا باید متحد با صفر باشد، یعنی

$$P(x) \equiv 0 \quad \rightarrow \quad P_1(x)\, Q_2(x) \equiv Q_1(x)\, P_2(x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \sim \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_1 \sim \Phi_2$$

■ .

به عبارت دیگر جواب های غیر بدیهی مساله $S^{\mu,\nu}$ با تقریب هم ارزی توابع گویا یکتا اند.

با توجه به آنچه گذشت آشکارا اگر $\Phi^{\mu,\nu}$ جواب مساله $S^{\mu,\nu}$ باشد که جواب مساله $A^{\mu,\nu}$ نیز باشد، دراین صورت $A^{\mu,\nu}$ حل شدنی است. درغیراین صورت اگر $\Phi^{\mu,\nu}$ ای از $S^{\mu,\nu}$ شرایط $A^{\mu,\nu}$ را برنیاورد، $A^{\mu,\nu}$ حل شدنی نیست و در این حالت نقاطی وجود دارند، چون (x_i, f_i) برای $\boldsymbol{i}$ هایی که در رابطه $\Phi^{\mu,\nu}(x_i) = f_i$ صدق نمی کنند (مانند مساله اخیر).

این چنین نقاطی را نقاط غیر قابل دسترس برای $\Phi^{\mu,\nu}$ نامند. بنابراین تابع $\Phi^{\mu,\nu}$ ، جواب مساله $A^{\mu,\nu}$ است، اگر برای آن نقاط غیر قابل دسترس وجود نداشته باشند.

اگر $\Phi^{\mu,\nu}(x) = \dfrac{P^{\mu,\nu}(x)}{Q^{\mu,\nu}(x)}$ یک جواب مساله $S^{\mu,\nu}$ باشد، برای $i \in \{0,1,2,\cdots,\mu+\nu\}$

یکی از دو حالت زیر پیش می آید:

۱) $Q^{\mu,\nu}(x_i) \neq 0$ باشد. ۲) $Q^{\mu,\nu}(x_i) = 0$ است.

در حالت اول آشکارا

$$\Phi^{\mu,\nu}(x_i) = f_i$$

زیرا

$$P^{\mu,\nu}(x_i) - f_i\ Q^{\mu,\nu}(x_i) = 0$$

اما در حالتی که $Q^{\mu,\nu}(x_i) = 0$ باشد دراین صورت :

$$P^{\mu,\nu}(x_i) - f_i\ Q^{\mu,\nu}(x_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad P^{\mu,\nu}(x_i) = 0$$

یعنی $P^{\mu,\nu}$ و $Q^{\mu,\nu}$ هر دو دارای ریشه x_i اند، لذا نسبت به هم اول نیستند و هر دو دارای عامل مشترک $x - x_i$ می باشند که با حذف آنها $\tilde{\Phi}^{\mu,\nu}(x)$ را می یابیم که برای آن نقطه (x_i, f_i) غیر قابل دسترس است.

از آنچه گذشت نتیجه می شود که :

2-7-7 قضیه

اگر $S^{\mu,\nu}$ دارای جواب $\Phi^{\mu,\nu}$ نسبتا اول باشد، دراین صورت نقاط اتکای غیر قابل دسترس وجود ندارند، یعنی $A^{\mu,\nu}$ حل شدنی است.

فرض می کنیم که $\Phi^{\mu,\nu}$ یک تابع گویا و $\tilde{\Phi}^{\mu,\nu}$ هم ارز آن باشد که تابع آخری نسبتا اول است.

قضیه زیر را داریم:

2-7-8 قضیه

فرض می کنیم که $\Phi^{\mu,\nu}$ ، دستگاه $S^{\mu,\nu}$ را حل کند، دراین صورت $A^{\mu,\nu}$ حل پذیر است، اگر و فقط اگر $\tilde{\Phi}^{\mu,\nu}$ ، دستگاه $S^{\mu,\nu}$ را حل کند.

اثبات

اگر $\tilde{\Phi}^{\mu,\nu}$ دستگاه $S^{\mu,\nu}$ را حل کند، بنابراین چون نسبتا اول است، لذا نقطه غیرقابل دسترس وجود ندارد، یعنی $\tilde{\Phi}^{\mu,\nu}$ ، مساله $A^{\mu,\nu}$ را حل می کند.

اگر $\tilde{\Phi}^{\mu,\nu}$ دستگاه $S^{\mu,\nu}$ را حل نکند، دراین صورت تابع گویای هم ارز آن $\Phi^{\mu,\nu}$ نیز $S^{\mu,\nu}$ را حل نمی کند، یعنی $A^{\mu,\nu}$ را نیز حل نمی کند. یعنی $A^{\mu,\nu}$ حل نشدنی است . ■

گوئیم که نقاط اتکاء (x_i , f_i) برای $i = 0,1,2,\cdots,\delta$ در موقعیت ویژه قرار دارند، هرگاه مجموعه ای از نقاط اتکای آن، با تابعی چون $\Phi^{\kappa,\lambda}$ ، که در آن $\kappa + \lambda < \delta$ است، درونیابی شود.

9–7–2 قضیه

نقاط اتکای یک مساله درونیابی گویای $A^{\mu,\nu}$ غیر قابل حل در موقعیت ویژه قرار دارند.

اثبات

اگر مساله $A^{\mu,\nu}$ غیر قابل حل باشد، و $\Phi^{\mu,\nu}$ جواب $S^{\mu,\nu}$ باشد که در $A^{\mu,\nu}$ صدق نمی کند، لذا نقاطی غیرقابل دسترس چون (x_{i_j} , f_{i_j}) ، به طوریکه $j = 1,2,\cdots,\alpha$ وجود دارند.

($(x_{i_\alpha} , f_{i_\alpha}),\ldots,(x_{i_1} , f_{i_1})$ نقاط غیرقابل دسترس اند).

دراین صورت $x_{i_1} , x_{i_2} , \cdots , x_{i_\alpha}$ ریشه های مشترک تابع $P^{\mu,\nu}$ و $Q^{\mu,\nu}$ در عبارت

$$\Phi^{\mu,\nu}(x) = \frac{P^{\mu,\nu}(x)}{Q^{\mu,\nu}(x)}$$

اند.

اما نقاط قابل دسترس برابر $\mu+\nu+1-\alpha$ اند و تابع $\Phi^{\kappa,\lambda}(x)$ هم ارز $\Phi^{\mu,\nu}$ بعد از حذف عوامل مشترک دارای درجه ای برابر

$$\kappa+\lambda+1=\mu+\nu+1-2\alpha<\mu+\nu+1-\alpha$$

یعنی داریم :

$$\kappa+\lambda+1<\mu+\nu+1 \quad \Rightarrow \quad \kappa+\lambda<\mu+\nu=\delta$$

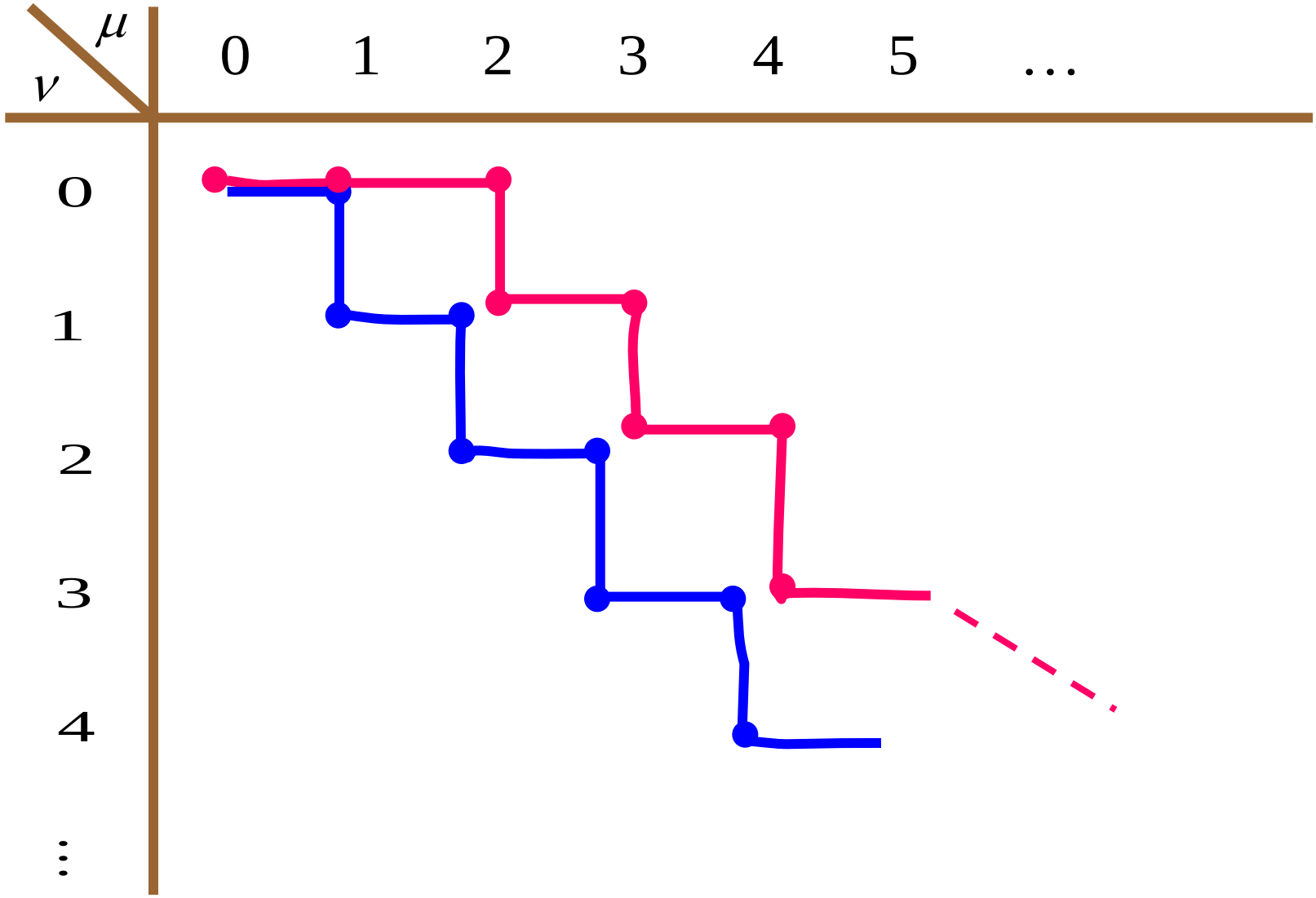
یعنی نقاط اتکای مساله $A^{\mu,\nu}$ در موقعیت ویژه قرار دارند . ■

با توجه به آنچه گذشت، ملاحظه می کنیم که حل یک مساله درونیابی گویا، به دقت و توجه نیاز دارد. به ویژه برای تعیین تابع $\Phi^{\mu,\nu}$ از جواب دستگاه همگن $S^{\mu,\nu}$ استفاده می کنیم که ممکن است، جواب این دستگاه، جواب مساله $A^{\mu,\nu}$ نباشد. حتی در مواردی که دستگاه دارای رتبه کامل $1+\mu+\nu$ است، نیز باید نتیجه به دست آمده را به دقت مورد ملاحظه قرار داد.

در عین حال در اغلب مسائلی که با آنها سروکار داریم فرض می کنیم جواب $S^{\mu,\nu}$ یک جواب نسبتا اول باشد و $A^{\mu,\nu}$ حل شدنی فرض می شود. در موارد دیگر می توان با مختصر تغییری از نقاط اتکاء یک مساله $A^{\mu,\nu}$ غیرقابل حل را به مساله ای قابل حل تبدیل نمود.

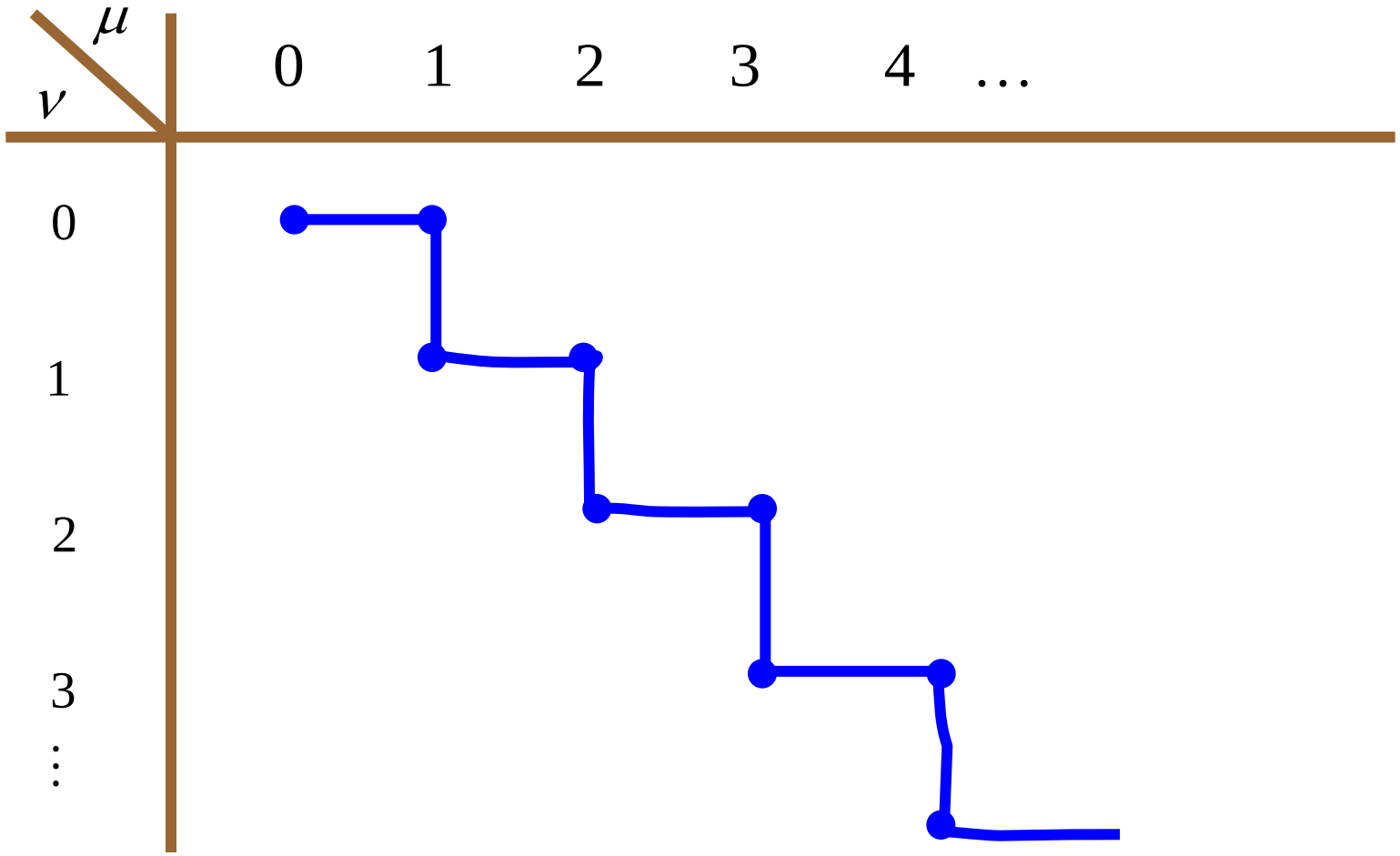
به جز روش مستقیم حل $S^{\mu,\nu}$ که می تواند در مواردی که μ و ν بزرگ نباشد، به کار آید، دو روش دیگر برای ساختن تابع $\Phi^{\mu,\nu}$ ذکر می کنیم که یکی به کمک کسر های مکرر و دیگری با روشی شبیه الگوریتم نویل است.در این دو روش، تابع گویا را به صورت بازگشتی ایجاد می کنیم.

در این روش ها می توان با ساختن توابع گویای با درجه کمتر $\Phi^{\mu,\nu}$ به طوریکه $\mu \le n$ و $\nu \le m$ باشد، تابع درونیاب مورد نظر را یافت، برای آنها مثلا می توان از روش هایی مانند جدول زیر استفاده کرد. ($n+m+1$ تعدادنقاط اتکا است.)


μ
ν
0
1
2
3
4
5
…
0
1
2
3
4
⋮

8–2 تفاضلات وارون و متقابل و کسر هاي پيوسته تيل (Thiel)

در روشی که ارائه می کنیم تابع گویا را بر اساس نمودار زیر به دست می آوریم:



برای این منظور از مفهوم تفاضلات وارون و جدول زیر استفاده می کنیم.

فرض می کنیم که (x_i , f_i) نقاط اتکاء داده شده برای $i = 0, 1, 2, \cdots$ باشد.

i	x_i	f_i	$\varphi(x_{i_1}, x_{i_2})$	$\varphi(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3})$	
0	x_0	f_0			
1	x_1	f_1	$\varphi(x_0, x_1)$		
2	x_2	f_2	$\varphi(x_0, x_2)$	$\varphi(x_0, x_1, x_2)$	
3	x_3	f_3	$\varphi(x_0, x_3)$	$\varphi(x_0, x_1, x_3)$	$\varphi(x_0, x_1, x_2, x_3)$

کمیت های $\varphi(x_{i_1}, x_{i_2})$ و از این قبیل، تفاضلات وارون نامیده می شوند، و تعریف می کنیم.

$$\varphi(x_i, x_j) = \frac{x_i - x_j}{f_i - f_j}$$

در واقع تفاضل فوق معکوس تفاضلات تقسیم شده است که به دلیل برابری f_i و f_j می تواند، بی نهایت نیز باشد. هم چنین تعریف می کنیم :

$$\varphi(x_i, x_j, x_k) = \frac{x_j - x_k}{\varphi(x_i, x_j) - \varphi(x_i, x_k)}$$

و

$$\varphi(x_i, \dots, x_l, x_m, x_n) = \frac{x_m - x_n}{\varphi(x_i, \dots, x_l, x_m) - \varphi(x_i, \dots, x_l, x_n)}$$

بر خلاف تفاضلات تقسیم شده، تفاضل وارون نسبت به آرگومان هایش متقارن نیست، یعنی ممکن است، با تعویض مولفه های تشکیل دهنده آرگومان، مقدار تفاضل معکوس یا وارون تغییر کند. نحوه استفاده از تفاضلات وارون، در ساختن تابع گویای درونیاب را در حالت ویژه ای بررسی می کنیم.

فرض می کنیم (x_i , f_i)، برای $i = 0, 1, 2, \cdots, 2n$ نقاط اتکای داده شده باشند.

($x_i \neq x_j$ ، $i, j \in <0, 2n>$) فرض می کنیم ، $\mu = \nu = n$ باشد. دراین صورت می خواهیم $\Phi^{n,n}(x)$ را به گونه ای بیابیم که

$$\Phi^{n,n}(x_i) = f_i \quad , \quad i = 0, 1, 2, \cdots, 2n$$

قرار می دهیم:

$$\Phi^{n,n}(x) = \frac{P^n(x)}{Q^n(x)}$$

(n برای P و Q نمایش درجه آنهاست نه توان) بنابراین داریم:

$$\frac{P^n(x)}{Q^n(x)} = f_0 + \frac{P^n(x)}{Q^n(x)} - \frac{P^n(x_0)}{Q^n(x_0)}$$

$$= f_0 + (x - x_0)\frac{P^{n-1}(x)}{Q^n(x)} = f_0 + \frac{(x - x_0)}{Q^n(x) \Big/ P^{n-1}(x)}$$

عبارت گویای $\frac{Q^n(x)}{P^{n-1}(x)}$ در رابطه زیر صدق می کند.

$$\frac{Q^n(x)}{P^{n-1}(x)} = \varphi(x_0, x_1) + \frac{Q^n(x)}{P^{n-1}(x)} - \frac{Q^n(x_1)}{P^{n-1}(x_1)} \qquad (۸)$$

که در آن

$$\frac{Q^n(x_i)}{P^{n-1}(x_i)} = \frac{x_i - x_0}{f_i - f_0} = \varphi(x_0, x_i)$$

$$, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, 2n$$

در نظر گرفته ایم. لذا داریم:

$$\frac{P^{n}(x_i)}{Q^{n}(x_i)} = f_0 + \frac{x_i - x_0}{Q^{n}(x_i) \Big/ P^{n-1}(x_i)}$$

$$= f_0 + \frac{x_i - x_0}{\dfrac{x_i - x_0}{f_i - f_0}} = f_0 + f_i - f_0 = f_i$$

$$, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, 2n$$

بار دیگر با کاربرد (۸) داریم:

$$\frac{Q^{n}(x)}{P^{n-1}(x)} = \varphi(x_0, x_1) + (x - x_1)\,\frac{Q^{n-1}(x)}{P^{n-1}(x)}$$

$$= \varphi(x_0, x_1) + \frac{x - x_1}{P^{n-1}(x) \Big/ Q^{n-1}(x)}$$

آشکارا داریم :

$$\frac{P^{n-1}(x_i)}{Q^{n-1}(x_i)} = \frac{x_i - x_1}{\varphi(x_0, x_i) - \varphi(x_0, x_1)} = \varphi(x_0, x_1, x_i)$$

$$i = 2, 3, \cdots, 2n$$

با تکرار روش فوق در نهایت به دست می آوریم:

$$\phi^{n,n}(x) = \frac{P^n(x)}{Q^n(x)} = f_0 + \frac{x - x_0}{Q^n(x) \Big/ P^{n-1}(x)}$$

$$= f_0 + \frac{x - x_0}{\varphi(x_0, x_1) + \dfrac{x - x_1}{P^{n-1}(x) \Big/ Q^{n-1}(x)}}$$

$$= f_0 + \cfrac{x - x_0}{\varphi(x_0, x_1) + \cfrac{x - x_1}{\varphi(x_0, x_1, x_2) + \cfrac{x - x_2}{\varphi(x_0, x_1, x_2, x_3) + \cfrac{x - x_3}{\ldots \quad + \cfrac{x - x_{2n-1}}{\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{2n})}}}}}$$

مخرج کسر فوق تشکیل کسر های مسلسل یا پیوسته می دهند که آنها را کسر های مسلسل تیل نیز نامند.

برای سهولت نمایش ϕ از نماد های زیر استفاده می کنیم :

$$\phi^{n,n}(x) = f_0 + \underline{\quad x - x_0 \quad} \Big/ \overline{\varphi(x_0, x_1)} + \underline{\quad x - x_1 \quad} \Big/ \overline{\varphi(x_0, x_1, x_2)} +$$

$$+ \underline{\quad x - x_2 \quad} \Big/ \overline{\varphi(x_0, x_1, x_2, x_3)} + \ldots + \underline{\quad x - x_{2n-1} \quad} \Big/ \overline{\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{2n})}$$

می توان چنین نوشت:

$$\phi^{0,0}(x) = f_0$$

$$\phi^{1,0}(x) = f_0 + (x - x_0) \Big/ \varphi(x_0, x_1)$$

$$\phi^{1,1}(x) = f_0 + (x - x_0) \Big/ \varphi(x_0, x_1) + (x - x_1) \Big/ \varphi(x_0, x_1, x_2)$$

عبارت $\varphi(x_0, x_1)$ و $\varphi(x_0, x_1, x_2)$ و . . . اولین عناصر در ستون جدول تفاضلات وارون می باشند.

مثال 1–8–2

برای مجموعه داده های زیر تابع درونیاب کسری گویا را بیابید:

لذا

i	x_i	f_i	$\varphi(x_i, x_j)$	$\varphi(x_i, x_j, x_k)$	.....
0	0	0			
1	1	-1	$\varphi(x_0, x_1) = -1$		
2	2	$-\frac{2}{3}$	$\varphi(x_0, x_2) = -3$	$\varphi(x_0, x_1, x_2) = -\frac{1}{2}$	
3	3	9	$\varphi(x_0, x_3) = \frac{1}{3}$	$\varphi(x_0, x_1, x_3) = \frac{3}{2}$	$\varphi(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}$

$$\phi^{2,1}(x) = 0 + \underline{\quad x \quad}\Big/\overline{-1} + \underline{\quad x-1 \quad}\Big/\overline{-\frac{1}{2}} + \underline{\quad x-2 \quad}\Big/\overline{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{x}{-1+\dfrac{x-1}{-\dfrac{1}{2}+\dfrac{x-1}{\dfrac{1}{2}}}} = \frac{x}{-1+\dfrac{2x-2}{4x-9}} = \dots = \frac{4x^2-9x}{7-2x}$$

چون تفاضلات وارون دارای خاصیت تقارنی نیستند، معمولا از تفاضلات دیگری موسوم به تفاضلات متقابل استفاده می کنیم که به صورت زیر تعریف می شود و با نماد

$$\rho(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k})$$

نمایش داده می شود و داریم :

$$\rho(x_i) = f_i \qquad , \qquad i \in <0, n>$$

$$\rho(x_i, x_k) = \frac{x_i - x_k}{f_i - f_k} = \varphi(x_i, x_k)$$

$$\rho(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k})$$

$$= \frac{x_i - x_{i+k}}{\rho(x_i, \ldots, x_{i+k-1}) - \rho(x_{i+1}, \ldots, x_{i+k})} + \rho(x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1})$$

یا

$$\rho(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}) - \rho(x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1})$$

$$= \frac{x_i - x_{i+k}}{\rho(x_i, \ldots, x_{i+k-1}) - \rho(x_{i+1}, \ldots, x_{i+k})}$$

می توان ثابت کرد که تفاضلات متقابل دارای خاصیت تقارنی است، برای یک اثبات آن به Milne و Thompson (۱۹۵۱) مراجعه کنید.

رابطه تفاضلات متقابل و تفاضلات وارون بر اساس قضیه زیر است:

2–8–2 قضیه

برای $p = 1, 2, \cdots$ داریم که

$$\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_p) = \rho(x_0, x_1, \ldots, x_p) - \rho(x_0, x_1, \ldots, x_{p-2})$$

درحالیکه فرض می کنیم $\rho(x_0, x_1, \ldots, x_{p-2}) = 0$ برای $p = 1$.

اثبات

آشکارا داریم که

$$\varphi(x_0, x_1) = \frac{x_0 - x_1}{f_0 - f_1} = \rho(x_0, x_1) - 0 = \rho(x_0, x_1)$$

یعنی رابطه برای $p = 1$ صحیح است. فرض می کنیم رابطه برای p صحیح باشد، آن را برای $p + 1$ ثابت می کنیم .

داریم :

$$\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{p+1}) = \frac{x_p - x_{p+1}}{\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_p) - \varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}, x_{p+1})}$$

لذا با توجه به فرض استقراء داریم :

$$\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{p+1}) = \frac{x_p - x_{p+1}}{\rho(x_0, x_1, \ldots, x_p) - \rho(x_0, \ldots, x_{p-2}) - \rho(x_0, \ldots, x_{p-1}, x_{p+1}) + \rho(x_0, \ldots, x_{p-2})}$$

$$= \frac{x_p - x_{p+1}}{\rho(x_0, x_1, \ldots, x_p) - \rho(x_0, \ldots, x_{p-1}, x_{p+1})}$$

اما با توجه به تعریف داریم

$$\frac{x_p - x_{p+1}}{\rho(x_0, \ldots, x_p) - \rho(x_0, \ldots, x_{p-1}, x_{p+1})}$$

$$= \rho(x_p, x_0, \ldots, x_{p-1}, x_{p+1}) - \rho(x_0, \ldots, x_{p-1})$$

چون ρ نسبت به آرگومان ها متقارن است می توان جایش را عوض کرد. لذا کسر فوق به صورت زیر در می آید :

$$\rho(x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}, x_p, x_{p+1}) - \rho(x_0, x_1, \ldots, x_{p-1})$$

لذا داریم

$$\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_p, x_{p+1})$$
$$= \rho(x_0, \ldots, x_p, x_{p+1}) - \rho(x_0, x_1, \ldots, x_{p-1})$$

■ .

اکنون می توان جدول تفاضلات متقابل را به صورت زیر ارائه نمود .

i	x_i	f_i	$\rho(x_i, x_j)$	$\rho(x_i, x_j, x_k)$	.....
0	x_0	f_0			
			$\rho(x_0, x_1)$		
1	x_1	f_1		$\rho(x_0, x_1, x_2)$	
			$\rho(x_1, x_2)$		$\rho(x_0, x_1, x_2, x_3)$
2	x_2	f_2		$\rho(x_1, x_2, x_3)$	$\vdots$
			$\rho(x_2, x_3)$	$\vdots$	
3	x_3	f_3	$\vdots$		
	$\vdots$	$\vdots$			

حال $\phi^{n,n}(x)$ را می توان به صورت زیر نیز نوشت :

$$\phi^{n,n}(x) = f_0 + \frac{x - x_0}{\rho(x_0, x_1)} + \frac{x - x_1}{\rho(x_0, x_1, x_2) - \rho(x_0)} + \cdots + \frac{x - x_{2n-1}}{\rho(x_0, x_1, \ldots, x_{2n}) - \rho(x_0, x_1, \ldots, x_{2n-2})}$$

9-2 مقایسه درونیابي چند جمله اي و گویا

روش های درونیابی چند جمله ای در اغلب موارد که تابع مورد نظر در فاصله درونیابی دارای رفتار مناسب و تغییرات آن جزئی باشد، معمولا مناسب است. اما در مورد توابعی که دارای نقاطی تکین در نزدیکی نقاط گره درونیابی می باشند، روش درونیابی چند جمله ای، نتایج رضایت بخشی به دست نمی دهد، در حالیکه توابع کسری گویا در این موارد می توانند، نتایج رضایت بخشی به دست دهند.

توابع چند جمله ای مثلثاتی می توانند به عنوان توابع درونیاب برای تقریب تابع f که (x_i , f_i) نقاطی از نمودار آن هستند، نیز مورد استفاده قرار گیرد، این توابع با تقریب یک ثابت، ترکیب خطی توابع $\cos kx$ و $\sin kx$ برای $k \in N$ می باشد، دو شکل از آنها که مورد توجه ما هستند، عبارتند از :

$$\psi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{h=1}^{M} (A_h \cos(hx) + B_h \sin(hx)) \qquad (۹)$$

(اگر $N = 2M + 1$ باشد $M \in N^*$)

$$\psi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{h=1}^{M-1} (A_h \cos(hx) + B_h \sin(hx)) + \frac{A_M}{2} \cos Mx \qquad (۱۰)$$

$$M \in N \quad , \quad N = 2M$$

این توابع برای درونیابی نقاط اتکاء (x_i , f_i) که در آن $i = 0, 1, 2, \cdots, N-1$ می باشند، مورد استفاده قرار می گیرند.

آشکارا توابع ψ در روابط (۹) و (۱۰) توابعی پیوسته، دوره ای با دوره تناوب 2π از متغیر x هستند. فرمول اولر در بحث حاضر از اهمیت ویژه برخوردار است. یاد آور می شویم

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta \quad , \quad \theta \in R$$

$$e^{ihx} = \cos hx + i \sin hx \quad , \quad h \in Z \quad , \quad x \in R$$

در بحث حاضر نقاط x_k ، یعنی طول نقاط اتکاء از یک افراز یکنواخت فاصله $[0, 2\pi]$ پدید می آیند. به طور دقیق تر

$$x_k = \frac{2\pi k}{N} \qquad k \in <0, N-1>$$

یعنی نقاط گره درونیابی همگام اند. با فرض فوق، نتایج خاصی به دست می آیند که ممکن است، همه آنها در مورد نقاط گره غیر همگام قابل کاربرد نباشد.

در اینجا سعی می کنیم مساله درونیابی به وسیله تابع $\psi(x)$ را به مساله یافتن تابع

$$P(x) = \beta_0 + \beta_1 e^{ix} + \beta_2 e^{2ix} + \cdots + \beta_{N-1} e^{(N-1)ix} \qquad (11)$$

که آن را چندجمله ای فاز درونیاب می نامیم، تبدیل نمود. که در آن β_i ها ضرایب چند جمله ای فاز می باشند که اعدادی مختلط اند.

می خواهیم داشته باشیم

$$P(x_k) = f_k \quad , \quad k = 0, 1, 2, \cdots, N-1$$

توجه داریم که

$$e^{2\pi k i} = 1 \quad , \quad k \in Z$$

به ویژه داریم که

$$e^{-i h x_k} = e^{-i h \frac{2\pi k}{N}} = e^{-2 i \frac{h k \pi}{N}} = e^{\frac{-2 i h k \pi}{N}}$$

$$= e^{N x_k i} \; e^{-i h x_k} = e^{(N-h)\, i x_k}$$

یعنی

$$e^{-i h x_k} = e^{(N-h)\, i x_k} \qquad , \qquad h, k \in <0, N-1>$$

اما داریم

$$\cos\ (h x_k) = \frac{e^{i h x_k} + e^{-i h x_k}}{2}$$

$$\sin\ (h x_k) = \frac{e^{i h x_k} - e^{-i h x_k}}{2 i}$$

لذا با توجه به نتیجه اخیر ، داریم :

$$\cos\ (h\,x_k) = \frac{1}{2}\ (e^{\,i\,h\,x_k} + e^{\,i\,(N-h)\,x_k})$$

$$\sin\ (h\,x_k) = \frac{1}{2\,i}\ (e^{\,i\,h\,x_k} - e^{\,i\,(N-h)\,x_k})$$

$$\cos\ (h\,x) = \frac{e^{\,i\,h\,x} + e^{\,i\,(N-h)\,x}}{2}$$

$$\sin\ (h\,x) = \frac{e^{\,i\,h\,x} - e^{\,i\,(N-h)\,x}}{2\,i}$$

با قرار دادن مقادیر $\cos(h\,x)$ و $\sin(h\,x)$ از دو رابطه اخیر در $\psi(x)$ در معادلات (۹) و (۱۰) و ساده نمودن عبارت و تعیین ضرایب $e^{\,i\,h\,x}$ و $e^{\,i\,(N-h)\,x}$ نتایج مهم زیر را به دست می آوریم:

1–10–2 قضیه

داریم :

الف) اگر N فرد باشد و قرار دهیم ، $N = 2M + 1$ ، آنگاه ضرایب چند جمله ای $P(x)$ به صورت زیر به دست می آیند.

$$\beta_0 = \frac{A_0}{2} \quad , \quad \beta_j = \frac{1}{2}(A_j - i B_j)$$

$$\beta_{N-j} = \frac{1}{2}(A_j + i B_j) \quad , \quad j = 1, 2, \cdots, M$$

و به عکس

$$A_0 = 2\ \beta_0 \quad , \quad A_h = \beta_h + \beta_{N-h}$$

$$B_h = i(\beta_h - \beta_{N-h}) \quad , \quad h = 1, 2, \cdots, M$$

ب) اگر N زوج باشد و قرار دهیم : $N = 2M$ ، آنگاه

$$\beta_0 = \frac{A_0}{2} \quad , \quad \beta_j = \frac{1}{2}(A_j - i\, B_j)$$

$$\beta_{N-j} = \frac{1}{2}(A_j + i\, B_j) \quad , \quad j = 1, 2, \cdots, M-1$$

$$\beta_M = \frac{A_M}{2}$$

و

$$A_0 = 2\ \beta_0 \quad , \quad A_h = \beta_h + \beta_{N-h}$$

$$B_h = i(\beta_h - \beta_{N-h}) \quad , \quad h = 1, 2, \cdots, M-1$$

$$A_M = 2\ \beta_M$$

اثبات : تمرین

برای $P(x_k) = f_k \quad ، \quad k = 0,1,2,\cdots,N-1 \quad ، \quad x_k = \frac{2\pi k}{N}$

اگر $\omega = e^{ix}$ آشکارا

$$e^{ihx} = (e^{ix})^h = \omega^h \qquad , \qquad h = 1,2,\cdots,N-1$$

همچنین قرار می دهیم که

$$\omega_k = e^{ix_k} = e^{i\frac{2k\pi}{N}}$$

بنابراین

$$\omega_k^j = (e^{ix_k})^j = e^{ijx_k} = e^{i\frac{2kj\pi}{N}}$$

با قرار داد فوق چند جمله ای درونیاب فاز به صورت

$$P(\omega) = \beta_0 + \beta_1\omega + \beta_2\omega^2 + \cdots + \beta_{N-1}\omega^{N-1}$$

می باشد که یک چند جمله ای معمولی با متغیر مختلط و ضرایب مختلط است و با توجه به اینکه

$$P(x_k) = f_k \qquad , \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1$$

مفروض شده (در رابطه (۱۱)) لذا در اینجا نیز برای P جدید داریم:

$$P(\omega_k) = \beta_0 + \beta_1 \omega_k + \cdots + \beta_{N-1} \omega_k^{N-1} = f_k$$

از آنجا که قضیه یکتایی تابع چند جمله ای درونیاب برای نقاط (ω_j , f_j) ، $j = 0, 1, \cdots, N-1$

با فرض به اینکه

$$\omega_j \neq \omega_k \qquad 0 \leq j \ , \ k \leq N-1$$

برقرار است ، لذا داریم :

2–10–2 قضیه

برای هر مجموعه نقاط اتکاء (x_k , f_k) ، $k = 0,1,\cdots,N-1$ با شرط $x_k = \frac{2\pi k}{N}$ یک چند جمله ای فاز درونیاب

$$P(x) = \beta_0 + \beta_1 e^{ix} + \cdots + \beta_{N-1} e^{i(N-1)x}$$

یا

$$\tilde{P}(\omega) = \beta_0 + \beta_1 \omega + \cdots + \beta_{N-1} \omega^{N-1}$$

یکتا وجود دارد به طوری که

$$P(x_k) = f_k$$

$$\tilde{P}(\omega_k) = f_k \qquad , \qquad k = 0,1,\cdots,N-1$$

اثبات : تمرین

توجه داریم

$$\omega_k^j = \omega_j^k = e^{i\frac{2k\pi}{N}j} = e^{\frac{2kj\pi}{N}i} \quad , \quad k, j \in N^*$$

از طرف دیگر داریم :

$$\omega_k^N = 1 \quad , \quad k = 0, 1, \cdots, N-1$$

زیرا

$$\omega_k^N = \left(e^{\frac{2k\pi}{N}i}\right)^N = e^{2\pi k i} = 1$$

لذا ω_k ریشه معادله $\omega^N = 1$ یا معادله $\omega^N - 1 = 0$ است .

3–10–2 قضیه

برای $h \le N-1$, $0 \le j$ داریم :

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega_k^j \, \omega_k^{-h} = \begin{cases} 0 & j \neq h \\ N & j = h \end{cases}$$

اثبات

در حالت $j = h$ تحت شرایط فوق داریم :

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega_k^{\,j}\, \omega_k^{\,-h} = \sum_{k=0}^{N-1} \omega_k^{\,j-h} = \sum_{k=0}^{N-1} \omega_k^{\,0}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} e^{\,0\,i} = \sum_{k=0}^{N-1} 1 = N$$

لذا برای $j = h$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega_k^{\,j}\, \omega_k^{\,-h} = N$$

اما اگر $j \neq h$ باشد، $\omega_k^{\,j-h} \neq 1$ لذا از طرفی در معادله $\omega^{\,N} - 1 = 0$ صدق می کند و از طرف دیگر در معادله $\omega - 1 = 0$ صدق نمی کند.

اما توجه داریم که

$$\omega^{N} - 1 = (\omega - 1) \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{k}$$

لذا

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega_{j-h}^{k} = 0$$

اما داریم :

$$0 = \sum_{k=0}^{N-1} \omega_{j-h}^{k} = \sum_{k=0}^{N-1} \omega_{k}^{j-h} = \sum_{k=0}^{N-1} \omega_{k}^{j} \ \omega_{k}^{-h}$$

لذا

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega_{k}^{j} \ \omega_{k}^{-h} = 0$$

برای $j \neq h$. ■

با توجه به قضیه فوق می توان یک ضرب اسکالر برای بردار های

$$w^{(h)} = (1, \omega_1^h, \omega_2^h, \ldots, \omega_{N-1}^h) \quad , \quad h = 0, 1, \cdots, N-1$$

تعریف کرد. به طور دقیق ضرب اسکالری بردار $w^{(j)}$ در $w^{(h)}$ را که با نماد $[\, w^{(j)}, w^{(h)} \,]$ نمایش داده می شود به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$[\, w^{(j)}, w^{(h)} \,] = {}^t w^{(j)} \overline{w^{(h)}} = {}^t w^{(j)} \, w^{(-h)}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \omega_k^j \ \omega_k^{-h}$$

که از آن نتیجه می شود :

$$[\, w^{(j)}, w^{(h)} \,] = 0 \quad , \quad j \neq h$$

$$[\, w^{(j)}, w^{(h)} \,] = N \quad , \quad j = h$$

یعنی بردار های $w^{(k)} \in C^N$ به صورت فوق تعریف شده، تشکیل مجموعه ای متعامد می دهند، اما این بردار ها یکه نیستند، در واقع طول آنها که با رابطه $[\,w^{(j)}\,,w^{(j)}\,]^{\frac{1}{2}}$ تعریف می شود برابر $\sqrt{N}$ است. همچنین داریم :

$$[\,w^{(j)}\,,w^{(j)}\,] = {}^{t}w^{(j)}\,\overline{w^{(j)}}$$

$$=[\,1,\omega_1^{\,j},\ldots,\omega_{N-1}^{\,j}\,]\begin{bmatrix}\overline{1}\\ \overline{\omega_1^{\,j}}\\ \vdots\\ \overline{\omega_{N-1}^{\,j}}\end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{N-1}\omega_k^{\,j}\;\overline{\omega_k^{\,j}} = \sum_{k=0}^{N-1}\left|\,\omega_k^{\,j}\,\right|^2$$

می توان برای محاسبه ضرایب β_j از چند جمله ای فاز درونیاب از روش های معمول درونیابی چند جمله ای استفاده نمود. اما خوشبختانه می توان به صورت ساده تر β_j را به شکل خاصی بر حسب درایه های f_j ارائه نمود.

4–10–2 قضیه

چند جمله ای فاز درونیاب $P(x)=\sum_{j=0}^{N-1}\beta_j\, e^{j i x}$ در شرط

$$P(x_k)=f_k \qquad , \qquad k=0,1,\cdots,N-1$$

برای f_k مختلط و $x_k=\frac{2\pi k}{N}$ صدق می کند، اگر و تنها اگر

$$\beta_j=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_k\ \omega_k^{-j}=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_k\ e^{\frac{-2\pi j k}{N} i}$$

$$, \quad j=0,1,\cdots,N-1$$

اثبات

فرض می کنیم که برای β_j های مختلط ،

$$P(x)=\beta_0+\beta_1 e^{i x}+\cdots+\beta_{N-1} e^{i(N-1)x_k}$$

و داشته باشیم :

$$P(x_k) = f_k \quad , \quad k = 0,1,\cdots,N-1 \qquad (۱۲)$$

قرار می دهیم

$$w^{(j)} = (1, e^{ijx_1}, \ldots, e^{ijx_{N-1}})$$

با توجه به فرض (۱۲) داریم :

$$P(x_k) = \beta_0 + \beta_1 e^{ix_k} + \cdots + \beta_{N-1} e^{i(N-1)x_k} = f_k$$

لذا اگر قرار دهیم

$$f = (f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$$

که نسبت به پایه $\{w^{(0)}, w^{(1)}, \ldots, w^{(N-1)}\}$ در فضای C^N در نظر گرفته می شود، داریم :

$$f = (f_0 , f_1 , \cdots , f_{N-1})$$

$$= (\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_{N-1} , \beta_0 + \beta_1 e^{i x_1} + \cdots + \beta_{N-1} e^{i (N-1) x_1} , \ldots ,$$

$$\beta_0 + \beta_1 e^{i x_{N-1}} + \cdots + \beta_{N-1} e^{i (N-1) x_{N-1}})$$

$$= (\beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_{N-1} , \beta_0 + \beta_1 \omega_1^1 + \cdots + \beta_{N-1} \omega_1^{N-1} , \ldots ,$$

$$\beta_0 + \beta_1 \omega_{N-1}^1 + \cdots + \beta_{N-1} \omega_{N-1}^{N-1})$$

$$= \beta_0 (1, 1, \ldots , 1) + \beta_1 (\omega_1^0 , \omega_1^1 , \ldots , \omega_1^{N-1})$$

$$+ \cdots + \beta_{N-1} (\omega_{N-1}^0 , \omega_{N-1}^1 , \ldots , \omega_{N-1}^{N-1})$$

$$= \beta_0 w^{(0)} + \beta_1 w^{(1)} + \cdots + \beta_{N-1} w^{(N-1)}$$

اکنون می توان نوشت :

$$\frac{1}{N} [f , w^{(j)}] = \frac{1}{N} [\beta_0 w^{(0)} , \ldots , \beta_{N-1} w^{(N-1)} , w^{(j)}]$$

$$= \frac{1}{N} (N \ \beta_j) = \beta_j$$

لذا داریم :

$$\beta_j = \frac{1}{N}[\, f\,, w^{(j)}\,] = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_k\ \omega_k^{-j} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_k\ e^{\frac{-2\pi i\, j\, k}{N}}$$

به عکس اگر

$$P(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \beta_j\, \omega^j$$

و

$$\beta_j = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k\ \omega_k^{-j}$$

آنگاه

$$P(x_k) = f_k \qquad , \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1$$

برای اثبات توجه می کنیم که

$$P(x_k) = \sum_{j=0}^{N-1} \beta_j \omega_k^j = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{N} \left(\sum_{k=0}^{N-1} f_k \omega_k^{-j}\right) \omega_k^j$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \omega_k^{-j} \omega_k^j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \sum_{j=0}^{N-1} \omega_k^j \omega_k^{-j}$$

$$= \frac{1}{N} N f_k = f_k$$

5–10–2 تعریف

اگر

$$P(x) = \beta_0 + \beta_1 e^{ix} + \cdots + \beta_{N-1} e^{i(N-1)x}$$

را در نظر بگیریم، چند جمله ای

$$P_s(x) = \beta_0 + \beta_1 e^{ix} + \cdots + \beta_s e^{isx}$$

را برای

$$0 \le s \le N-1$$

یک S _ قطعه از چند جمله ای درونیاب فاز نامند. این چند جمله ای دارای خاصیت کمترین مربعاتی است و در حالت $S = N-1$ دقیقا همان تابع درونیاب مطلوب است. برای نشان دادن این مطلب تابع q را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$q(x) = \gamma_0 + \gamma_1 e^{ix} + \cdots + \gamma_s e^{isx}$$

6–10–2 قضیه

چند جمله ای $P_s(x)$ با شرط $0 \le s < N$ یعنی S_ قطعه چند جمله ای درونیاب فاز $P(x)$ مجموع زیر را مینیمم می سازد.

$$S(q) = \sum_{k=0}^{N-1} \left| f_k - q(x_k) \right|^2$$

(توجه داریم که $S(P) = 0$) و $S(q)$ مجموع توان های دوم مقادیر، باقیمانده همه چند جمله ای های فاز $q(x) = \gamma_0 + \gamma_1 e^{ix} + \cdots + \gamma_s e^{isx}$ نسبت به f_j در نقطه x_j است.

تابع $P_s(x)$ به صورت فوق به طور یکتا تعیین می شود.

اثبات

فرض می کنیم

$$P_s = (P_s(x_0), P_s(x_1), \ldots, P_s(x_{N-1}))$$

$$q = (q(x_0), \ldots, q(x_{N-1}))$$

اما می توان نوشت که

$$S(q) = [f-q, f-q] = (f-q)^t \ (\overline{f-q})$$

با توجه به قضیه ی اخیر

$$\beta_j = \frac{1}{N}[f, w^{(j)}] \qquad j = 0, 1, \cdots, N-1$$

لذا برای $j \leq s$ **داریم :**

$$\frac{1}{N}\,[\,f - P_s\,,\,w^{(j)}\,] = \frac{1}{N}\,[\,f - \sum_{h=0}^{s}\,\beta_s\,w^{(h)}\,,\,w^{(j)}\,]$$

$$= \frac{1}{N}\,[\,f\,,\,w^{(j)}\,] - \frac{1}{N}\,\sum_{h=0}^{s}\,\beta_h\,[\,w^{(h)}\,,\,w^{(j)}\,]$$

$$= \beta_j - \beta_j = 0$$

از طرف دیگر

$$[\,f - P_s\,,\;P_s - q\,] = \sum_{j=0}^{s}\,[\,f - P_s\;,\;(\beta_j - \gamma_j)\;w^{(j)}\,]$$

$$= \sum_{j=0}^{s}\,(\beta_j - \gamma_j)\,[\,f - P_s\,,\;w^{(j)}\,]$$

$$= 0$$

لذا داریم :

$$
\begin{aligned}
S(q) &= [\, f-q,\ f-q\,] \\
&= [\, f-q+P_s-P_s\ ,\ f-q+P_s-P_s\,] \\
&= [\, f-P_s\,, f-P_s\,]+[\, f-P_s\,,\ P_s-q\,] \\
&\quad +[\, P_s-q\,, f-P_s\,]+[\, P_s-q\,, P_s-q\,] \\
&= [\, f-P_s\,,\ f-P_s\,]+\ [\, P_s-q\,,\ P_s-q\,] \\
&\geq [\, f-P_s\,,\ f-P_s\,] = s(P_s)
\end{aligned}
$$

یعنی تابع $P_s(x)$ دارای خاصیت کمترین مربعاتی نسبت به همه $q(x)$ هاست. به ویژه اگر $q=P_s$ داریم که $S(P_s)=[\,f-P_s\,,f-P_s\,]$ دارای خاصیت کمترین مربعاتی و درحالی که $P_s=P$ باشد، آنگاه $S(P)=0$ زیرا

$$S(P) = [\, f-P,\ f-P\,] = [\,0,0\,]$$

(زیرا $f_k = P(x_k)$)

یکتایی P_s از یکتایی چند جمله ای فاز درونیاب به دست می آید.

2 –10– 7 قضیه

عبارت های مثلثاتی

$$\psi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{h=0}^{M} \left(A_h \cos(h x) + B_h \sin(h x) \right)$$

$$\psi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{h=0}^{M-1} \left(A_h \cos(h x) + B_h \sin(h x) \right) + \frac{A_M}{2} \cos M x$$

برای به ترتیب $N = 2M+1$ و $N = 2M$ در شرط های زیر صدق می کند :

$$\psi(x_k) = f_k \quad , \quad k = 0, 1, \cdots, N-1$$

و $x_k = \frac{2\pi k}{N}$ ، اگر و فقط اگر ضرایب $\psi(x)$ به صورت زیر داده شوند:

$$A_h = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k \cos(h x_k) = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k \cos\frac{2\pi h k}{N}$$

$$B_h = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k \sin(h x_k) = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k \sin\frac{2\pi h k}{N}$$

اثبات

با توجه به قضایای قبلی کافیست صورت مثلثاتی ضرایب A_h و B_h را به دست آوریم :

$$A_h = \beta_h - \beta_{N-h} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i h x_k} + \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i x_k (N-h)}$$

$$= \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k \left(\frac{e^{-i h x_k} + e^{-i x_k (N-h)}}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k \cos h x_k = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k \cos\frac{2 h k \pi}{N}$$

به طریق مشابه

$$B_h = (\beta_h - \beta_{N-h})\, i = \frac{i}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k\, e^{-i h x_k} - \frac{i}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k\, e^{-i x_k (N-h)}$$

$$= \frac{2\, i^2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \left(\frac{e^{-i h x_k} - e^{-i x_k (N-h)}}{2\, i} \right)$$

$$= \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \sin(h x_k) = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \sin \frac{2 h k \pi}{N}$$

11-2 تبدیل فوریه سریع

دیدیم برای یافتن چند جمله ای مثلثاتی درونیاب یا کمترین مربعاتی یک مساله با داده های (x_k , f_k) $k \in <0 , N-1>$ ، می توانیم β_j ها را برای $j \in <0 , N-1>$ محاسبه کنیم و در صورت نیاز به کمک آنها ، ضرایب را برای $\psi(x)$ به دست آوریم.

یاد آور می شویم که چند جمله ای فاز درونیاب به صورت

$$P(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \beta_j e^{i j x}$$

که در آن

$$\beta_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i j x_k} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi j k i}{N}} \quad , \quad j = 0, 1, \cdots, N-1$$

برای محاسبه $P(x)$ به تعیین β_j نیاز داریم که برای تعیین همه آنها نیاز به حدود N^2 عمل نیاز داریم، یاد آور می شویم که هر عمل از یک جمع و یک ضرب تشکیل شده .

کاربرد چند جمله ای های درونیاب فوریه موکول به محاسبه β_j ها است. معمولا هر چه تعداد بیشتری نقطه اتکا در نظر گرفته شود، یعنی درجه بالاتری برای چند جمله ای فاز به دست می آید و دقت نتایج بسیار بیشتر می شود. همچنین محاسبه این ضرایب در تبدیل فوریه گسسته توابع نیز مورد استفاده فراوان دارد. بنابراین وقتی N بسیار بزرگ باشد، تعداد اعمال کامپیوتری لازم برای ارزیابی چند جمله ای فاز درونیاب بسیار زیاد می شود و می تواند از حد طاقت محاسبات معمول فراتر رود.

برای پرهیز از چنین محاسبات طولانی و در نظر گرفتن چند جمله ای های فاز با درجه بالاتر به سهولت بیشتر از روش هایی برای محاسبه ضرایب استفاده می کنیم که در حالت خاصی که N به صورت $N = 2^n$ باشد، یا مواردی که $N = N_1 N_2 \dots N_m$ محاسبه ضرایب با سرعت بیشتر و تعداد اعمال کامپیوتری کمتر صورت می گیرد. اولین این روش ها در سال ۱۹۶۵ به وسیله کولی و توکی ارائه شده است. امروزه مجموعه وسیعی از این روش ها را در اختیار داریم.

در این روش ها می توان به جای N^2 ضرب لازم برای محاسبه β_j ها از حدود $N \log N$ ضرب برای محاسبه استفاده کرد. این روش ها براساس مرتب نمودن ویژه ای از ضرب ها در عبارات β_j حاصل

می شود. در اینجا دو روش موسوم به کولی– تاکی و ساند- تاکی را که برای $N = 2^n$ داده می شود، ارائه می کنیم.

12–2 روش كولي ـ تاكي

اساس این روش بر در نظر گرفتن دو چند جمله ای فاز درونیاب در هر مرحله است و روش از تعدادی مرحله، معمولا n مرحله تشکیل می شود .هدف این است که تعداد ضرب ها را تا حدود امکان کاهش دهیم و آنها را به جمع تبدیل سازیم. در شروع از دو چند جمله ای فاز درونیاب $r(x)$ و $q(x)$ استفاده می کنیم که هر یک برای منظور خاصی در نظر گرفته می شود. به طور دقیق تر، قرار می دهیم $N = 2^n$ ، n عدد طبیعی داده شده ای است و فرض می کنیم که

$$x_k = \frac{2\pi k}{N} \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1$$

و نقاط اتکا (x_k, f_k) ، $k \in <0, N-1>$

می خواهیم q و r به گونه ای باشند که

$$q(x_{2h}) = f_{2h} \quad , \quad r(x_{2h}) = f_{2h+1}$$

$$h = 0, 1, \cdots, M-1$$

$$N = 2M \quad , \quad N-1 = 2M-1$$

تابع $\hat{r}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم که

$$\hat{r}(x) = r\left(x - \frac{2\pi}{N}\right) = r\left(x - \frac{\pi}{M}\right)$$

لذا داریم

$$\hat{r}(x_{2h+1}) = r\left(x_{2h+1} - \frac{\pi}{M}\right) = r(x_{2h}) = f_{2h+1}$$

یعنی $\hat{r}$ تابع درونیاب نقاط اتکای با اندیس فرد است و q تابع درونیاب نقاط اتکای با اندیس زوج می باشد.

حال می توان نوشت

$$P(x) = q(x)\ \left(\frac{1+e^{Mix}}{2}\right) + r\left(x-\frac{\pi}{M}\right)\ \left(\frac{1-e^{Mix}}{2}\right)$$

که در آن

$$e^{iMx_k} = e^{i\frac{2\pi kM}{N}} = e^{ik\pi} = \begin{cases} 1 & k \text{ زوج} \\ -1 & k \text{ فرد} \end{cases}$$

طرح فوق برای ایجاد $P(x)$ به کمک $q(x)$ و $\hat{r}(x)$ ، اساس یک طرح بازگشتی شروع شده می شود که برای $m \le n$، هر بار به کمک $P^{(m-1)}$ ، $P^{(m)}$ به دست می آید. برای داشتن رابطه این چند جمله ای ها به فرض های زیر نیاز داریم:

$$M = 2^{m-1} \quad , \quad R = 2^{n-m} \quad , \quad m \le n$$

تابع $P_r^{(m)}(x)$ را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$P_r^{(m)}(x) = \beta_{r,0}^{(m)} + \beta_{r,1}^{(m)} e^{ix} + \cdots + \beta_{r,2M-1}^{(m)} e^{(2M-1)ix}$$

$$r = 0, 1, \cdots, R-1$$

$P_r^{(m)}$ از $2R$ چند جمله ای فاز $P_r^{(m-1)}(x)$ برای $r = 0, 1, \cdots, 2R-1$ با رابطه بازگشتی زیر به دست می آید:

$$2P_r^{(m)}(x) = P_r^{(m-1)}(x)(1+e^{iMx}) + P_{R+r}^{(m-1)}(x - \frac{\pi}{M})(1-e^{iMx})$$

با استفاده از برابری اخیر، روابط زیر را بین β ها می یابیم:

$$2\beta_{r\,j}^{(m)} = \beta_{r\,j}^{(m-1)} + \beta_{R+r,\,j}^{(m-1)} \varepsilon_m^j \qquad r = 0, 1, \cdots, R-1$$

$$2\beta_{r,\,M+j}^{(m)} = \beta_{r\,j}^{(m-1)} + \beta_{R+r,\,j}^{(m-1)} \varepsilon_m^j \qquad j = 0, 1, \cdots, M-1$$

شروع استدلال $m = n$

$$P(x) = P_0^{(n)}(x)$$

پس قرار می دهیم

$$m = n-1 \quad , \quad M = 2^{m-1} \quad , \quad R = 2^{n-m}$$

$$q(x) = P_0^{(n-1)}(x) \quad , \quad r\left(x - \frac{\pi}{M}\right) = P_1^{(n-1)}(x)$$

به طوری که

$$\begin{cases} P_0^{n-1}(x) = \beta_{00}^{(n-1)} + \beta_{01}^{(n-1)} e^{ix} + \cdots + \beta_{0,2M-1}^{(n-1)} e^{(2M-1)ix} \\ P_1^{n-1}(x) = \beta_{10}^{(n-1)} + \beta_{11}^{(n-1)} e^{ix} + \cdots + \beta_{1,2M-1}^{(n-1)} e^{(2M-1)ix} \end{cases}$$

حال حالت کلی را در نظر می گیریم و قبول می کنیم که

$$2\,P_r^{(m)}(x) = P_r^{(m-1)}(x)\left(1+e^{iMx}\right) + P_{R+r}^{(m-1)}\left(x-\frac{\pi}{M}\right)\left(1-e^{iMx}\right)$$

$$r = 0, 1, \cdots, 2R-1$$

$$M' = \frac{M}{2}$$

که از آن با توجه به قرارداد های انجام شده نتیجه می شود:

$$2P_r^{(m)}(x) = 2\left(\beta_{r0}^{(m)} + \beta_{r1}^{(m)} e^{ix} + \cdots + \beta_{r,2M-1}^{(m)} e^{(2M-1)ix}\right)$$

$$= \left(\beta_{r0}^{(m-1)} + \beta_{r1}^{(m-1)} e^{ix} + \cdots + \beta_{r,2M'-1}^{(m-1)} e^{(2M'-1)ix}\right)\left(1 + e^{iMx}\right)$$

$$+ \left(\beta_{R+r,0}^{(m-1)} + \beta_{R+r,1}^{(m-1)} e^{i\left(x-\frac{\pi}{M}\right)} + \cdots + \beta_{R+r,2M'-1}^{(m-1)} e^{(2M'-1)i\left(x-\frac{\pi}{M}\right)}\right)\left(1 - e^{iMx}\right)$$

$$= \left(\beta_{r0}^{(m-1)} + \beta_{R+r,0}^{(m-1)}\right) + \left(\beta_{r1}^{(m-1)} + \beta_{R+r,1}^{(m-1)} e^{-\frac{\pi}{M}i}\right) e^{ix} + \cdots$$

$$+ \left(\beta_{r,M-1}^{(m-1)} + \beta_{R+r,M-1}^{(m-1)} e^{-\frac{\pi}{M}(M-1)i}\right) e^{(M-1)ix} + e^{(M-1)ix}$$

$$+ \left(\beta_{r0}^{(m-1)} - \beta_{R+r,0}^{(m-1)}\right) e^{iMx} + \left(\beta_{r1}^{(m-1)} - \beta_{R+r,1}^{(m-1)} e^{-\frac{\pi}{M}i}\right) e^{i(M+1)x} + \cdots$$

$$+ \left(\beta_{r,M-1}^{(m-1)} - \beta_{R+r,M-1}^{(m-1)} e^{-\frac{\pi}{M}(M-1)i}\right) e^{(2M-1)ix}$$

با متحد قرار دادن دو سوی تساوی فوق می یابیم :

$$\begin{cases} 2\,\beta_{r\,j}^{\,(m)} = \beta_{r\,j}^{\,(m-1)} + \beta_{R+r\,,\,j}^{\,(m-1)}\;\varepsilon_{m}^{\,j} \\ 2\,\beta_{r\,,\,M+j}^{\,(m)} = \beta_{r\,j}^{\,(m-1)} - \beta_{R+r\,,\,j}^{\,(m-1)}\;\varepsilon_{m}^{\,j} \end{cases}$$

$$\varepsilon_{m}^{\,j} = e^{-\frac{i\,j\,\pi}{M}}$$

$$r = 0\,,1\,,\cdots,R-1 \quad , \quad R = 2^{\,n-m}$$

$$j = 0\,,1\,,\cdots,M-1 \quad , \quad M = 2^{\,m-1}$$

در عمل محاسبه را با $m=1$ آغاز می کنیم، در حالی که فرض می کنیم :

$$\beta_{k\,0}^{\,(0)} = f_{k} \quad , \quad k = 0\,,1\,,\cdots,N-1$$

و محاسبه را با $m = n$ خاتمه می دهیم در حالی که β_j را به صورت زیر می یابیم:

$$\beta_j = \beta_{o\,j}^{(n)} \qquad j = 0, 1, \cdots, N-1$$

مثال 1–12–2

برای نقاط اتکاء (x_k, f_k) ، $k = 0, 1, \cdots, 2^3 - 1$ روش تبدیل فوریه سریع را برای محاسبه β_j ها به کار برید:

$$n = 3 \quad , \quad N = 2^3$$

$$m = 1 \quad , \quad M = 2^{m-1} = 2^0 = 1 \quad , \quad R = 2^{3-1} = 2^2 = 4$$

$$\begin{cases} 2\,\beta_{r\,j}^{(1)} = \beta_{r\,j}^{(0)} + \beta_{R+r,\,j}^{(0)}\ \varepsilon_m^j \\ 2\,\beta_{r,\,M+j}^{(1)} = \beta_{r\,j}^{(0)} - \beta_{R+r,\,j}^{(0)}\ \varepsilon_m^j \end{cases} \qquad \begin{matrix} r = 0, 1, 2, 3 \\ j = 0 \end{matrix}$$

و

$$2\beta_{00}^{(1)} = \beta_{00}^{(0)} + \beta_{4,0}^{(0)}\,\varepsilon_1^0 = f_0 + f_4 \quad \Rightarrow \quad \beta_{00}^{(1)} = \frac{1}{2}(f_0 + f_4)$$

$$2\beta_{01}^{(1)} = \beta_{00}^{(0)} - \beta_{4,0}^{(0)}\,\varepsilon_1^0 = f_0 - f_4 \quad \Rightarrow \quad \beta_{01}^{(1)} = \frac{1}{2}(f_0 - f_4)$$

$$2\beta_{10}^{(1)} = f_1 + f_5 \quad \Rightarrow \quad \beta_{10}^{(1)} = \frac{1}{2}(f_1 + f_5)$$

$$2\beta_{11}^{(1)} = f_1 - f_5 \quad \Rightarrow \quad \beta_{11}^{(1)} = \frac{1}{2}(f_1 - f_5)$$

$$2\beta_{20}^{(1)} = f_2 + f_6 \quad \Rightarrow \quad \beta_{20}^{(1)} = \frac{1}{2}(f_2 + f_6)$$

$$2\beta_{21}^{(1)} = f_2 - f_6 \quad \Rightarrow \quad \beta_{21}^{(1)} = \frac{1}{2}(f_2 - f_6)$$

$$2\beta_{30}^{(1)} = f_3 + f_7 \quad \Rightarrow \quad \beta_{30}^{(1)} = \frac{1}{2}(f_3 + f_7)$$

$$2\beta_{31}^{(1)} = f_3 - f_7 \quad \Rightarrow \quad \beta_{31}^{(1)} = \frac{1}{2}(f_3 - f_7)$$

$$m = 2 \quad , \quad M = 2^{m-1} = 2^{1} = 1 \quad , \quad R = 2^{n-m} = 2$$

$$\begin{cases} 2\,\beta_{r\,j}^{(2)} = \beta_{r\,j}^{(1)} + \beta_{R+r,\,j}^{(1)}\;\varepsilon_2^{\,j} & j = 0, 1 \\ 2\,\beta_{r,\,M+j}^{(2)} = \beta_{r\,j}^{(1)} - \beta_{R+r,\,j}^{(1)}\;\varepsilon_2^{\,j} & r = 0, 1 \end{cases}$$

$$\beta_{00}^{(2)} = \frac{1}{4}\,(f_0 + f_4 + f_2 + f_6)$$

$$\beta_{01}^{(2)} = \frac{1}{4}\,(f_0 - f_4 - i\,f_2 + i\,f_6)$$

$$\beta_{02}^{(2)} = \frac{1}{4}\,(f_0 + f_4 - f_2 - f_6)$$

$$\beta_{03}^{(2)} = \frac{1}{4}\,(f_0 - f_4 + i\,f_2 - i\,f_6)$$

$$\beta_{10}^{(2)} = \frac{1}{4}\,(f_1 + f_5 + f_3 + f_7)$$

$$\beta_{12}^{(2)} = \frac{1}{4}\,(f_1 + f_5 - f_3 - f_7)$$

$$\beta_{11}^{(2)} = \frac{1}{4}\,(f_1 - f_5 - i\,f_3 + i\,f_7)$$

$$\beta_{13}^{(2)} = \frac{1}{4}\,(f_1 - f_5 + i\,f_3 - i\,f_7)$$

$$m = 3 \quad , \quad M = 2^{3-1} = 4 \quad , \quad R = 2^{3-3} = 2^{0} = 1$$

$$\begin{cases} 2\,\beta_{r\,j}^{(3)} = \beta_{r\,j}^{(2)} + \beta_{R+r,\,j}^{(2)}\;\varepsilon_3^{\,j} \\ 2\,\beta_{r,\,M+j}^{(3)} = \beta_{r\,j}^{(2)} - \beta_{R+r,\,j}^{(2)}\;\varepsilon_3^{\,j} \end{cases}$$

$$\beta_0 = \beta_{0\,0}^{(3)} = \frac{1}{8}\,(f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + f_7)$$

$$\beta_4 = \beta_{0\,4}^{(3)} = \frac{1}{8}\,(f_0 + f_4 + f_2 + f_6 - f_1 - f_5 - f_3 - f_7)$$

$$\beta_1 = \beta_{0\,1}^{(3)} = \frac{1}{8}\,[f_0 - f_4 - i\,f_2 + i\,f_6 + (\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i)(f_1 - f_5 - i\,f_3 + i\,f_7)]$$

$$\beta_5 = \beta_{0\,5}^{(3)} = \frac{1}{8}\,[f_0 - f_4 - i\,f_2 + i\,f_6 + (\frac{\sqrt{2}}{2}\,i - \frac{\sqrt{2}}{2})(f_1 - f_5 - i\,f_3 + i\,f_7)]$$

$$\beta_2 = \beta_{02}^{(3)} = \frac{1}{8}\left[f_0 + f_4 - f_2 - f_6 - i\left(f_1 + f_5 - f_3 - f_7 \right) \right]$$

$$\beta_6 = \beta_{06}^{(3)} = \frac{1}{8}\left[f_0 + f_4 - f_2 - f_6 + i\left(f_1 + f_5 - f_3 - f_7 \right) \right]$$

$$\beta_3 = \beta_{03}^{(3)} = \frac{1}{8}\left[f_0 - f_4 + i\left(f_2 - f_6 \right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right)\left(f_1 - f_5 + i\left(f_3 - f_7 \right) \right) \right]$$

$$\beta_7 = \beta_{07}^{(3)} = \frac{1}{8}\left[f_0 - f_4 + i\left(f_2 - f_6 \right) + \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\left(f_1 - f_5 + i\left(f_3 - f_7 \right) \right) \right]$$

2- 13 روش F.F.T ساند _ توکي

در روش ساند _توکی نیز تقریبا مانند روش کولی_تاکی عمل می کنیم، با این تفاوت که در اینجا β_j ها را هر بار در دو گروه مثلا j های زوج و j های فرد ارزیابی می کنیم و محاسبات را به گونه ای سازماندهی می کنیم تا در نهایت عبارت ساده ای نسبت به حالت اولیه برای β_j ها به دست آوریم.

برای درک روش مجددا یادآور می شویم که $\varepsilon_m = e^{-\frac{2\pi i}{2^m}}$ و در نتیجه

$$\varepsilon_m^j = e^{\frac{2j\pi}{2^m} i} \qquad j, m \in N^*$$

در حالت کلی داریم :

$$\beta_j = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_k \, \varepsilon_n^{jk} \qquad j = 0, 1, \cdots, N-1$$

با توجه به عبارت فوق برای $h \in N^{*}$ و $N = 2^{m}$ داریم :

$$\beta_{2h} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \, \varepsilon_n^{2hk}$$

$$= \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{M-1} f_k \, \varepsilon_n^{2hk} + \sum_{k=0}^{M-1} f_{k+M} \, \varepsilon_n^{2hk} \, \varepsilon_n^{2kM} \right]$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{M-1} \left(f_k + f_{k+M} \right) \varepsilon_{n-1}^{hk}$$

به طریق مشابه برای $j = 2h + 1$ داریم:

$$\beta_{2h+1} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \, \varepsilon_n^{(2h+1)k}$$

$$= \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{M-1} f_k \, \varepsilon_n^{2hk} \, \varepsilon_n^{k} + \sum_{k=0}^{M-1} f_{k+M} \, \varepsilon_n^{2hk} \, \varepsilon_n^{M} \, \varepsilon_n^{k} \right]$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{M-1} \left[\left(f_k - f_{k+M} \right) \varepsilon_n^{k} \right] \varepsilon_{n-1}^{hk}$$

قرار می دهیم :

$$f'_k = f_k + f_{k+M}$$

$$f''_k = \left(f_k - f_{k+M} \right) \varepsilon_n^{k} \quad , \quad k = 0, 1, \cdots, M-1$$

با الهام از آنچه گذشت، روشی به دست می آید که با شروع از $m = n, n-1, \ldots, 1, 0$

و با فرض $M = 2^{m-1}$ و $R = 2^{n-m}$ به کمک پارامترهای

$$f_{r\,k}^{(m)} \qquad \begin{aligned} r &= 0, 1, \cdots, R-1 \\ k &= 0, 1, \cdots, 2M-1 \end{aligned}$$

با شروع از $f_{0\,k}^{(n)} = f_k$ ، $k = 0, 1, \cdots, N-1$ نخست $f_{0\,k}^{(n-1)} = f'_k$ و $f_{1\,k}^{(n-1)} = f''_k$

را می یابیم و به کمک رابطه

$$\beta_{j\,R+r} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{2M-1} f_{r\,k}^{(m)}\, \varepsilon_m^{j\,k} \qquad \begin{aligned} r &= 0, 1, \cdots, R-1 \\ j &= 0, 1, \cdots, 2M-1 \end{aligned}$$

را به دست می آوریم که بر حسب $f_{r\,k}^{(m)}$ به صورت زیر می باشد.

$$\begin{cases} f_{r\,k}^{(m-1)} = f_{r\,k}^{(m)} + f_{r,\,k+M}^{(m)} \\ f_{r+R,\,k}^{(m-1)} = \left(f_{r\,k}^{(m)} - f_{r,\,k+M}^{(m)} \right) \varepsilon_{m}^{k} \end{cases}$$

$$m = n, \ldots, 2, 1$$

$$r = 0, \ldots, R-1$$

$$k = 0, \ldots, M-1$$

$$N = 2^{n}$$

$$M = 2^{m-1}$$

$$R = 2^{n-m}$$

اثبات

برای $R' = 2\,R = 2^{\,n-m+1}$ و $M' = \dfrac{M}{2} = 2^{\,m-2}$ برای $j = 2\,h$ و

به ترتیب با ترکیب جملات متقابل داریم: $j = 2\,h+1$

$$\beta_{h\;\;R'+r} = \beta_{2h\;\;R+r} = \beta_{j\;\;R+r}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{M-1} \left(f_{r\,k}^{(m)} + f_{r,\,k+M}^{(m)} \right) \varepsilon_{m}^{j\,k}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{2M'-1} f_{r\,k}^{(m-1)}\; \varepsilon_{m-1}^{h\,k} \qquad , \quad k = 0, 1, \cdots, M-1$$

و به همین ترتیب برای $j = 2\,h+1$ داریم:

$$\beta_{h\ R'+r+R} = \beta_{j\ R+r}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{M-1} \left(f_{r\,k}^{(m)} + f_{r,\,k+M}^{(m)}\ \varepsilon_m^{j\,M} \right) \varepsilon_m^{j\,k}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{M-1} \left(f_{r\,k}^{(m)} + f_{r,\,k+M}^{(m)}\ \varepsilon_m^{2\,R\,M}\ \varepsilon_m^{M} \right) \varepsilon_m^{j\,k}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{M-1} \left(f_{r\,k}^{(m)} - f_{r,\,k+M}^{(m)} \right) \varepsilon_m^{2\,h\,k}\ \varepsilon_m^{k}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{M-1} \left(f_{r\,k}^{(m)} - f_{r,\,k+M}^{(m)} \right) \varepsilon_m^{k}\ \varepsilon_{m-1}^{M}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{2M'-1} f_{r+R,\,k}^{(m-1)}\ \varepsilon_{m-1}^{h\,k}$$

توجه می کنیم که با شروع محاسبات از $f_{0k}^{(n)} = f_k$ و طی مراحل $m = n, n-1, \ldots, 1, 0$

به عبارت

$$\beta_r = \frac{1}{N} f_{r0}^{(0)} \qquad r = 0, 1, \cdots, N-1$$

دست می یابیم.

2–13–1 تمرین : مثال اخیر را به کمک روش ساند_توکی حل کنید.

14–2 يك روش محاسبه سريع تر ضرائب براي $N=2^n$

در صورتی که $N=2^n$ باشد و نقاط اتکاء (x_k , f_k) داده شده باشند که $x_k = \frac{2\pi k}{N}$ ، $k = 0,1,\cdots,N-1$ و f_k ها حقیقی باشند، می توان محاسبه ضرائب β_j را به کمک یک تابع مختلط g به صورت ساده تر با نصف محاسبات به دست آورد. به طور دقیق تر فرض می کنیم.

$$g_h = f_{2h} + i\, f_{2h+1} \qquad h = 0,1,\cdots,M-1$$

و اگر قرار دهیم :

$$\gamma_j = \frac{1}{M}\sum_{h=0}^{M-1} g_h\, e^{\frac{-2\pi i\, j\, h}{M}} \qquad j = 0,1,\cdots,M-1$$

مقادیر β_j به صورت زیر به دست می آید:

$$\beta_j = \frac{1}{4}\left(\gamma_j + \bar{\gamma}_{M-j}\right) + \frac{1}{4i}\left(\gamma_j - \bar{\gamma}_{M-j}\right) e^{-\frac{2\pi i j}{N}}$$

$$\beta_{N-j} = \bar{\beta}_j \qquad\qquad j = 0, 1, \cdots, M-1$$

اثبات

نخست قبل از اثبات توجه می کنیم که

$$\frac{1}{4}\left(\gamma_j + \bar{\gamma}_{M-j}\right)$$

$$= \frac{1}{4M}\sum_{h=0}^{M-1} g_h\, e^{\frac{-2\pi i j h}{M}} + \frac{1}{4M}\sum_{h=0}^{M-1} \bar{g}_h\, e^{-2\pi i (M-j)\frac{h}{M}}$$

$$= \frac{1}{4M} \sum_{h=0}^{M-1} (f_{2h} + i\, f_{2h+1})\, e^{-2\pi i\, j \frac{h}{M}}$$

$$+ \frac{1}{4M} \sum_{h=0}^{M-1} (f_{2h} - i\, f_{2h+1})\, e^{-2\pi i\, j \frac{h}{M}}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{h=0}^{M-1} f_{2h}\; e^{-2\pi i\, j \frac{2h}{2M}}$$

به طریق مشابه

$$\frac{1}{4i} (\gamma_j - \bar{\gamma}_{M-j})$$

$$= \frac{1}{4Mi} \sum_{h=0}^{M-1} g_h\, e^{\frac{-2\pi i h j}{M}} - \frac{1}{4Mi} \sum_{h=0}^{M-1} \bar{g}_h\, e^{-2\pi i\, j \frac{h}{M} + 2\pi i h \frac{M}{M}}$$

$$= \frac{1}{4\,M\,i} \sum_{h=0}^{M-1} (f_{2h} + i\, f_{2h+1})\, e^{-2\pi i \frac{h}{M} j}$$

$$+ \frac{1}{4\,M\,i} \sum_{h=0}^{M-1} (i\, f_{2h+1} - f_{2h})\, e^{-2\pi i\, j \frac{h}{M}}$$

$$= \frac{1}{2\,M} \sum_{h=0}^{M-1} f_{2h}\; e^{-2\pi i\, j \frac{2h}{2M}}$$

حال توجه می کنیم که

$$\beta_j = \frac{1}{4}\left(\gamma_j + \bar{\gamma}_{M-j}\right) + \frac{1}{4i}\left(\gamma_j + \bar{\gamma}_{M-j}\right) e^{\frac{-2\pi i j}{N}}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{h=0}^{M-1} f_{2h}\, e^{\frac{-2\pi i j h}{M}} - \frac{1}{N}\sum_{h=0}^{M-1} f_{2h+1}\, e^{-2\pi i j \frac{(2h+1)}{N}}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{h=0}^{M-1} \left[f_{2h}\, e^{\frac{-4\pi i j\ h}{N}} + f_{2h+1}\, e^{-2\pi i j \frac{(2h+1)}{N}} \right]$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{h=0}^{N-1} \left[f_h\, e^{\frac{-2\pi i j h}{N}} \right]$$

در مورد رابطه دوم یعنی $\beta_{N-j} = \bar{\beta}_j$ ، توجه می کنیم :

$$\beta_j = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k\, e^{\frac{-2\pi i j k}{N}} \qquad j = 0, 1, \cdots, M-1$$

$$\bar{\beta}_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \, e^{\frac{2\pi i j k}{N}}$$

اما

$$\beta_{N-j} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \, e^{\frac{-2\pi (N-j) k}{N} i}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \, e^{\frac{2\pi j k}{N} i} = \bar{\beta}_j$$

با محاسبه ای مختصر نتیجه می شود :

$$A_j = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cos \frac{2\pi j k}{N}$$

$$B_j = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \sin \frac{2\pi j k}{N}$$

15–2 درونيابي اسپلاين

توابع اسپلاين در درونيابی منحنی ها و حل عددی معادلات ديفرانسيل در روش هايی مانند ريلی–ريتس–گالرکين کاربرد دارد.

مباني نظري : فرض می کنيم که $\Delta = \{ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \}$ يک افراز از فاصله $[a , b]$ باشد.

1–15–2 تعريف

يک تابع اسپلاين درجه سوم S_Δ روی Δ يک تابع حقيقی از $[a , b]$ از R است به طوريکه :

الف) $S_\Delta \in C^2 [a , b]$ ، يعنی S_Δ دو بار به طور پيوسته ديفرانسيل پذير روی $[a , b]$ است.

ب) S_Δ بر هر زير فاصله $[x_i , x_{i+1}]$ برای $i = 0 , 1 , \cdots , n-1$ يک چند جمله ای از درجه ۳ است. بنابراين اسپلاين يک تابع به طور پاره ای چند جمله ای درجه سوم می باشد.

با توجه به تعریف آشکار می شود که مشتق اول و دوم تابع S_Δ در همه نقاط گره x_i وجود دارند.

اگر فرض کنیم $Y=\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ که از $n+1$ عدد حقیقی y_i تشکیل شده است.

تابع $S_\Delta(Y,0)$ یک تابع درونیاب اسپلاین S_Δ با خاصیت $S_\Delta(Y,x_i)=y_i$ چنین تابع درونیاب اسپلاین $S_\Delta(Y,0)$ برای یک مجموعه Y تعیین می شود.

البته تحت شرایطی که برای آن ارائه می کنیم جواب فوق یکتاست .

الف) با شرط $0=S''_\Delta(Y,b)=S''_\Delta(Y,a)$

ب) $S^{(k)}_\Delta(Y,a)=S^{(k)}_\Delta(Y,b)$ برای $k=0,1,2$ (حالت $S_\Delta(Y,0)$ دوره ای)

ج) با شرایط $S'_\Delta(Y,a)=y'_0$ و $S'_\Delta(Y,b)=y'_n$ برای y'_n و y'_0 داده شده:

در حالت (ب) یک پیش شرط برای تابع یا داده ها لازم است و آن عبارتست از $y_0 = y_n$

برای تعریف و یافتن تابع اسپلاین مناسب برای درونیابی به قرار دادهای زیر نیاز داریم:

مجموعه $K^m([a,b])$ را مجموعه همه توابعی در نظر می گیریم که به صورت $f:[a,b]\to R$

تعریف می شوند و برای آنها $f^{(m-1)}$ به طور مطلق پیوسته است.

2–15–2 تعریف

تابع f به طوری که $f:[a,b]\to R$ را به طور مطلق پیوسته خوانیم هرگاه :

برای هر $\varepsilon>0$ یک $\delta>0$ بتوان یافت به طوری که ، برای هر مجموعه متناهی فواصل $[a_i,b_i]$ به طوری که

$$a\le a_1<b_1<a_2<b_2<\cdots<a_n<b_n\le b$$

و $\sum_{i=0}^{n}\left|b_i-a_i\right|<\delta$ داشته باشیم :

$$\sum_{i=0}^{n}\left|f(b_i)-f(a_i)\right|<\varepsilon$$

3–15–2 تعریف

$L^2[a,b]$ مجموعه توابعی است که مجذور دوم آنها روی فاصله $[a,b]$ انتگرال پذیر می باشند. یعنی اگر $f \in L^2[a,b]$ ، آنگاه

$$\int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

وجود داشته باشد.

منظور از مجموعه $K_p^m[a,b]$ توابع دوره ای با دوره تناوب $b-a$ اند که مشتق $m-1$ ام آنها روی فاصله $[a,b]$ به طور مطلق پیوسته باشد. و باید داشته باشیم :

$$f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) \qquad k = 0,1,\cdots,m-1$$

فرض می کنیم که

$$S_\Delta \in K^3[a,b]$$

برای $f \in K^3[a,b]$ تعریف می کنیم:

$$\| f \|^2 = \int_a^b | f''(x) |^2 \, dx$$

نرم فوق یک نرم متعارف نیست و آن را نیم نرم یا شبه نرم نامند، زیرا ممکن است $f \neq 0$ باشد در حالی که $\| f \| = 0$.

4–15–2 قضیه

اگر $f \in K^2[a,b]$ ، $\Delta = \{ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \}$ یک افراز $[a,b]$ ، و اگر S_Δ تابع اسپلاین با نقاط گره $x_i \in \Delta$ باشد. دراینصورت

$$\| f - S_\Delta \|^2 = \| f \|^2 - \| S_\Delta \|^2 - 2 \left\{ \left[[f'(x) - S'_\Delta(x)] \, S''_\Delta(x) \right]_a^b - \sum_{i=0}^{n} \left[(f(x) - S_\Delta(x)) \, S'''_\Delta(x) \right]_{x_{i-1}^+}^{x_i^-} \right\}$$

اثبات

بنا به تعریف $\|\cdot\|$ ، می توان نوشت :

$$\| S_\Delta - f \|^2 = \int_a^b | f''(x) - S''_\Delta(x) |^2 \, dx$$

$$= \int_a^b | f''(x) |^2 \, dx + \int_a^b | S''_\Delta(x) |^2 \, dx - 2\int_a^b f''(x) S''_\Delta(x) \, dx$$

$$= \int_a^b | f''(x) |^2 dx - \int_a^b | S''_\Delta(x) |^2 dx$$

$$- 2\int_a^b (f''(x) - S''_\Delta(x)) S''_\Delta(x) \, dx$$

$$= \| f \|^2 - \| S_\Delta \|^2 - 2\int_a^b (f''(x) - S''_\Delta(x)) S''_\Delta(x) \, dx$$

با کاربرد انتگرال گیری جز به جز داریم :

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f''(x) - S''_{\Delta}(x) \right) S''_{\Delta}(x)\, dx$$

$$= \left[\left(f'(x) - S'_{\Delta}(x) \right) S''_{\Delta}(x) \right]_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f'(x) - S'_{\Delta}(x) \right) S'''_{\Delta}(x)\, dx$$

با جز به جز دوباره نتیجه می شود :

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f''(x) - S''_{\Delta}(x) \right) S''_{\Delta}(x)\, dx$$

$$= \left[\left(f'(x) - S'_{\Delta}(x) \right) S''_{\Delta}(x) \right]_{x_{i-1}}^{x_i} - \left[\left(f(x) - S_{\Delta}(x) \right) S'''_{\Delta}(x) \right]_{x_{i-1}^{+}}^{x_i^{-}}$$

$$+ \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f(x) - S_{\Delta}(x) \right) S_{\Delta}^{(4)}(x)\, dx$$

لذا داریم:

$$\int_b^a \left(f''(x) - S''_\Delta(x) \right) S''_\Delta(x)\, dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f''(x) - S''_\Delta(x) \right) S''_\Delta(x)\, dx$$

$$= \left[\left(f'(x) - S'_\Delta(x) \right) S''_\Delta(x) \right]_a^b - \sum_{i=1}^{n} \left[\left(f(x) - S_\Delta(x) \right) S'''_\Delta(x) \right]_{x_{i-1}^+}^{x_i^-}$$

$$\| S_\Delta - f \|^2 = \| f \|^2 - \| S_\Delta \|^2$$
$$- 2 \left\{ \left[\left(f'(x) - S'_\Delta(x) \right) S''_\Delta(x) \right]_a^b \right.$$
$$\left. - \sum_{i=1}^{n} \left[\left(f(x) - S_\Delta(x) \right) S'''_\Delta(x) \right]_{x_{i-1}^+}^{x_i^-} \right\}$$

2–15–5 قضیه

با داشتن یک افراز $\Delta=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$ از فاصله $[a,b]$ و مجموعه $Y=\{y_0,y_1,\ldots,y_n\}$ و یک تابع $f\in \mathrm{K}^2[a,b]$ با شرط $f(x_i)=y_i$ ، $i=0,1,\ldots$ دراینصورت

$$\|f\|^2\geq\|S_\Delta(Y,0)\|^2$$

یعنی

$$\|f-S_\Delta(Y,0)\|^2=\|f\|^2-\|S_\Delta(Y,0)\|^2\geq 0$$

برای هر تابع اسپلاین $S_\Delta(Y,0)$ برقرار است، هرگاه یکی از شرایط زیر برقرار باشند ،

الف) $0=S''_\Delta(Y,b)=S''_\Delta(Y,a)$

ب) $f\in \mathrm{K}_p^2(a,b)$ و $S_\Delta(Y,0)$ دوره ای .

ج) $f'(a) = S'_{\Delta}(Y,a)$ و $f'(b) = S'_{\Delta}(Y,b)$

به علاوه دراینصورت $S_{\Delta}(Y,a)$ به طور یکتا تعیین می شود.

اثبات

با توجه به تعریف تابع اسپلاین درونیاب $S_{\Delta}(Y,0)$ آشکارا در هر یک از حالات سه گانه (الف) و (ب) و (ج) داریم:

$$\| S_{\Delta} - f \|^2 = \| f \|^2 - \| S_{\Delta} \|^2$$

لذا

$$\| f \|^2 - \| S_{\Delta} \|^2 \geq 0$$

یا

$$\| f \|^2 \geq \| S_{\Delta} \|^2 \qquad (۱۲)$$

خاصیت فوق را خاصیت مینیمم مشتق دوم S_Δ نامند.

حال اگر $\bar{S}_\Delta$ یک تابع درونیاب اسپلاین دیگر باشد، آشکارا داریم:

$$\| \bar{S}_\Delta \|^2 \geq \| S_\Delta \|^2$$

و به عکس

$$\| S_\Delta \|^2 \geq \| \bar{S}_\Delta \|^2$$

لذا

$$\| \bar{S}_\Delta \|^2 = \| S_\Delta \|^2$$

بنابراین

$$\int_a^b \left| \bar{S}''_\Delta (x) \right|^2 dx = \int_a^b \left| S''_\Delta (x) \right|^2 dx$$

یعنی

$$S''_{\Delta}(x) = \bar{S}''_{\Delta}(x)$$

لذا

$$\bar{S}_{\Delta}(x) = S_{\Delta}(x) + \alpha x + \beta$$

اما

$$\bar{S}_{\Delta}(a) = S_{\Delta}(a) + \alpha a + \beta \qquad (*)$$

$$\bar{S}_{\Delta}(b) = S_{\Delta}(b) + \alpha b + \beta \qquad (**)$$

بنابراین

$$\begin{cases} \alpha a + \beta = 0 \\ \alpha b + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

یعنی

$$S_{\Delta}(x) = \bar{S}_{\Delta}(x)$$

تابع اسپلاین حالت (الف) که با شرط های ساده تری در شرایط (۱۲) صدق می کند، هموارترین تابع اسپلاین برای درونیابی توابع f است و آن را اسپلاین طبیعی نامند.

بقیه توابع اسپلاین شرط (ب) و (ج) روی مجموعه های محدود تری شرط (۱۲) را بر می آورند.

در هر حال توابع اسپلاین با توجه به شرط (۱۲) هموار ترین توابع از نوع خود برای درونیابی تابع f اند.

یادآور می شویم که انحنای تابع f در نقطه x با رابطه

$$f''(x)\left(1+\left(f'(x)\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

داده می شود که برای $f'(x)$ به اندازه کافی نزدیک صفر، انحنا با $f''(x)$ قابل مقایسه است.

16–2 تعیین توابع اسپلاین

فرض می کنیم که $\Delta = \{ x_i \mid i = 0, 1, \ldots, n \}$ و $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

و $Y = \{ y_0, y_1, \ldots, y_n \}$ داده شده باشد. قرار می دهیم:

$$h_{j+1} = x_{j+1} - x_j$$

و

$$M_i = S''_\Delta (Y, x_i) \qquad i \in < 0, n >$$

M_i ها را گشتاور های $S_\Delta (Y_i)$ در x_i ها نامند. (moments)

توجه داریم که هر تابع اسپلاین مکعبی (درجه سوم) $S_\Delta (Y_i)$ در هر فاصله $[x_i, x_{i+1}]$ تابع چندجمله ای درجه سوم است بنابراین $S''_\Delta (Y_i)$ در این فاصله یک تابع چند جمله ای درجه اول است.

می توان آن را با داشتن مقادیر گشتاور M_i و M_{i+1} به صورت زیر نوشت:

$$S''_{\Delta}(Y,x) = M_i \frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}} + M_{i+1} \frac{x - x_i}{h_{i+1}}$$

با انتگرال گیری از طرفین رابطه اخیر نتیجه می شود که

$$S'_{\Delta}(Y,x) = -M_i \frac{(x_{i+1} - x)^2}{2h_{i+1}} + M_{i+1} \frac{(x - x_i)^2}{2h_{i+1}} + A_i$$

و با انتگرال مجدد داریم :

$$S_{\Delta}(Y,x) = M_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_{i+1}} + M_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h_{i+1}} + A_i(x - x_i) + B_i$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}] \qquad (۱۳)$$

$$i = 0, 1, \cdots, N-1$$

برای تعیین A_j و B_j توجه می کنیم که

$$\begin{cases} S_\Delta(Y, x_j) = y_j \\ S_\Delta(Y, x_{j+1}) = y_{j+1} \end{cases}$$

(۱٤)

با کاربرد این دو شرط داریم :

$$\begin{cases} M_j \dfrac{h_{j+1}^2}{6} + B_j = y_j \\ M_{j+1} \dfrac{h_{j+1}^2}{6} + A_j h_{j+1} + B_j = y_{j+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_j = y_j - M_j \dfrac{h_{j+1}^2}{6} \\ A_j = \dfrac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \dfrac{h_{j+1}}{6} (M_{j+1} - M_j) \end{cases}$$

از اینکه تابع اسپلاین در هر یک از فواصل $[x_j, x_{j+1}]$ یک تابع درجه سوم است می توان ضابطه آن را در این فاصله به صورت زیر نوشت :

$$S_\Delta(Y, x) = \alpha_j + \beta_j (x - x_j) + \gamma_j (x - x_j)^2 + \delta_j (x - x_j)^3$$

$$x \in [x_j, x_{j+1}]$$

که با توجه به شرایط اخیر به سهولت به دست می آوریم:

$$\alpha_j = y_j$$

$$\gamma_j = \frac{M_j}{2}$$

$$\beta_j = S'_\Delta(Y, x_j) = -\frac{M_j h_{j+1}}{2} + A_j$$

$$\delta_j = \frac{S''_\Delta(Y, x^+_j)}{6} = \frac{M_{j+1} - M_j}{6 h_{j+1}}$$

برای تعیین M_j ها، یعنی گشتاورهای تابع S_Δ در نقاط x_j ، توجه می کنیم که

$$S'_\Delta(Y, \bar{x}_j) = S'_\Delta(Y, x^+_j) \qquad (۱۵)$$

یعنی در نقطه x_j ، $j = 1, 2, \ldots, n-1$ مشتق راست و چپ S_Δ با هم برابر می باشند.

$$S'_{\Delta}(Y,x) = -M_j \frac{(x_{j+1}-x)^2}{2h_{j+1}} + M_{j+1}\frac{(x-x_j)^2}{2h_{j+1}} + \frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}} - \frac{h_{j+1}}{6}(M_{j+1}-M_j)$$

که از آن نتیجه می شود:

$$S'_{\Delta}(Y,x_j^-) = \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} + \frac{h_j}{3}M_j + \frac{h_j}{6}M_{j-1}$$

$$S'_{\Delta}(Y,x_j^+) = \frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}} - \frac{h_{j+1}}{3}M_j - \frac{h_{j+1}}{6}M_{j+1}$$

با توجه به (۱۵) داریم:

$$\frac{h_j}{6}M_{j-1} + \frac{h_j+h_{j+1}}{3}M_j + \frac{h_{j+1}}{6}M_{j+1} = \frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j-y_{j-1}}{h_j}$$

(۱۶)

معادلات فوق دستگاهی از $n+1$ مجهول $M_n, \ldots, M_1, M_0$ با $n-1$ معادله تشکیل می دهند که در صورت افزودن دو معادله مناسب به آن می توان جواب دستگاه را به صورت یکتا تعیین نمود.

در هر یک از اسپلاین های (الف) و (ب) و (ج) ، این دو معادله مناسب به صورتی به دست می آیند.

در (الف) (اسپلاین طبیعی)

$$S''_{\Delta}(Y, a) = M_0 = S''_{\Delta}(Y, b) = M_0 = 0$$

در (ج) شرایط به صورت زیر اند:

$$S'_{\Delta}(Y, a) = y'_0 \qquad , \qquad S'_{\Delta}(Y, b) = y'_n$$

در اینحالت با محاسبه مختصری می توان یافت: (اسپلاین با شرط مشتق اول)

$$\frac{h_1}{3} M_0 + \frac{h_1}{6} M_1 = \frac{y_1 - y_0}{h_1} - y'_0$$

$$\frac{h_n}{6} M_{n-1} + \frac{h_n}{3} M_n = y'_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}$$

در (ب) شرایط عبارتند از :

$$y_0 = y_n$$
$$S'_\Delta(Y, a) = S'_\Delta(Y, b)$$
$$S''_\Delta(Y, a) = S''_\Delta(Y, b) = M_n$$

اما از رابطه دوم و اول تواما با توجه به قرار داد :

$$h_{n+1} = h_1 \quad , \quad M_{n+1} = M_1 \quad , \quad y_{n+1} = y_1$$

از رابطه (١٦) با فرض $j = n$ به دست می آوریم:

$$\frac{h_n}{6} M_{n-1} + \frac{h_n + h_{n+1}}{3} M_n + \frac{h_1}{6} M_1 = \frac{y_1 - y_n}{h_1} - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}$$

در اینحالت با توجه به کم شدن یک مجهول M_0 می توان دستگاهی از n معادله و n مجهول داشت. به این ترتیب درهر یک از معادلات (۱۶) با فرض

$$\lambda_j = \frac{h_{j+1}}{h_j + h_{j+1}}$$

$$d_j = \frac{6}{h_j + h_{j+1}} \left\{ \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1}} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} \right\}$$

$$\mu_j = 1 - \lambda_j = \frac{h_j}{h_j + h_{j+1}}$$

معادلات

$$d_j = \mu_j M_{j-1} + 2 M_j + \lambda_j M_{j+1} \qquad j = 1, \ldots, n-1$$

را به دست می آوریم که در حالت (الف) می توان همین معادلات را با فرض های زیر به کار برد .

$$\lambda_0 = 0 \quad , \quad d_0 = 0 \quad , \quad \mu_n = 0 \quad , \quad d_0 = 0$$

$$\lambda_0 = 1 \quad , \quad \lambda_n = 1$$

و در حالت (ج) :

$$d_0 = -\frac{6}{h_1}\left(y'_0 - \frac{y_1 - y_0}{h_n}\right)$$

$$d_n = \frac{6}{h_n}\left(y'_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}\right)$$

اما در حالت (ب) قرار می دهیم:

$$\lambda_n = \frac{h_1}{h_n + h_1}$$

$$\mu_n = 1 - \lambda_n = \frac{h_n}{h_n + h_1}$$

$$d_n = \frac{6}{h_1 + h_n} \left\{ \frac{y_1 + y_n}{h_1} - \frac{y_n + y_{n-1}}{h_n} \right\}$$

در دو حالت (الف) و (ج) دستگاه معادلات به صورت معادله ماتریسی زیر در می آید:

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \lambda_1 & 2 & \lambda_1 & 0 & & \vdots \\ 0 & \lambda_2 & 2 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

که دستگاهی خطی با ماتریس ضرائب سه قطری است. در مورد (ب) معادله ماتریسی زیر را می یابیم:

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & 0 & & 0 \\ & & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & \cdots & \cdots & 0 & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

ماتریس فوق سه قطری کامل نیست، در واقع دو عنصر μ_1 و λ_n در محل های درایه ای $(1,n)$ و $(n,1)$ ظاهر می شود.

2-16-1 قضیه

دستگاه معادلات خطی وابسته به حالات (الف) و (ج) و همچنین (ب) دارای جواب یکتا اند.

(یعنی ماتریس ضرائب آنها، غیر تکین است).

اثبات

اثبات را در حالات (الف) یا (ج) انجام می دهیم. استدلال برای حالت (ب) مشابه است.

می خواهیم با فرض اینکه A همان ماتریس ضرائب معادله ماتریسی در حالت (الف) باشد ثابت می کنیم که $Az = w$ دارای جواب یکتاست. برای این منظور ثابت می کنیم که معادله $Az = 0$ دارای جواب غیر صفر نیست.

فرض می کنیم که $z = (z_0, \ldots, z_n)$ و $w = (w_0, \ldots, w_n)$

قرار می دهیم که :

$$\left| z_r \right| = \max_{i \in <0,n>} \left| z_i \right|$$

از معادلات

$$\mu_r \; z_{r-1} + 2 \; z_r + \lambda_r \; z_{r+1} = w_r$$

با توجه به اینکه $\mu_r + \lambda_r = 1$ داریم که

$$0 = \max \left| w_i \right| \geq \left| w_r \right| \qquad \mu_r \; , \; \lambda_r \geq 0$$

$$\geq \left| \mu_r \; z_{r-1} + 2 \; z_r + \lambda_r \; z_{r+1} \right|$$

$$\geq 2 \left| z_r \right| - \mu_r \left| z_r \right| - \lambda_r \left| z_r \right|$$

$$= (2 - \mu_r - \lambda_r) \left| z_r \right|$$

$$= \left| z_r \right| = \max \left| z_i \right|$$

حال اگر فرض کنیم که $w = 0$ و $z \neq 0$ وجود داشته باشد که $Az = 0$ ، این فرض با رابطه $0 \geq |z_r| > 0$ ، در تضاد است، لذا ناچارا $z_r = 0$ است. یعنی تنها جواب دستگاه $z = 0$ یعنی A غیرمنفرد است.

17–2 خواص همگرایی توابع اسپلاین

فرض می کنیم

$$M = \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix} \quad , \quad F = \begin{bmatrix} f''(x_0) \\ \vdots \\ \vdots \\ f''(x_n) \end{bmatrix}$$

$$|\Delta| = \max_{j \in <0, n-1>} |x_{j+1} - x_j|$$

قضیه 1–17–2

اگر $f \in C^4[a,b]$ و $\left| f^{(4)}(x) \right| \le L$ برای هر $x \in [a,b]$ ، دراینصورت:

$$\| M - F \| \le \| r \| \le \frac{3}{4} L \| \Delta \|^2$$

قضیه 2–17–2

اگر $f \in C^4[a,b]$ و $\left| f^{(4)}(x) \right| \le L$ و $x \in [a,b]$ و افراز $\Delta = \{ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \}$ و k یک ثابت باشد که :

$$\frac{\| \Delta \|}{\left| x_{j+1} - x_j \right|} \le k$$

اگر S_Δ تابع اسپلاینی باشد که مقادیر f را در نقاط x_i ، $i \in <0,n>$ درونیابی می کند،

و در شرط $S'_{\Delta}(x) = f'(x)$ برای $x = a, b$ صدق می کند، دراینصورت ثابت های c_k ($c_k \leq 2$) وجود دارند که به افراز Δ وابسته نیستند ،

$$\left\| f^{(k)}(x) - S_{\Delta}^{(k)}(x) \right\| \leq c_k \, L \, k \left\| \Delta \right\|^{4-k} \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

فصل سوم

3-1 مباحثي در انتگرال گيري عددي

در آنالیز عددی محاسبه انتگرال های معین $\int_a^b F(x)\,dx$ به انتگرال گیری عددی موسوم است. همین عنوان برای محاسبه انتگرال های دوگانه، چندگانه، خط، سطح به صورت عددی نیز به کار می رود.

در این فصل بعد از معرفی سریع قواعد انتگرال گیری نیوتن کاتز، هسته پئانو برای خطا ارائه می شود که در محاسبه کران بالای خطای تقریب در انتگرال های عددی بکار می رود، همچنین فرمول مقدماتی اولر و مک لورن، برای انتگرال گیری عددی معرفی می شود که زمینه را برای ارائه روش های برون یابی آماده می سازد. در پایان فصل به ارائه روش انتگرال گیری عددی گوس می پردازیم.

2-3 انتگرال گیري عددي به کمك قواعد نیوتن-کاتز

آنگونه که به خاطر داریم در قواعد نیوتن-کاتز برای محاسبه انتگرال معین $\int_a^b f(x)\,dx$ وقتی ضابطه f معلوم است، تابع f را با تابع چند جمله ای از درجه نابیشتر از n مانند $P \in \Pi_n$ روی فاصله $[a,b]$ تقریب می کنیم و سپس قرار می دهیم:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b P(x)\,dx$$

برای این منظور فرض می کنیم که $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ و $x_i = a + i\,h$ که در آن $h = \dfrac{b-a}{n}$ با استفاده از درونیابی لاگرانژ به دست می آوریم :

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x)\, f_i$$

که در آن

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

اگر قرار دهیم $x = a + t\,h = x_0 + t\,h$ آشکارا

$$l_i(x) = \varphi_i(t) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{t - k}{i - k} \qquad i \in <0, n>$$

لذا نتیجه می شود که

$$\int_a^b P(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} f_i \int_a^b l_i(x)\,dx = h \sum_{i=0}^{n} f_i \int_0^n \varphi_i(t)\,dt$$

$$= h \sum_{i=0}^{n} f_i\,\alpha_i$$

که در آن

$$\alpha_i = \int_0^n \varphi_i(t)\, dt$$

مثلا در حالت $n = 2$ داریم:

$$\alpha_0 = \int_0^2 \frac{t-1}{0-1}\,\frac{t-2}{0-2}\, dt = \frac{1}{3}$$

$$\alpha_1 = \int_0^2 \frac{t-0}{1-0}\,\frac{t-2}{1-2}\, dt = \frac{4}{3}$$

$$\alpha_2 = \int_0^2 \frac{t-0}{2-0}\,\frac{t-1}{2-1}\, dt = \frac{1}{3}$$

بنابراین

$$\int_a^b P_2(x)\,dx = \frac{h}{3}\,(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

قاعده فوق را قاعده سیمپسون ساده نامند.

به طور کلی برای $n \in N$ قواعد نیوتن کاتز به صورت کلی زیر است :

$$\int_a^b P_n(x)\,dx = h\sum_{i=0}^{n} f_i\,\alpha_i \qquad , \quad h = \frac{b-a}{n}$$

$$f_i = f(a + i\,h) \qquad , \quad i \in <0, n>$$

به سهولت ثابت می شود که $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = n$ زیرا کافیست $f(x) = 1$ در نظر بگیریم.

به این ترتیب در حالت کلی

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\sum_{i=0}^{n} f_i\,\alpha_i$$

اگر s را مخرج مشترک وزن های α_i در نظر بگیریم، اعداد σ_i به طوریکه

$$\sigma_i = s\alpha_i \qquad i \in <0, n>$$

$$\alpha_i = \frac{\sigma_i}{s}$$

اعداد صحیح اند و رابطه اخیر به صورت زیر در می آید:

$$\int_a^b P(x)\,dx = h\sum_{i=0}^{n} f_i\,\alpha_i = \frac{b-a}{n\,s}\sum_{i=0}^{n} \sigma_i\,f_i$$

می توان ثابت کرد که

$$e = \int_a^b P(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = h^{P+1} k\, f^{(P)}(\xi)$$

که در آن k عددی است که فقط به n وابسته است .

چندین قاعده نیوتن کاتز مهم در جدول زیر با فرمول خطای آنها داده شده است.

n	σ_i	ns	$Error$	$Name$
1	1 1	2	$h^3 \frac{1}{12} f^{(2)}(\xi)$	ذوزقه
2	1 4 1	6	$h^5 \frac{1}{90} f^{(4)}(\xi)$	سیمپسون
3	1 3 3 1	8	$h^5 \frac{3}{80} f^{(4)}(\xi)$	سیمپسون $\frac{3}{8}$
4	7 32 12 32 7	90	$h^7 \frac{8}{945} f^{(6)}(\xi)$	میلن
5	19 75 50 50 75 19	288	$h^7 \frac{275}{12096} f^{(6)}(\xi)$	–
6	41 216 27 272 27 216 41	840	$h^9 \frac{9}{1400} f^{(8)}(\xi)$	ودل

می توان همین روش را برای یافتن قواعد نیوتن _کاتز دقیق تر به کار برد اما مشکل اینجاست که برای n بزرگتر، بعضی از وزن های α_i منفی می شوند که کاربرد قاعده را از لحاظ عددی به دلیل امکان بروز پدیده حذف مشکل می سازد.

می توان به کمک درونیابی هرمیت نیز قواعدی برای انتگرال گیری عددی به دست آورید. مثلا با کاربرد درونیابی هرمیت برای داده های زیر روی فاصله $[a,b]$ قاعده جدیدی به دست بیاوریم.

$$P(a)=f(a) \qquad P'(a)=f'(a)$$
$$P(b)=f(b) \qquad P'(b)=f'(b)$$

که با محاسبه نه چندان طولانی (تمرین) با فرض $a=0\ ,\ b=1$ نتیجه می شود .

$$\begin{aligned} P(t) = {} & f(0)[(t-1)^2+2t(t-1)^2] \\ & + f(1)[t^2-2t^2(t-1)] \\ & + f'(0)\ t(t-1)^2 + f'(1)\ t^2(t-1) \end{aligned}$$

که از آن نتیجه می شود:

$$\int_0^1 P(t)\,dt = \frac{1}{2}(f(0)+f(1)) + \frac{1}{12}(f'(0)-f'(1))$$

لذا

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx M(h) = \frac{h}{2}(f(a)+f(b)) + \frac{h^2}{12}(f'(a)-f'(b))$$

اگر $f \in C^4[a,b]$ دراینصورت می توان ثابت کرد:

$$M(h) - \int_a^b f(x)\,dx = -\frac{h^5}{720} f^{(4)}(\xi) \quad , \quad \xi \in]a,b[\quad , \quad h=b-a$$

قواعد فوق (نیوتن_کاتز) برای گام های برابر ارائه می شود. روش هایی مانند انتگرال گیری گوس وجود دارد که در آنها گام نقاط نابرابر است و دقت بیشتری را برای نقاط تقسیم کمتر نتیجه می دهد. می توان به کمک قواعد نیوتن_کاتز ساده ارائه شده، قواعد مرکب را به دست آورد.

مثلا قاعده ذوزنقه ای برای یک فاصله $[\,x_i\,,\,x_{i+1}\,]$ به صورت

$$I_i = \frac{h}{2}\,[\,f\,(x_i\,) + f\,(x_{i+1}\,)\,]$$

است که برای همه فواصل $[\,x_i\,,\,x_{i+1}\,]$ به طوری که

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

$$x_{i+1} - x_i = h \qquad\qquad i \in < 0, n-1 >$$

دراینصورت قاعده مرکب ذوزنقه ای را به صورت زیر می یابیم:

$$\int_a^b f\,(x)\,d\,x \;\approx\; T\,(h\,) \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} I_i$$

$$T\,(h\,) \;=\; h\left[\;\frac{f\,(a\,)}{2} \;+ f\,(a+h\,) \;+\; \cdots \;+ f\,(b-h\,) \;+\; \frac{f\,(b\,)}{2}\;\right]$$

آشکارا

$$I_i - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \frac{h^3}{12} f^{(2)}(\xi_i) \qquad \xi_i \in \left]x_i, x_{i+1}\right[$$

لذا

$$T(h) - \int_a^b f(x)\,dx = \frac{h^3}{12}\sum_{i=0}^{n-1} f^{(2)}(\xi_i) = \frac{h^2}{12}(b-a)\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f^{(2)}(\xi_i)$$

اما اگر $f^{(2)}(x)$ روی $[a,b]$ پیوسته باشد می توان یک $\xi \in \left]a,b\right[$ یافت که :

$$f^{(2)}(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f^{(2)}(\xi_i)$$

زیرا

$$\min f^{(2)}(\xi_i) \le \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f^{(2)}(\xi_i) \le \max f^{(2)}(\xi_i)$$

لذا

$$\xi \in \left[\min_i \xi_i \, , \max_i \xi_i \right] \subset \left] a \, , b \right[$$

لذا

$$E = T(h) - \int_a^b f(x)\, dx = \frac{b-a}{12} h^2 f^{(2)}(\xi) \qquad \xi \in \left] a \, , b \right[$$

بنابراین

$$\frac{b-a}{12} h^2 M_1 \leq E \leq \frac{b-a}{12} h^2 M_2$$

$$M_1 = Min \ \ f^{(2)}(x) \quad , \quad M_2 = Max \ \ f^{(2)}(x) \qquad x \in [a \, , b]$$

به طریق مشابه برای قاعده سیمپسون با فرض $h = \frac{b-a}{2n}$ و تقسیمات

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{2i} < x_{2i+1} < x_{2i+2} < \cdots < x_{2n} = b$$

با فرض $x_{j+1} - x_j = h$ ، $j \in <0, 2n>$ داریم:

$$I_i = \frac{h}{3}\left[f(x_{2i}) + 4 f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2}) \right] \qquad i \in <0, n-1>$$

اکنون قرار می دهیم :

$$S(h) = \sum_{i=0}^{n-1} I_i = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4 f(a+h) + 2 f(a+2h) + 4 f(a+3h) \right.$$
$$\left. + 2 f(a+4h) + \cdots + 2 f(b-2h) + 4 f(b-h) + f(b) \right]$$

لذا

$$S(h) - \int_a^b f(x)\,dx = \frac{h^5}{90} \sum_{i=0}^{n-1} f^{(4)}(\xi_i) = \frac{h^4}{90} \frac{(b-a)}{2} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f^{(4)}(\xi_i)$$

$$\xi_i \in \left] x_{2i}, x_{2i+2} \right[\qquad , \qquad i \in <0, n-1>$$

با استدلال مشابه می یابیم:

$$S(h) - \int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{180}\, h^4\, f^{(4)}(\xi) \qquad \xi \in]a,b[$$

در رابطه اخیر $f \in C^4[a,b]$

برای قاعده $M(h)$ نیز قاعده مرکب به صورت زیر است:

$$U(h) = h\left[\frac{f(a)}{2} + f(a+h) + \cdots + f(b-h) + \frac{f(b)}{2}\right] + \frac{h^2}{12}\left[f'(a) - f'(b)\right]$$

یعنی

$$U(h) = T(h) + \frac{h^2}{12}\left[f'(a) - f'(b)\right]$$

ثابت می شود:

$$U(h) - \int_a^b f(x)\,dx = -\frac{b-a}{720} h^4 f^{(4)}(\xi)$$

نکته قابل توجه آنکه با افزودن جمله زیر نویس شده، دقت روش ذوزنقه ای از رتبه دقت روش سیمپسون قرار می گیرد.

درصورتی که امکان قرار دادن مشتق تحلیلی در a و b نباشد، می توان از مشتق عددی استفاده نمود و قاعده ای به صورت زیر را ساخت:

$$\hat{T}(h) = h[\frac{5}{12} f(a) + \frac{13}{12} f(a+h) + f(a+2h)$$
$$+ \cdots + f(b-2h) + \frac{13}{12} f(b-h) + \frac{5}{12} f(b)]$$

می توان ثابت کرد که خطای قاعده فوق از رتبه توان سوم گام h است.

3-3 نمايش پئانو براي خطا

همه قواعد انتگرال گیری عددی برای تابع $f \in C^n[a,b]$ به صورت زیر نمایش داده می شوند:

$$I(f) = \sum_{k=0}^{m_0} a_{k_0} f(x_{k_0}) + \sum_{k=0}^{m_1} a_{k_1} f'(x_{k_1}) + \cdots + \sum_{k=0}^{m_n} a_{k_n} f^{(n)}(x_{k_n})$$

خطای قاعده فوق را با $R(f)$ نمایش می دهیم:

$$R(f) = I(f) - \int_a^b f(x)\,dx$$

آشکارا تابع R یک تابع خطی است:

$$R(\alpha f + \beta g) = \alpha R(f) + \beta R(g)$$

1-3-3 قضیه

فرض می کنیم که $R(P)=0$ باشد برای همه چند جمله ای های $P \in \Pi_n$ یعنی برای همه چند جمله ای های از درجه نابیشتر از n انتگرال گیری به کمک $I(f)$ دقیق باشد دراینصورت برای همه توابع $f \in C^n[a,b]$ داریم :

$$R(f) = \int_a^b f^{(n+1)}(t)\,k(t)\,dt$$

که در آن

$$k(t) = \frac{1}{n!} R_x[(x-t)_+^n]$$

$$(x-t)_+^n = \begin{cases} (x-t)^n & x \geq t \\ 0 & x < t \end{cases}$$

و همچنین

$$R_x [(x - t)_+^n]$$

نشان دهنده خطای $(x - t)_+^n$ وقتی که عبارت تابعی از x در نظر گرفته شود می باشد.

$k (t)$ را هسته پئانو برای خطا نامند.

قبل از اثبات قضیه، کاربرد قضیه را در روش سیمپسون ساده به نمایش می گذاریم. اگر قرار دهیم:

$$R (f) = \frac{1}{3} f (-1) + \frac{4}{3} f (0) + \frac{1}{3} f (1) - \int_{-1}^{1} f (x) d x$$

ادعا می کنیم که به کمک قاعده سیمپسون توابع $P \in \Pi_3$ به طور دقیق انتگرال گیری می شود.

در واقع اگر $Q \in \Pi_2$ و قرار دهیم که

$$P (-1) = Q (-1)$$

$$P(0) = Q(0)$$

$$P(1) = Q(1)$$

و فرض کنیم که $S(x) = P(x) - Q(x)$ آشکارا $S \in \Pi_3$ و به سهولت بررسی می شود که

$$R(P) = R(S)$$

حال چون S چند جمله ای از درجه ۳ است که در سه نقطه متمایز ۱- و ۰ و ۱+ صفر می شود، لذا باید به صورت زیر باشد.

$$S(x) = a\ (x^2 - 1)\, x$$

در نتیجه داریم :

$$R(P) = R(S) = -a \int_{-1}^{1} x(x^2 - 1)\, dx = 0$$

با توجه به برقراری شرایط قضیه برای $P \in \Pi_3$ و قاعده سیمپسون می توان $k(t)$ را به صورت زیر محاسبه کرد.

$$k(t) = \frac{1}{6} R_x [(x-t)_+^3]$$

$$= \frac{1}{6} [\frac{1}{3}(-1-t)_+^3 + \frac{4}{3}(0-t)_+^3 + \frac{1}{3}(1-t)_+^3 - \int_{-1}^{1} (x-t)_+^3 dx]$$

اما داریم:

$$\int_{-1}^{1} (x-t)_+^3 dx = \int_{t}^{1} (x-t)^3 dx = \frac{(1-t)^4}{4}$$

و

$$(-1-t)_+^3 = 0 \quad , \quad (1-t)_+^3 = (1-t)^3$$

$$(-t)_+^3 = \begin{cases} 0 & t \geq 0 \\ -t^3 & t < 0 \end{cases}$$

لذا داریم :

$$k(t) = \frac{1}{6} R_x [(x-t)_+^3]$$

$$= \frac{1}{6} [\frac{4}{3}(-t)_+^3 + \frac{1}{3}(1-t)^3 + \frac{1}{4}(1-t)^4]$$

$$k(t) = \begin{cases} \frac{1}{72}(1-t)^3 (1+3t) & 0 \leq t \leq 1 \\ k(-t) & -1 \leq t \leq 0 \end{cases} \quad (1)$$

اثبات

برای اثبات از بسط تیلوری تابع f در نقطه x و با مرکز $x = a$ استفاده می کنیم :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r_n(x)$$

به خاطر داریم که می توان $r_n(x)$ جمله باقیمانده سری تیلور را به صورت زیر نوشت :

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt$$

یا

$$r_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)$$

$$\xi \in]a, x[\quad , \quad (\quad \xi \in]x, a[\quad)$$

می توان نوشت :

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)\,(x-t)_+^n\,dt$$

اما داریم :

$$R(f) = R(r_n) = \frac{1}{n!}\,R_x\left(\int_a^b f^{(n+1)}(t)\,(x-t)_+^n\,dt\right)$$

برای اثبات قضیه لازم است که عملگر R_x از علامت انتگرال عبور نماید، برای بررسی این مطلب با توجه به قضایای آنالیز ریاضی توجه داریم که تابع انتگرال ده نسبت به متغیر x ، $(n-1)$ بار مشتق پذیر پیوسته است. لذا می توان علامت مشتق $\frac{d^k}{dx^k}$ را از انتگرال عبور داد و برای هر

$$k \in <0, n-1>$$

داریم :

$$\frac{d^{k}}{dx^{k}} = \left[\int_{a}^{b} f^{(n+1)}(t)\,(x-t)_{+}^{n}\,dt \right]$$

$$= \int_{a}^{b} f^{(n+1)}(t)\,\frac{d^{k}}{dx^{k}}\left[(x-t)_{+}^{n}\right] dt$$

به ویژه

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \int_{a}^{b} f^{(n+1)}(t)\,(x-t)_{+}^{n}\,dt$$

$$= \int_{a}^{b} f^{(n+1)}(t)\left[n!\,(x-t)_{+}\right] dt$$

$$= n! \int_{a}^{b} f^{(n+1)}(t)\,(x-t)_{+}\,dt$$

اکنون داریم

$$\frac{d^{n}}{dx^{n}} \int_{a}^{b} f^{(n+1)}(t)\,(x-t)_{+}^{n}\,dt$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \int_{a}^{b} f^{(n+1)}(t)\,(x-t)_{+}^{n}\,dt\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\left[n! \int_{a}^{b} f^{(n+1)}(t)\,(x-t)_{+}\,dt\right]$$

$$= n!\,\frac{d}{dx} \int_{a}^{x} f^{(n+1)}(t)\,(x-t)\,dt$$

$$= n!\,\frac{d}{dx}\left\{\left[f^{(n)}(t)\,(x-t)\right]_{a}^{x} + \int_{a}^{x} f^{(n)}(t)\,dt\right\}$$

$$= n! \frac{d}{dx} \left[f^{(n)}(x)(x-x) - f^{(n)}(a)(x-a) + \int_a^x f^{(n)}(t)\,dt \right]$$

$$= n! \left[-f^{(n)}(a) + \frac{d}{dx} \int_a^x f^{(n)}(t)\,dt \right]$$

$$= n! \left[-f^{(n)}(a) + f^{(n)}(x) \right]$$

$$= n! \int_a^x f^{(n+1)}(t)\,dt$$

لذا

$$\frac{d^n}{dx^n} \int_a^b f^{(n+1)}(t)(x-t)_+^n\,dt$$

$$= n! \int_a^x f^{(n+1)}(t)\,dt$$

از طرف دیگر در عبارت $r_n(x)$ انتگرال روی فاصله $[a,b]$ ظاهر شده است.

بعد از تاثیر R بر $r_n(x)$ انتگرال دیگری بر حسب x روی فاصله $[a,b]$ داریم.

$$\int_a^b \left(\int_a^b f^{(n+1)}(t)\,(x-t)_+^n \, dt \right) dx$$

با توجه به قضیه ای در آنالیز، در مورد انتگرال های دو گانه، در صورتی که تابع انتگرالده روی ناحیه انتگرال گیری پیوسته باشد، می توان ترتیب انتگرال گیری را تغییر داد. چون این شرط در اینجا برقرار است، لذا داریم:

$$\int_a^b \left(\int_a^b f^{(n+1)}(t)\,(x-t)_+^n \, dt \right) dx$$

$$= \int_a^b f^{(n+1)}(t) \left(\int_a^b (x-t)_+^n \, dx \right) dt$$

لذا با توجه به آنچه در مورد مشتق و انتگرال گفتیم، داریم :

$$R(f) = R(r_n) = \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n+1)}(t)\ R_x \left[(x-t)_+^n \right] dt$$

اگر قرار دهیم :

$$k(t) = \frac{1}{n!} R_x \left[(x-t)_+^n \right]$$

$$R(f) = \int_a^b f^{(n+1)}(t)\ k(t)\ dt$$

2-3-3 تذکر

در صورتی که تابع $k(t)$ روی فاصله $[a, b]$ تغییر علامت ندهد، بنابر قضیه ای از آنالیز ریاضی می توان چنین نوشت:

$$R(f) = f^{(n+1)}(\xi) \int_a^b k(t)\ dt$$

از تذکر فوق کاربرد عملی فراوانی دارد. به این صورت که در مواردی که $k(t)$ در فاصله انتگرال گیری تغییر علامت ندهد چون مقدار $\int_a^b k(t)\,dt$ به f وابسته نیست می توان مقدار انتگرال فوق را به دست آورد و به کمک آن خطا را محاسبه کرد. مثلا در مورد $P \in \Pi_n$ و با توجه به شرایط قضیه اگر $k(t)$ روی فاصله $[a,b]$ تغییر علامت ندهد ، می توان برای $f(x) = x^{n+1}$ ، $k(t)$ را یافت و در مورد بقیه موارد استفاده نمود.

در اینصورت داریم:

$$R(x^{n+1}) = (n+1)! \int_a^b k(t)\,dt$$

و

$$\int_a^b k(t)\,dt = \frac{R(x^{n+1})}{(n+1)!}$$

لذا برای f کلی داریم :

$$R(f) = \frac{R(x^{n+1})}{(n+1)!} \quad f^{(n+1)}(\xi)$$

همین مساله را برای قاعده سیمپسون به کار می بریم. در شروع این بحث دیدیم که $k(t)$ در روش به صورت (۱) است که به سهولت ثابت می شود که روی فاصله $[-1,1]$ تغییر علامت نمی دهد. از طرف دیگر دیدیم که قاعده سیمپسون ساده برای $P \in \Pi_3$ دقیق است، لذا برای محاسبه هسته پئانو از رابطه اخیر می توان استفاده کرد:

$$\int_a^b k(t)\, dt = \frac{R(x^4)}{(4)!}$$

اما

$$R(x^4) = \frac{1}{3}(1) + \frac{4}{3}(0) + \frac{1}{3}(1) - \int_{-1}^{1} x^4\, dx = \frac{1}{90}$$

لذا داریم:

$$R(f) = \frac{1}{90} f^{(4)}(\xi) \qquad \xi \in]-1,1[$$

به سهولت می توان ثابت کرد که برای قواعد داده شده نیوتن_کاتز (قواعد جدول) $k(t)$ روی فاصله انتگرال گیری دارای علامت ثابت است، لذا می توان خطا را با قاعده زیر به دست آورد:

(n درجه تابع درونیاب است)

$$R(f) = \begin{cases} \dfrac{R(x^{n+1})}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) & n \text{ فرد} \\ \dfrac{R(x^{n+2})}{(n+2)!} f^{(n+2)}(\xi) & n \text{ زوج} \end{cases}$$

اکنون توجه خود را به قاعده $M(h)$ برای انتگرال گیری عددی معطوف می کنیم .

داریم :

$$R(f) = M(h) - \int_a^b f(x)\,dx \qquad h = b - a$$

$$= \frac{h}{2}(f(a) + f(b)) + \frac{h^2}{12}(f'(a) - f'(b)) - \int_a^b f(x)\,dx$$

$R(f)$ برای چند جمله ای های تا درجه ۳ دقیق است. اما داریم:

$$k(t) = \frac{1}{6} R_x \left[(x-t)_+^3 \right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{h}{2}(a-t)_+^3 + (b-t)_+^3 + \frac{h^2}{4}((a-t)_+^2 - (b-t)_+^2) - \int_a^b (x-t)_+^3\,dx \right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{h}{2}(b-t)^3 - \frac{h^2}{4}(b-t)^2 - \frac{1}{4}(b-t)^4 \right]$$

$$= -\frac{1}{24}(b-t)^2(a-t)^2 \le 0 \qquad t \in [a,b]$$

لذا می توان از تذکر داده شده استفاده کرد. برای سهولت قرار می دهیم :

$$b=1 \quad , \quad a=0$$

$$\frac{R(x^4)}{4!} = \frac{1}{24}\left(\frac{1}{2}(1)+\frac{1}{12}(-4)-\frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{720}$$

برای

$$R(f) = M(h) - \int_a^b f(x)\,dx$$

داریم:

$$R(f) = -\frac{1}{24}\int_a^b f^{4}(t)(b-t)^2(a-t)^2\,dt$$

$$= -\frac{(b-a)^5}{720} f^{(4)}(\xi) \qquad \xi \in \left]a,b\right[$$

4-3 فرمول انتگرال گيري اولر_مك لورن

یکی از فرمول های مهم که زمینه ساز کاربرد روش های برونیابی برای انتگرال گیری عددی است، فرمول اولر مک لورن است.

این فرمول برای توابع $g \in C^{2m+2}[0,1]$ به صورت زیر نمایش داده می شود.

$$\int_0^1 g(t)\,dt = \frac{g(0)}{2} + \frac{g(1)}{2} + \sum_{l=1}^{m} \frac{B_{2l}}{(2l)!}\left(g^{(2l-1)}(0) - g^{(2l-1)}(1)\right) - \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}\, g^{(2m+2)}(\xi) \qquad 0<\xi<1 \qquad (۲)$$

اعداد B_{2l} را اعداد برنولی گویند.

چند عدد برنولی مهم عبارتند از :

$$B_2 = \frac{1}{6} \quad , \quad B_4 = -\frac{1}{30} \quad , \quad B_6 = \frac{1}{42} \quad , \quad B_8 = -\frac{1}{30}$$

با کاربرد فرمول (۲) می توان یافت:

$$\int_0^N g(t)\,dt = \left[\frac{g(0)}{2} + g(1) + g(2) + \cdots + g(N-1) + \frac{g(N)}{2}\right]$$

$$+ \sum_{l=1}^{m} \frac{B_{2l}}{(2l)!}\left(g^{(2l-1)}(0) - g^{(2l-1)}(N)\right)$$

$$- \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}\, N\, g^{(2m+2)}(\xi) \qquad 0 < \xi < N$$

(۳)

برای یافتن فرمول (۳) به کمک (۲) کافیست از خواص انتگرال معین استفاده کنیم.

می توان نوشت:

$$\frac{g(0)}{2} + g(1) + g(2) + \cdots + g(N-1) + \frac{g(N)}{2}$$

$$= \int_0^N g(t)\,dt + \sum_{l=1}^{m} \frac{B_{2l}}{(2l)!}\left(g^{(2l-1)}(N) - g^{(2l-1)}(0)\right)$$

$$+ \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}\, N\, g^{(2m+2)}(\xi)$$

برای تابع $f \in C^{2m+2}[a,b]$ و با در نظر گرفتن نقاط تقسیم

$$x_i = a_i + i\,h \qquad i \in <0, N>$$

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$$

با محاسبه ای نه چندان طولانی می توان یافت:

$$T(h) = \int_a^b f(t)\,dt + \sum_{l=1}^{m} h^{2l} \frac{B_{2l}}{(2l)!} \left(f^{(2l-1)}(b) - f^{(2l-1)}(a) \right)$$

$$+ h^{2m+2} \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!} (b-a)\, f^{(2m+2)}(\xi)$$

$$\xi \in \left] a, b \right[\qquad (٤)$$

که در آن $T(h)$ قاعده ذوزنقه ای مرکب برای محاسبه $\int_a^b f(t)\,dt$ با گام $h = \frac{b-a}{N}$ باشد.

$$T(h) = \frac{h}{2} \left[f(a) + 2 f(a+h) + \cdots + 2 f(b-h) + f(b) \right]$$

$$= \frac{h}{2} \left[f(x_0) + 2 f(x_1) + \cdots + 2 f(x_{N-1}) + f(x_N) \right]$$

اثبات رابطه (2)

برای یافتن فرمول (۲) از قاعده جزء به جزء استفاده می کنیم. فرض می کنیم که $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$

این تابع را تابع چند جمله ای برنولی از درجه ۱ می نامیم. قرار داد می کنیم که $B_0 = 1$ داریم :

$$\int_0^1 g(t)\,dt = [B_1(t)\,g(t)]_0^1 - \int_0^1 B_1(t)\,g'(t)\,dt$$

مجددا

$$\int_0^1 B_1(t)\,g'(t)\,dt = \frac{1}{2}[B_2(t)\,g'(t)]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 B_1(t)\,g''(t)\,dt$$

که در آن $\frac{1}{2}B_2(t)$ تابع اولیه ای از تابع $B_1(t)$ در نظر می گیریم که کمی بعد آن را مشخص می سازیم. به همین ترتیب برای هر $B_k(t)$ ، $\frac{1}{k+1}B_{k+1}(t)$ را به عنوان تابع اولیه از آن در نظر می گیریم. در واقع می خواهیم که ضریب توان غالب در B_k ، واحد باشد.

به طریق مشابه داریم:

$$\int_0^1 B_{k-1}(t)\; g^{(k-1)}(t)\; dt = \frac{1}{h}\,[\,B_k(t)\; g^{(k-1)}(t)\;]_0^1 - \frac{1}{k}\int_0^1 B_k(t)\; g^{(k)}(t)\,dt$$

به طور دقیق تر می خواهیم :

$$B'_{k+1}(t) = (k+1)\; B_k(t) \qquad\qquad k = 1, 2, \ldots$$

یعنی توان غالب در عبارت های B_k دارای ضریب برابر واحد است.

در هر مرحله برای انتگرال گیری B_k ، نیاز به شرایطی داریم که B_{k+1} را به صورت یگانه مشخص سازد. برای این منظور، دو شرط زیر را در نظر می گیریم:

$$B_{2l+1}(0) = B_{2l+1}(1) = 0 \qquad\qquad l > 0$$

بنابراین اگر

$$B_{2l-1}(x) = x^{2l-1} + c_{2l-2}\, x^{2l-2} + \cdots + c_1 x + c_0$$

در این صورت داریم :

$$B_{2l+1} = x^{2l+1} + \frac{(2l+1)(2l)}{2l\ (2l-1)}\, c_{2l-2}\, x^{2l} + \cdots + (2l+1)\, c\, x + d$$

با کاربرد شرط $B_{2l+1}(0) = 0$ داریم $d = 0$ و با کاربرد شرط $B_{2l+1}(1) = 0$ ثابت c تعیین می شود. لذا توجه داریم که ثابت های چند جمله ای های برنولی با درجه فرد (بزرگتر از واحد) صفر است. ثابت های چند جمله ای های برنولی با درجه زوج را اعداد برنولی نامند.

چند نمونه از چند جمله ای های برنولی با درجه پایین را ارائه می کنیم.

$$B_0(x) \equiv 1 \quad ,$$

$$B_1(x) \equiv x - \frac{1}{2} \quad ,$$

$$B_2(x) \equiv x^2 - x + \frac{1}{6} \quad ,$$

$$B_3(x) \equiv x^3 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{2} x \quad ,$$

$$B_4(x) \equiv x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30} \quad ,$$

می توان ثابت کرد که چند جمله ای های برنولی در رابطه زیر صدق می کنند.

$$(-1)^k B_k(1-x) = B_k(x)$$

برای بررسی کافیست توجه کنیم که $(-1)^k B_k(1-x)$ در رابطه بازگشتی مشابهی چون (۵) صدق می کند. به کمک فرمول فوق می توان برای $k > 1$ و زوج نیز رابطه زیر را یافت:

$$B_k(0) = B_k(1) = B_k \qquad , \qquad k = 2l \qquad , \qquad l \in N^*$$

از رابطه فوق نتیجه می شود:

$$\int_0^1 B_k(t)\,dt = \frac{1}{k+1}\left[B_{k+1}(1) - B_{k+1}(0)\right] = 0$$

حال بسط انتگرال $\int_0^1 g(t)\,dt$ را می یابیم. توجه داریم که

$$\frac{1}{k}\left[B_k(t)\,g^{(k-1)}(t)\right]_0^1 = -\frac{B_k}{k}\left[g^{(k-1)}(0) - g^{(k-1)}(1)\right]$$

لذا با کاربرد متوالی قاعده فوق برای هر یک از انتگرال ها و عبارات داریم:

$$\int_0^1 g(t)\,dt$$

$$= \frac{g(0)}{2} + \frac{g(1)}{2} + \sum_{l=1}^{m} \frac{B_{2l}}{(2l)!}\left(g^{(2l-1)}(0) - g^{(2l-1)}(1)\right) + r_{m+1}$$

که در آن

$$r_{m+1} = \frac{-1}{(2m+1)!} \int_0^1 B_{2m+1}(t)\, g^{(2m+1)}(t)\, dt$$

برای محاسبه انتگرال فوق یک جزء به جزء دیگر به کار می بریم.

$$\int_0^1 B_{2m+1}(t)\; g^{(2m+1)}(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2m+2} \left[\left(B_{2m+2}(t) - B_{2m+2} \right)\; g^{(2m+1)}(t) \right]_0^1$$

$$- \frac{1}{2m+2} \int_0^1 \left(B_{2m+2}(t) - B_{2m+2} \right)\; g^{(2m+2)}(t)\; dt$$

$$r_{m+1} = \frac{1}{(2m+2)!} \int_0^1 \left(B_{2m+2}(t) - B_{2m+2} \right)\; g^{(2m+2)}(t)\; dt$$

می توان ثابت کرد (اشتوئر) که

$$B_{2m+2}(t) - B_{2m+2}$$

روی فاصله $[0,1]$ تغییر علامت نمی دهد. در این صورت

$$r_{m+1} = \frac{1}{(2m+2)!}\, g^{(2m+2)}(\xi) \int_0^1 (B_{2m+2}(t) - B_{2m+2})\, dt$$

که این رابطه با کاربرد قضیه میانگین برای انتگرال به دست آمده است. اما

$$\int_0^1 (B_{2m+2}(t) - B_{2m+2})\, dt$$

$$= \int_0^1 B_{2m+2}(t)\, dt - B_{2m+2} \int_0^1 dt$$

$$= -B_{2m+2}$$

یعنی

$$r_{m+1} = \frac{-B_{2m+2}}{(2m+2)!}\, g^{(2m+2)}(\xi) \qquad 0 < \xi < 1$$

5–3 انتگرال یابي با برونیابي

فرض می کنیم که $f \in C^{2m+2}[a,b]$ و فرض می کنیم که $T(h)$ مقدار به دست آمده با قاعده ذوزنقه ای با گام h ، $h = \frac{b-a}{n}$ باشد، در این صورت با توجه به قضیه اولر _مک لورن می توان نوشت:

$$T(h) = \tau_0 + \tau_1 h^2 + \tau_2 h^4 + \cdots + \tau_m h^{2m} + \alpha_{m+1}(h)\, h^{2m+2}$$

که در آن

$$\tau_0 = \int_a^b f(t)\, dt$$

$$\tau_k = \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\right) \quad , \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

$$\alpha_{m+1}(h) = \frac{B_{2m+2}}{(2m+2)!}(b-a)\, f^{(2m+2)}(\xi(h))$$

$$, \quad a < \xi(h) < b$$

چون $f^{(2m+2)}(t)$ روی $[a, b]$ پیوسته است، کراندار است. لذا

$$\exists \quad L \in R_+ \quad ; \quad \left| f^{(2m+2)}(t) \right| \leq L \quad , \quad t \in [a, b]$$

به سهولت نتیجه می شود:

$$\left| \alpha_{m+1}(h) \right| \leq M$$

عباراتی به صورت

$$T(h) = \tau_0 + \tau_1 h^2 + \cdots + \tau_m h^{2m} + \cdots + \alpha_{m+1}(h)\, h^{2m+2}$$

را یک بسط مجانبی برای $T(h)$ نامند که در صورت همگرایی سری فوق مقدار τ_0 مقدار $T(h)$ برای $h = 0$ است. در صورتی که سری همگرا نباشد ولی $|\alpha_{m+1}(h)| \le M$ کراندار باشد، می توان به طور محدود از لحاظ عملی مقدار های دقیق تری برای $T(h)$ به کمک مقادیر کوچکتر h تقریب نمود. روشی که از آن استفاده می کنیم به روش برونیابی ریچاردسون موسوم است.

$$\tau_0 = T(h) + O(h^2)$$

$$4T(\frac{h}{2}) - T(h) = 3\tau_0 + \tau_2 h^4 + \cdots$$

که در آن

$$T(\frac{h}{2}) = \tau_0 + \tau_1 \frac{h^2}{4} + \tau_2 \frac{h^4}{16} + \cdots$$

$$\tau_0 \approx \frac{4T(\frac{h}{2}) - T(h)}{3} = M(h)$$

$$\tau_0 = M(h) + O(h^4)$$

برای ارائه روش دقیق تری که بر درونیابی نویل یا گویا متکی است به طریق زیر عمل می کنیم.

فرض می کنیم که

$$h_0 = b - a$$

$$h_1 = \frac{h_0}{n_1} \qquad h_2 = \frac{h_0}{n_2} \qquad \cdots \qquad h_m = \frac{h_0}{n_m}$$

که در آن

$$n_1 < n_1 < \ldots < n_m \qquad n_j \in N \qquad , \qquad j \in <0, m>$$

اکنون قرار می دهیم

$$T_{i_0} = T(h_i) \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, m$$

اکنون تابع چند جمله ای از درجه $2m$ درونیاب $\tilde{T}_{mm}(h)$ را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\tilde{T}_{mm}(h) = a_0 + a_1 h^2 + a_2 h^4 + \cdots + a_m h^{2m}$$

فرض می کنیم که $\tilde{T}_{mm}(0)$ تقریب τ_0 باشد. اگر قرار دهیم:

$$h_i = \frac{b-a}{2^i}$$

این روش تعیین $\tilde{T}_{mm}(0)$ به روش انتگرال گیری رامبرگ موسوم است.

برای تعیین $\tilde{T}_{mm}(0)$ ، تعریف می کنیم:

$$\tilde{T}_{ik}(h_j) = T(h_j) \qquad , \quad j = i-k,\ i-k+1,\ \ldots,\ i$$

در واقع هر $\tilde{T}_{ik}$ یک چند جمله ای از درجه $2k$ بر حسب h و از توان های زوج h است.

و برای سهولت

$$T_{ik} = \tilde{T}_{ik}(0)$$

اکنون به کمک رابطه بازگشتی

$$T_{ik} = T_{i,k-1} + \frac{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{\frac{h_{i-k}^2}{h_i^2} - 1}$$

برای مقادیر جدید T_{ik} را به کمک $T_{i,k-1}$ و $T_{i-1,k-1}$ به دست می آوریم که در جدول زیر مقادیر مختلف T_{ik} داده شده اند و محاسبه بر اساس رابطه اخیر و به کمک جدول به سهولت میسر می شود.

h_i^2	T_{i0}	T_{i1}	T_{i2}	T_{i3}
h_0^2	T_{00}			
		T_{11}		
h_1^2	T_{10}		T_{22}	
		T_{21}		T_{33}
h_2^2	T_{20}		T_{32}	$\vdots$
		T_{31}	$\vdots$	
h_3^2	T_{30}	$\vdots$		

مثال : انتگرال زیر را محاسبه کنید :

$$\int_0^1 t^5 \, dt$$

با برونیابی با گام های $h_0 = 1$, $h_1 = \frac{1}{2}$, $h_2 = \frac{1}{4}$

h_i^2	T_{i0}	T_{i1}	T_{i2}
$h_0^2 = 1$	$T_{00} = 0.5$		
		$T_{11} = 0.187500$	
$h_1^2 = \frac{1}{4}$	$T_{10} = 0.265625$		$T_{22} = 0.166667$
		$T_{21} = 0.167969$	
$h_2^2 = \frac{1}{16}$	$T_{20} = 0.192383$		

برای هر مؤلفه T_{ik} جدول اخیر یک قاعده انتگرال گیری عددی به صورت زیر به دست می دهد:

$$T_{ik} = \alpha_0 f(a) + \alpha_1 f(a+h_i) + \cdots + \alpha_{n_i-1} f(b-h_i) + \alpha_{n_i} f(b)$$

بعضی از این قواعد همان قواعد نیوتن کاتز معمولی اند، به ویژه در حالت $i=k$ به عنوان نمونه برای $h_1 = \frac{h_0}{2} = \frac{b-a}{2}$ قاعده T_{11} قاعده سیمپسون است و T_{00} قاعده ذوزنقه ای معمولی است.

$$T_{00} = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$

$$T_{10} = \frac{b-a}{2}\left(\frac{f(a)}{2} + f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f(b)}{2}\right)$$

از طرف دیگر

$$T_{11} = \frac{b-a}{2}\left(\frac{f(a)}{3} + \frac{4}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f(b)}{3}\right)$$

$$T_{11} = T_{10} + \frac{T_{10} - T_{00}}{3} = \frac{4}{3} T_{10} - \frac{1}{3} T_{00}$$

اگر قرار دهیم $h_2 = \frac{h_1}{2}$ ، T_{22} همان قاعده میلن می باشد.

اما T_{33} ، حتی با انتخاب $h_3 = \frac{h_2}{2}$ هیچ قاعده نیوتن کاتزی نیست.

در محاسبات عملی توصیه می شود که جدول فوق را حداکثر تا ستون ششم ادامه می دهیم، یا تا آنجا که شرط زیر برقرار شود، محاسبه را متوقف کنید.

(s یک تقریب ضعیف از τ_0 است).

$$\left| T_{i,6} - T_{i+1,6} \right| \le \varepsilon s$$

می توان برای محاسبه T_{ik} از روش های درونیابی گویا استفاده نمود، که بر اساس رابطه بازگشتی زیر است :

$$T_{ik} = T_{i,k-1} + \frac{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{\left| \frac{h_{i-k}}{h_i} \right|^2 \left(1 - \frac{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-2}}\right) - 1}$$

که در آن

$$T_{ik} = \tilde{T}_{ik}(0) \qquad j = i-k,\ i-k+1,\ \ldots,\ i$$

$$\tilde{T}_{ik} = \frac{p_0 + p_1 h^2 + \cdots + p_\mu h^{2\mu}}{q_0 + q_1 h^2 + \cdots + q_\nu h^{2\nu}}$$

که در آن

$$\mu + \nu = k$$

و

$$\mu = \nu$$

یا

$$\mu = \nu - 1$$

که خطا در این روش به صورت زیر به دست می آید:

$$T_{ik} - \int_a^b f(x)\,dx$$

$$= (b-a)\; h_{i-k}^2\, h_{i-k+1}^2 \cdots h_i^2\; \frac{(-1)\,B_{2k+2}}{(2k+2)!}\; f^{(2k+2)}(\xi)$$

B_{2k+2} اعداد برنولی هستند .

6-3 روش هاي انتگرال گيري گوس

در روش های انتگرال گیری نیوتن_کاتز، برای محاسبه انتگرال $\int_a^b f(t)\,dt$ ، قاعده به صورت زیر نوشته می شود

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i\, f(x_i)$$

که درآن x_i ها نقاطی حاصل از تقسیم یکنواخت فاصله $[a,b]$ واین قواعد برای چند جمله ای های تا درجه $n+1$ (معمولا) دقیق بود. در قواعد انتگرال گیری گوس با در نظر گرفتن نقاط مشخص x_i که الزاما هم فاصله نیستند و از تقسیم یکنواخت فاصله انتگرال گیری به دست نمی آیند، می خواهیم قاعده ای با همان تعداد نقاط گره ولی دقیق برای چند جمله ای های تا درجه $2n-1$ بیابیم. به طور دقیق تر با دخالت یک تابع موسوم به تابع وزن $w(x)$ ، می خواهیم داشته باشیم که

$$\int_a^b f(x)\,w(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i\, f(x_i)$$

که برای چند جمله ای های تا درجه $2n-1$ دقیق باشد.

انتگرال گیری گوسی برای محاسبه انتگرال ها روی فواصل متناهی کراندار، یا حتی غیر کراندار مانند $[-\infty,\infty],[0,+\infty]$ غیرقابل کاربرد اند.

تابع وزن w در محاسبه انتگرال $I(f)=\int_a^b f(x)w(x)\,dx$ در شرایط زیر صدق می کند.

۱- الف) $w(x)\geq 0$ روی هر فاصله با پایان یا بی پایان از $[a,b]$ و روی این فواصل انتگرال پذیر است.

۲- ب) همه گشتاور های $\mu_k=\int_a^b x^k w(x)\,dx$ برای $k=0,1,2,\cdots$ وجود دارند و با پایان می باشند.

۳- ج) برای چند جمله ای های $s(x)$ که غیر منفی روی فاصله $[a,b]$ اند شرط

$$\int_a^b w(x)s(x)\,dx=0$$

ایجاب کند $s(x)\equiv 0$.

شرط (۱-الف) از شرایط فوق برای همه توابع $w(x)$ پیوسته و نامنفی روی فاصله $[a,b]$ برقرار است.

شرط (۱-ج) ایجاب می کند که $\int_a^b w(x)\,dx > 0$.

فرض می کنیم که

$$\overline{\Pi}_j = \{ P \mid P(x) = x^j + a_1 x^{j-1} + \cdots + a_j \}$$

که عناصر آن چند جمله ای های نرمال شده (تکین) از درجه j اند.

$$\Pi_j = \{ P \mid \deg ree(P) \le j \}$$

در فضای برداری Π_j ، ضرب و به طور کلی تر در فضای $L^2[a,b]$ ، فضای توابع حقیقی تعریف شده روی فاصله $[a,b]$ که مجذور آنها روی این فاصله انتگرال پذیرند، ضرب اسکالر زیر را تعریف می کنیم .

$$f , g \in L^2 [a , b] \quad ,$$

$$(f , g) = \int_a^b f (x) w (x) g (x) \; d x$$

و همچنین آشکارا داریم:

$$(f , f) = \int_a^b w (x) (f (x))^2 \; d x$$

دو تابع f و g از $L^2 [a , b]$ را متعامد خوانیم هرگاه

$$(f , g) = 0 = \int_a^b f (x) \; g (x) \; w (x) \; d x$$

1–6–3 قضیه

چند جمله ای های $p_j \in \overline{\Pi}_j$ با شرط $j = 0, 1, 2, \cdots$ وجود دارند به طوریکه

$$(p_i , p_k) = 0 \quad , \quad i \neq k$$

این چند جمله ای ها با روابط بازگشتی زیر به صورت یگانه تعیین می شوند. $p_0(x) \equiv 1$

$$p_{i+1}(x) = (x - \delta_{i+1}) p_i(x) - \gamma_{i+1}^2 p_{i-1}(x) \qquad i \geq 0$$

(٦)

که در آن $p_{-1}(x) = 0$ و داریم :

$$\delta_{i+1} = (x p_i , p_i) / (p_i , p_i) \qquad i \geq 0$$

$$\gamma_{i+1}^2 = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ \dfrac{(p_i , p_i)}{(p_{i-1} , p_{i-1})} & i \geq 1 \end{cases}$$

اثبات

روند ساختن p_{i+1} به کمک p_j های قبلی به کمک رابطه (٦) و $p_0(x) \equiv 1$ را روش متعامد سازی (Gram_Schmidt) نیز می نامند. فرض می کنیم حکم برای $j \le i$ برقرار باشد. ثابت می کنیم:

$$(p_{i+1}, p_j) = 0 \qquad , \qquad j \le i$$

و اینکه p_i به صورت یکتا تعیین می شود. برای این منظور فرض می کنیم روابط ارائه شده در احکام قضیه برای $i+1$ برقرار باشند، آنها را برای $j \le i$ ثابت می کنیم .

آشکارا هر چند جمله ای $p_{i+1} \in \Pi_{i+1}$ را به صورت زیر می توان نوشت:

$$p_{i+1}(x) \equiv (x - \delta_{i+1})\, p_i(x) + c_{i-1}\, p_{i-1}(x) + c_{i-2}\, p_{i-2}(x) + \cdots + c_0\, p_0(x)$$

داریم :

$$(p_j , p_k) = 0 \qquad , \qquad j , k \leq i$$

بنا به فرض استقراء روابط ارائه شده (در حکم $(j \leq i)$, $(p_{i+1} , p_j) = 0$) برقرار است اگر و تنها اگر داشته باشیم:

$$(p_{i+1} , p_i) = (x p_i , p_i) - \delta_{i+1} (p_i , p_i) = 0 \qquad (۷)$$

$$(p_{i+1} , p_{j-1}) = (x p_{j-1} , p_i) + c_{j-1} (p_{j-1} , p_{j-1}) = 0 \qquad j \leq i$$

(۸)

با توجه به شرط (۱-ج) آشکارا (p_{j-1} , p_{j-1}) و (p_i , p_i) برای $j \leq i$ غیر صفراند.

زیرا

$$(p_j, p_j) = \int_a^b w(x)(p_j(x))^2 \, dx \qquad i \geq j \geq 0$$

رابطه (۷) بلافاصله از رابطه (٦) به دست می آید که $(p_{i+1}, p_i) = 0$ برقرار باشد و

در صورتی که

$$\delta_{i+1} = \frac{(x p_i, p_i)}{(p_i, p_i)}$$

برابری $(p_{i+1}, p_i) = 0$ حاصل می شود.

اما رابطه (۸) را با توجه به رابطه

$$p_j(x) = (x - \delta_j) p_{j-1}(x) - \gamma_j^2 p_{j-2}(x)$$

که برای $j \le i$ پذیرفته ایم می توان برقرار باشد، به این ترتیب که داریم :

$$(p_j(x), p_i(x)) = (x\,p_{j-1}, p_i) + \delta_j (p_{j-1}, p_i) - \gamma_j^2 (p_{j-2}, p_i)$$

اگر $j \le i$ باشد داریم :

$$(p_j, p_i) = (x\,p_{j-1}, p_i)$$

با قرار دادن در رابطه (۸) نتیجه می شود که

$$(x\,p_{j-1}, p_i) + c_{j-1}(p_{j-1}, p_{j-1}) = 0 = (p_j, p_i) + c_{j-1}(p_{j-1}, p_{j-1})$$

$$c_{j-1} = -\frac{(p_j, p_i)}{(p_{j-1}, p_{j-1})} = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ -\dfrac{(p_i, p_i)}{(p_{i-1}, p_{i-1})} = -\gamma_{i+1}^2 & j = i \end{cases}$$

لذا احکام قضیه ثابت می شوند.

2–6–3 نتیجه

برای هر $p \in \Pi_{n-1}$ داریم:

$$(p, p_n) = 0$$

3–6–3 قضیه

ریشه های x_i ، $i = 1, 2, \ldots, n$ از p_n حقیقی و ساده اند و همه آنها روی فاصله $]a, b[$ قرار دارند.

اثبات

ریشه هایی از $p_n(x)$ را که در داخل $]a, b[$ اند و دارای تکرار فرد می باشند به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_l < b$$

در اینصورت

$$q(x) = \prod_{j=1}^{l} (x - x_j) \in \overline{\Pi}_l$$

اکنون داریم :

$$(p_n, q) = \int_a^b w(x)\, q(x)\, p_n(x)\, dx \neq 0$$

با توجه به اینکه اگر $\deg(q) < n$ ، حاصل ضرب فوق صفر است. لذا با توجه به خاصیت (ج)، ناچارا $l = n$ ، یعنی همه ریشه های معادله $p_n(x) = 0$ ساده اند.

4–6–3 قضیه

ماتریس $n \times n$ ، A برای آرگومان های متمایز t_i ، $i = 1, 2, \ldots, n$ غیر تکین است.

$$A = \begin{bmatrix} p_0(t_1) & \cdots & p_0(t_n) \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n-1}(t_1) & \cdots & p_{n-1}(t_n) \end{bmatrix}$$

اثبات

اگر A تکین باشد، در اینصورت یک بردار $c \neq 0$ به طوری که $c^t A = 0$ باشد، وجود دارد، به طوریکه

$$c = (c_0 , c_1 , \dots , c_{n-1})$$

اگر قرار دهیم :

$$q (x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \; p_i (x)$$

آشکارا $\deg (q) < n$ ، این چند جمله ای دارای ریشه های متمایز $t_n , \dots , t_2 , t_1$ است، زیرا $c^t A = 0$ بنابراین باید داشته باشیم که

$$q (x) \equiv 0$$

یعنی

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_i \; p_i (x) \equiv 0$$

فرض کنیم که l بزرگترین اندیس با شرط $c_l \neq 0$. دراینصورت می توان نوشت:

$$p_l(x) = -\frac{1}{c_l} \sum_{i=0}^{l-1} c_i \, p_i(x)$$

لذا با توجه به اینکه درجه چند جمله ای راست حداکثر $l-1$ و سمت چپ دارای درجه l است، رابطه فوق نمی تواند برقرار باشد. لذا فرض A تکین، نادرست است، یعنی A غیر تکین است.

3–6–5 تذکر

شرط غیر تکین بودن A در قضیه فوق به شرط هار (Harr condition) موسوم است.

دستگاه معادلاتی که ماتریس ضرائب آن در شرط هار صدق کند را دستگاه های چبی چف نامند.

3–6–6 قضیه

الف) فرض می کنیم که $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ریشه های چند جمله ای متعامد $p_n(x)$ باشد و $w_1, w_2, \cdots, w_n$ جواب های دستگاه معادلات غیر تکین زیر باشند.

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \, p_k(x_i) = \begin{cases} (p_0, p_0) & k = 0 \\ 0 & k = 1, 2, \ldots, n-1 \end{cases} \qquad (۹)$$

آنگاه $w_i > 0$ برای $i = 1, 2, \ldots, n$ و همچنین :

$$\int_a^b \omega(x) \, p(x) \, dx = \sum_{i=1}^{n} w_i \, p(x_i) \qquad (۱۰)$$

که برای همه $p \in \Pi_{2n-1}$ برقرار است. اعداد w_i را وزن نامند.

ب) اعداد w_i، x_i با شرط $i = 1, 2, \ldots, n$ به گونه ای باشند که برای همه $p \in \Pi_{2n-1}$ در رابطه (۱۰) صدق کنند دراین صورت x_i ها ریشه های $p_n(x)$ هستند و وزن های w_i جواب معادلات (۹) می باشند .

ج) امکان ندارد که اعداد x_i و w_i ، $i = 1, 2, \ldots, n$ به گونه ای یافت شوند که (۱۰) برای همه $p \in \Pi_{2n}$ برقرار باشند.

اثبات

با توجه به قضیه اخیر ریشه های x_i از p_n حقیقی و متمایزاند. (روی $]a,b[$) بنابراین دستگاه معادلات (۹) بنا به قضیه اخیر دارای جواب یکتاست. یعنی w_i ها به صورت یکتا تعیین می شوند.

فرض می کنیم که $p \in \Pi_{2n-1}$ باشند، می توان نوشت:

$$p(x) \equiv p_n(x)\, q(x) + r(x)$$

که در آن $\deg(q) < n$ و $\deg(r) < n$ ،

لذا

$$q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k\, p_k(x)$$

و

$$r(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k\, p_k(x)$$

اما

$$\int_a^b w(x)\ p(x)\ dx$$

$$= \int_a^b w(x)(\ p_n(x)q(x)+r(x))\,dx$$

$$= (p_n, q)+(r, p_0)$$

$$= \beta_0(p_0, p_0) \qquad (11)$$

از طرف دیگر داریم :

$$\sum_{i=1}^{n} w_i\ p(x_i) = \sum_{i=1}^{n} w_i\ r(x_i)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k \left(\sum_{i=1}^{n} w_i\ p_k(x_i)\right)$$

$$= \beta_0(p_0, p_0) \qquad (12)$$

لذا

$$\xrightarrow{(11),(12)} \quad \int_a^b w(x)\ p(x)\ dx = \sum_{i=1}^{n} w_i\ p(x_i)$$

برای اثبات مثبت بودن w_i ، قضیه زیر را ثابت می کنیم .

3–6–7 قضیه

اگر x_i و w_i با شرط $i = 1, 2, \ldots, n$ به گونه ای باشند که برای هر چند جمله ای $p \in \Pi_{2n-1}$ (۱۰) برقرار باشند، دراین صورت $w_i > 0$ برای $i = 1, 2, \ldots, n$

اثبات

اگر رابطه (۱۰) برای $p \in \Pi_{2n-1}$ برقرار باشد، برای

$$\bar{p}_j = \prod_{\substack{h=1 \\ h \neq j}}^{n} (x - x_k)^2 \in \Pi_{2n-2}$$

نیز برقرار است.

لذا داریم:

$$0 < \int_a^b w(x)\ \bar{p}_j(x)\ dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} w_i\ \bar{p}_j(x_i)$$

$$= w_j \prod_{\substack{h=1 \\ h \neq j}} (x_j - x_h)^2 > 0$$

لذا w_j مثبت است. بنابراین اثبات (الف) کامل است.

برای اثبات (ج) اگر قبول کنیم که w_i ها و x_i ها ، $i = 1, 2, \ldots, n$ به گونه ای باشند که

(۱۰) حتی برای $p \in \Pi_{2n}$ برقرار است، دراین صورت اگر قرار دهیم :

$$\bar{p}(x) = \prod_{j=1}^{n} (x - x_j)^2 \in \overline{\Pi}_{2n}$$

دراین صورت داریم:

$$0 < \int_a^b w(x)\ \bar{p}(x)\ dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} w_i\ \bar{p}\ (x_i)$$

$$= 0$$

لذا به تناقض رسیده ایم. یعنی (ج) از قضیه اثبات شد. برای اثبات (ب) فرض می کنیم که w_i و x_i ، $i = 1, 2, \ldots, n$ به گونه ای باشند که برای $p \in \Pi_{2n-1}$ ، (۱۰) برقرار باشد. توجه می کنیم که x_i ها باید متمایز باشند زیرا در غیراین صورت رابطه (۱۰) برای $n-1$ نقطه x_i برقرار می شد، یعنی این روابط برای چند جمله ای های با درجه $2n-2$ غیر قابل قبول بودند که خلاف فرض است. اما w_i ها باید در معادلات زیر صدق کنند.

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \, p_k(x_i) = \int_a^b w(x) \, p_k(x) \, dx$$

$$= (p_k, p_0) = \begin{cases} (p_0, p_0) & k = 0 \\ 0 & k = 1, 2, \ldots, n-1 \end{cases}$$

یعنی w_i ها جواب دستگاه معادلات (۹) اند.

اکنون ثابت می کنیم که x_i ها برای $i = 1, 2, \ldots, n$ ریشه های $p_n(x) = 0$ می باشند.

اما توجه داریم که اگر $p(x) = p_n(x) \, p_k(x)$ برای $k = 0, 1, \ldots, n-1$ لذا داریم:

$$0 = (p_k, p_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i \, p_n(x_i) \, p_k(x_i) \qquad (۱۳)$$

اگر قرار دهیم

$$c = (w_1 \, p_n(x_1), \ldots, w_n \, p_n(x_n))$$

لذا داریم :

$$A\,c = 0$$

اما دیدیم که A غیر تکین است، لذا

$$c = 0 \quad \Rightarrow \quad p_n(x_i) = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

یعنی x_i ها جواب معادلات $p_n(x) = 0$ و حکم (ب) نیز اثبات شد. ■

قاعده انتگرال گیری را انتگرال گیری گوس نامند :

$$\int_a^b w(x)\, f(x)\, d\,x \approx \sum_{i=1}^{n} w_i\, f(x_i)$$

نقاط x_i را نقاط گوس و w_i ها را وزن های مربوط نامند. وابسته به توابع وزن $w(x)$ نقاط x_i و w_i متفاوت اند، یکی از مهم ترین و در عین حال ساده ترین قواعد انتگرال گیری به کمک تابع $1 \equiv \omega(x)$ و برای فاصله $[a,b] = [-1,1]$ به دست می آید که در آن توابع $p_k(x)$ توابع چند جمله ای لژاندر می باشند که به صورت زیر نیز تولید می شوند :

$$p_k(x) = \frac{k!}{(2k)!} \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

برای $1 \equiv \omega(x)$ توابع چند جمله ای لژاندر در فاصله $[-1,1]$ چند نمونه از نقاط گوس و w_i ها داده شده است.

n	w_i	x_i
1	$w_1 = 2$	$x_1 = 0$
2	$w_1 = w_2 = 1$	$x_2 = -x_1 = 0.577\ 350\ 2692\ \ldots$
3	$w_1 = w_3 = \frac{5}{9}$	$x_3 = -x_1 = 0.774\ 596\ 6692\ \ldots$
	$w_2 = \frac{8}{9}$	$x_2 = 0$
4	$w_1 = w_4 = 0.347\ 854\ 8451\ \ldots$	$x_4 = -x_1 = 0.861\,136\ 3116\ \ldots$
	$w_2 = w_3 = 0.652\ 145\ 1549\ \ldots$	$x_3 = -x_2 = 0.339\ 981\ 0436\ \ldots$
5	$w_1 = w_5 = 0.236\ 926\ 8851\ \ldots$	$x_5 = -x_1 = 0.906\ 179\ 8459\ \ldots$
	$w_2 = w_4 = 0.478\ 628\ 6705\ \ldots$	$x_4 = -x_2 = 0.538\ 469\ 3101\ \ldots$
	$w_3 = \frac{128}{225} = 0.568\ 888\ 8889\ \ldots$	$x_3 = 0$

فصل چهارم

جستجوي صفر توابع و نقاط مينيمم كننده با روش هاي تكراري

1-4 مقدمه

یکی از مهم ترین مباحث در آنالیز عددی و کاربرد های ریاضیات حل معادلات به طور کلی و معادلات چند جمله ای، خطی و غیر خطی، به طور خاص است.

معادلات چند جمله ای به صورت کلی

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$$

نمایش داده می شوند که می دانیم، به جز حالت های خاص و یا درجات پایین، روش عمومی برای تعیین ریشه ها، با تعداد متناهی عمل محاسباتی وجود ندارد.

به جز توابع چند جمله ای معادلات به صورت $f(x) = 0$ که در آن $f : E \to F$ و $F , E \subseteq R$ می باشند، از معادلات مهم اند که در حالت کلی روشی متکی بر تعدادی متناهی عمل محاسباتی برای تعیین جواب آن وجود ندارد. اما حتی در حالت کلی تر $f : E \to F$ که درآن $F , E \subset R^n$ هسنند، نیز تعیین جواب معادله $f(x) = 0$ در حیطه حل های عددی قابل بررسی است، زیرا در حالت کلی روشی متناهی برای تعیین جواب معادلات فوق، جز در حالات خاص وجود ندارد.

معادلات اخیر را می توان به صورت زیر نوشت:

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} = 0$$

که در آن

$$f = (f_1 , f_2 , \cdots , f_n)$$

f_i توابع مولفه f اند.

مساله بسیار مهم دیگری که در ارتباط بسیار نزدیک با حل عددی معادلات از نوع فوق قرار می گیرند، مساله

$$\min_{x \in R^n} h(x)$$

در حالی که $h : D \subseteq R^n \to R$ که برای این منظور می توان مساله را تحت شرایطی به یافتن جواب معادله برداری $\nabla h(x) = 0$ تبدیل کرد.

همچنین حل معادله $f(x) = 0$ نیز می توان به مساله مینیمم سازی تبدیل نمود.

اگر $h(x) = \| f(x) \|^2$ لذا می توان چنین نوشت:

$$\min_{x \in R^n} h(x) = \min_{x \in R^n} \| f(x) \|^2$$

مساله مینیمم سازی توابع $h(x)$ در دو حالت مورد بررسی قرار می گیرد. حالت بدون قید و حالت تحت قید. حالت اخیر با مساله زیر مشخص می شود.

$$\min \; h_0(x) \qquad h_i(x) \le 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m_1$$
$$x \in R^n \qquad h_i(x) = 0 \qquad i = m_1 + 1, \ldots, m$$

2–4 توسعه روش هاي تكراري

فرض کنیم $f : E \to F$ و $F = E = R$ یا R^n در این صورت برای حل معادله

$$f(x) = 0 \qquad (۱)$$

می توان از روش های موسوم به تکراری استفاده کرد. این روش ها بر اساس یک رابطه $x = \varphi(x)$ که در آن $\varphi : E \to E$ شکل می گیرد و به طور دقیق تر با رابطه

$$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (۲)$$

داده می شود. رابطه فوق را یک روش تکراری برای حل مساله (۱) نامند، هرگاه x_0 تخمینی از جواب معادله (۱) باشد و دنباله $\{x_k\}_{k \in N}$ ایجاد شده با رابطه فوق برای تقریب نقطه $\hat{x}$ جواب (۱) به کار رود. اگر $\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = \hat{x}$ روش تکراری (۲) را همگرا و در غیر این صورت روش را واگرا نامند. در واقع برای هر تابع ϕ از E در E نقطه $\tilde{x}$ را یک نقطه ثابت ϕ نامند هرگاه

$$\tilde{x} = \phi(x)$$

باشد. یک روش تکراری برای حل مساله (۱) باید صفر معادله (۱) را به عنوان نقطه ثابت تابع ϕ بپذیرد. ϕ را تابع تکرار نامند. برای یک معادله داده شده (۱) روش های تکراری متفاوتی می توان یافت. این روش ها را گاهی، روش های نقطه ثابت نیز گویند.

برای انتخاب تابع تکرار مناسب، باید به پرسش های زیر جواب مناسب داد.

۱) چگونه یک تابع تکراری ϕ باید در نظر گرفته شود.

۲) تحت چه شرایطی دنباله $x^{(i)}$ همگرایند.

۳) با چه سرعتی دنباله $x^{(i)}$ همگرا می باشند.

در این بخش نحوه یافتن بعضی از روش های تکراری مهم و شرایط همگرایی آنها را ارائه می کنیم.

در بسیاری از موارد از معادله داده شده می توان به طور مستقیم رابطه تکراری را استخراج نمود. این روش ها را معمولا روش های نقطه ثابت گویند.

در واقع با استخراج x از معادله بر حسب تابعی از x تابع به دست آمده دارای نقطه ثابت برابر با جواب معادله است.

مثال 1-2-4

برای معادله $x - \cos x = 0$ رابطه $x^{(i+1)} = \cos x^{(i)}$ یک روش تکراری است.

$$i = 0, 1, 2, \ldots$$

یک روش برای یافتن رابطه تکراری به صورت منظم استفاده از بسط تیلوری تابع f در معادله (۱) به مرکز یک نقطه $x^{(0)}$ در نزدیکی ξ جواب معادله است.

$$f(\xi) = 0$$

$$0 = f(\xi) = f(x^{(0)}) + \frac{f'(x^{(0)})}{1!}(\xi - x^{(0)}) + \frac{f''(x^{(0)})}{2!}(\xi - x^{(0)})^2$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(k)}(x^{(0)})}{k!}(\xi - x^{(0)})^k$$

$$+ \frac{1}{(k+1)!}(\xi - x^{(0)})^{k+1} f^{(k+1)}(x^{(0)} + \theta(\xi - x^{(0)}))$$

اگر در معادله اخیر از جملات حاوی توان های دوم و به بعد $(\xi - x^{(0)})$ صرفنظر کنیم.

معادله زیر را تشکیل می دهیم:

$$0 = f(x^{(0)}) + f'(x^{(0)})(\bar{\xi} - x^{(0)}) \qquad (۳)$$

و اگر در بسط تیلور اخیر، جملات حاوی توان های از دوم به بعد را صرفنظر کنیم، رابطه زیر را می یابیم:

$$0 = f(x^{(0)}) + f'(x^{(0)})(\bar{\xi} - x^{(0)}) + f''(x^{(0)})\frac{(\bar{\xi} - x^{(0)})^2}{2!} \qquad (٤)$$

$\bar{\xi}$ و $\tilde{\xi}$ می توانند در صورت نزدیکی $x^{(0)}$ به ξ تقریب های مناسبی برای ξ باشند.

از رابطه (۳) به دست می آوریم:

$$\bar{\xi} - x^{(0)} = -\frac{f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})}$$

یا

$$\bar{\xi} = x^{(0)} - \frac{f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})} \qquad (٥)$$

از رابطه (٤) به دست می آوریم:

$$\bar{\xi} = x^{(0)} - \frac{f(x^{(0)}) \pm \sqrt{(f'(x^{(0)}))^2 - 2\ f(x^{(0)})\ f''(x^{(0)})}}{f''(x^{(0)})}$$

(٦)

به کمک رابطه (٥) رابطه تکراری زیر استخراج می شود:

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} - \frac{f(x^{(i)})}{f'(x^{(i)})}$$

که آن را روش تکراری نیوتن رافسون نامند و از رابطه (٦) روش تکراری زیر (دو روش تکراری) استخراج می شود.

$$x^{(i+1)} = \phi_{\pm}(x^{(i)})$$

که در آن

$$\phi_{\pm}(x) = x - \frac{f(x) \pm \sqrt{(f'(x))^2 - 2\ f(x)\ f''(x)}}{f''(x)}$$

با تکرار همین روش می توان از بسط تیلور ارائه شده روش های تکراری دیگری نیز به دست آورد.

اما مشکل اینجاست که حل این معادله درجه سوم یا معادلات با درجات بالاتر به سهولت میسر نیست.

بنابراین عملا از توان های بالا و بسط های دقیق تر استفاده نمی شود.

اکنون معادله $f(x) = 0$ را در حالتی که $f : E \to F$ در نظر می گیریم. می توان با فرض اینکه $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ و $x = (x_1, \dots, x_n)$ معادله فوق را به صورت زیر نوشت: ($F = E = R^n$)

$$(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) = 0$$

یا

$$\begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} = 0$$

در اینجا نیز با کاربرد بسط تیلور مرتبه اول f در حول نقطه $x^{(0)}$ می توان رابطه زیر را به دست آورد:

$$0 = f(x^{(0)}) + Df(x^{(0)})(\bar{\xi} - x^{(0)})$$

که در آن $Df(x)$ ماتریس ژاکوبین تابع f در نقطه x است:

$$Df(x) = \begin{bmatrix} {}^t\nabla f_1(x) \\ \vdots \\ {}^t\nabla f_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

هر $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ خود یک بردار به صورت زیر است:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(x) \end{bmatrix}$$

یا

$$Df(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$Df(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{n \times n}$$

نقطه $\bar{\xi}$ تقریبی از ξ جواب معادله $f(x) = 0$ است، اگر $x^{(0)}$ بسیار نزدیک ξ باشد.

اگر قرار دهیم که $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n)$ و $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ آنگاه داریم:

$$\bar{\xi} - x^{(0)} = \begin{bmatrix} \bar{\xi}_1 - x_1^{(0)} \\ \vdots \\ \bar{\xi}_n - x_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

حال از رابطه فوق نتیجه می شود که

$$D f(x^{(0)}) (\bar{\xi} - x^{(0)}) = - f(x^{(0)})$$

و درصورتی که $D f(x^{(0)})$ وارون پذیر باشد، داریم:

$$(\bar{\xi} - x^{(0)}) = - f(x^{(0)})^{-1} f(x^{(0)})$$

$$\xi = x^{(0)} - D f(x^{(0)})^{-1} f(x^{(0)})$$

روش فوق را روش نیوتن نامند که تعمیمی از روش نیوتن رافسون است.

به طور دقیق تر روش زیر را داریم:

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} - (D f(x^{(i)}))^{-1} f(x^{(i)})$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots$$

علاوه بر روش های فوق روش های دیگری مانند تنصیف، روش وتری و نیوتن تعمیم یافته وجود دارند که از آنها نیز صحبت خواهیم نمود.

4- 3 قضيه هاي عمومي همگرايي

در بخش قبل به مساله یافتن تابع تکرار و روش تکراری پرداختیم. در این بخش با فرض اینکه رابطه تکراری $x^{(i+1)} = \phi(x^{(i)})$ را در اختیار داریم، می خواهیم شرایطی را بیابیم که تحت آن شرایط روش تکراری همگرا باشد، به عبارت دیگر با توجه به مقدمه اول این بخش می خواهیم شرایطی را بررسی کنیم که دنباله $\{x^{(k)}\}_{k \in N}$ به ξ جواب معادله مفروض همگرا باشد.

برای این منظور در حالت کلی $F = E = R^n$ با توجه به اینکه $\varphi : E \to E$ لازم است در مورد فاصله هر دو نقطه x و y از R^n صحبت کنیم.

در واقع اگر $\|\cdot\|$ یک نرم دلخواه مثلا نرم اقلیدسی در R^n باشد، دراین صورت $\|x - y\|$ را فاصله x و y نامند. ($d(x, y)$)

از این به بعد قرار می دهیم به جای $x^{(k)}$ از x_k استفاده می کنیم و در صورتی که نیاز باشد درایه های آن را مشخص سازیم، خواهیم داشت:

$$x_k = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$$

با توجه به مفاهیم فوق نقطه x را حد دنباله $\{x_k\}_{k\in N}$ نامیم، هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ یک $N(\varepsilon)$ وجود داشته باشد، به طوریکه

$$\| x_m - x \| < \varepsilon$$

هرگاه $m > N(\varepsilon)$

می توان نشان داد که همگرایی یک دنباله به x نابسته از نرم انتخاب شده است. به خاطر داریم که R^n یک فضای کامل است. لذا هر دنباله کوشی در این فضا همگراست. گوییم $\{x_k\}_{k\in N}$ در معیار کشی صدق می کند، هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ یک $N(\varepsilon)$ بتوان یافت که

$$m, l > N(\varepsilon) \Rightarrow \| x_m - x_l \| < \varepsilon$$

دراین صورت دنباله $\{x_k\}_{k\in N}$ را یک دنباله کشی نامند.

4-3-1 تعریف : اگر ϕ یک تابع تکرار $\varphi : E \to E$ و ξ یک نقطه ثابت برای ϕ باشد.

هرگاه برای همه x_0 های در نظر گرفته شده در $N(\varepsilon)$ ، دنباله تولید شده با رابطه

$$x_{i+1} = \phi(x_i)$$

به ازای یک $p \geq 1$ در رابطه

$$\| x_{i+1} - \xi \| \leq c \| x_i - \xi \|^P$$

برای هر $i \geq 0$ و یک $c > 0$ به طوریکه $0 < c < 1$ در حالت $p = 1$ باشد، صدق کند، دراین صورت روش تکراری با تابع تکرار ϕ را یک روش حداقل از مرتبه p نامند.

2-3-4 قضیه

هر روش تکراری از مرتبه دستکم p به نقطه ξ ، نقطه ثابت ϕ به طور موضعی همگراست. به این معنا که یک همسایگی $N(\varepsilon)$ وجود دارد که برای هر نقطه اولیه x_0 ، در آن دنباله، x_i در این همسایگی اند و به علاوه

$$\lim_{m \to \infty} x_m = \xi$$

اگر $N(\xi) = R^n$ ، دراین صورت همگرایی عمومی (کلی) نامند.

اثبات : تمرین

اگر ϕ یک تابع تکرار و در یک همسایگی ξ نقطه ثابت اش دیفرانسیل پذیر باشد و اگر

$$\phi^{(k)}(\xi) = 0 \qquad k = 1, 2, \ldots, p-1$$

و $\phi^{(p)}(\xi) \neq 0$ دراین صورت داریم:

$$x_{i+1} = \phi(x_i) = \phi(\xi) + \frac{(x_i - \xi)^p}{p!}\phi^{(p)}(\xi) + O(\|x_i - \xi\|^{p+1})$$

دراین صورت نتیجه می شود که

$$\lim_{i \to \infty} \frac{x_{i+1} - \xi}{(x_i - \xi)^p} = \frac{\phi^{(p)}(\xi)}{p!}$$

دراین صورت روش از مرتبه p است و در حالت $p=1$ لازم است که $|\phi'(\xi)| < 1$.

3–3–4 مثال

اگر $E = R$ و ϕ تابع تکرار باشد که روی یک همسایگی $N(\xi)$ از ξ نقطه ثابت اش همگراست، در این صورت اگر $0 < \phi'(\xi) < 1$ همگرایی خطی است و به طور یکنوا به ξ همگرایند. (یعنی از یک سمت ξ به آن نزدیک می شود) و اگر $-1 < \phi'(\xi) < 0$ باشد، دنباله به صورت غیریکنوا به ξ همگراست، یعنی نقاط x_i در طرفین ξ اند و به آن نزدیک می شوند.

4–3–4 مثال

روش نیوتن رافسون یک روش دستکم از مرتبه دو است:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

پس

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

بنابراین

$$\phi'(x) = \frac{f(x)\, f''(x)}{(f'(x))^2}$$

یعنی

$$\phi'(\xi) = 0$$

اما

$$\phi''(\xi) = \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)}$$

الزاما صفر نیست، لذا مرتبه روش نیوتن رافسون است دستکم دو است.

5–3–4 مثال

در حالت خاصی که ξ یک صفر تکراری مرتبه m ، $m > 1$ از f است ، یعنی

$$f^{(\nu)}(\xi) = 0 \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots, m-1$$

دراین صورت f و f' به شکل زیر بیان می شوند:

$$f(x) = (x-\xi)^m g(x) \quad , \qquad g(\xi) \neq 0$$

$$f'(x) = m(x-\xi)^{m-1} g(x) + (x-\xi)^m g'(x)$$

در روش نیوتن_رافسون

$$\phi(x) = x - \frac{f'(x)}{f'(x)} = x - \frac{(x-\xi)\, g(x)}{m\ g(x) + (x-\xi)\ g'(x)}$$

$$\phi'(x) = 1 - \frac{[g(x)+(x-\xi)g'(x)]\,(m\,g(x)+(x-\xi)g'(x))-}{[m\;\;g(x)+(x-\xi)\;\;g'(x)]^2}$$

$$\underline{(x-\xi)\,g(x)[m\,g'(x)+\;\;g'(x)+(x-\xi)\,g''(x)]}$$

در این صورت روش نیوتن_ رافسون در حالت $m > 1$ یک روش از مرتبه دوم نیست بلکه از مرتبه اول است.

$$\phi'(\xi) = 1 - \frac{1}{m} \neq 0$$

اکنون به ارائه چند قضیه مهم برای همگرایی روش های تکراری می پردازیم. در این قضایا ملاحظه می کنیم که ξ جواب معادله $f(x)=0$ نقطه ثابت نگاشت ϕ است و به علاوه در مواردی که ϕ یک تابع انقباضی در حول ξ باشد، قضایای همگرایی ویژه ای وجود دارد.

4–3–6 قضیه

اگر ϕ یک تابع از E در E و $E = R^n$ و ϕ دارای یک نقطه ثابت ξ باشد، یعنی $\phi(\xi) = \xi$ به علاوه اگر

$$S_r(\xi) = \{ z \mid \| z - \xi \| < r \}$$

یک همسایگی نقطه ξ باشد که ϕ یک نگاشت انقباضی روی $S_r(\xi)$ است ، یعنی

$$\| \phi(x) - \phi(y) \| \leq k \| x - y \| \qquad 0 \leq k < 1$$

برای همه $x, y \in S_r(\xi)$ ، در این صورت برای هر $x_0 \in S_r(\xi)$ دنباله ایجاد شده به وسیله $x_{i+1} = \phi(x_i)$ ، $i = 0, 1, 2, \ldots$ دارای خواص زیر است:

الف) $x_i \in S_r(\xi)$ برای $i = 0, 1, 2, \ldots$

ب) داریم:

$$\| x_{i+1} - \xi \| \leq k \| x_i - \xi \| \leq k^{i+1} \| x_0 - \xi \|$$

یعنی $\{ x_i \}$ دستکم به صورت خطی به ξ همگراست.

اثبات

با توجه به خاصیت انقباضی ϕ انجام می شود.

آشکارا رابطه برای $i = 0$ برقرار است ، فرض می کنیم که برای $j = 0, 1, 2, \ldots, i$ برقرار باشد، آن را برای $i+1$ ($j > i$) ثابت می کنیم .

$$\| x_{i+1} - \xi \| = \| \phi(x_i) - \phi(\xi) \| \leq k \| x_i - \xi \|$$
$$\leq k\, k^i \| x_0 - \xi \| \leq k^{i+1} \| x_0 - \xi \|$$

7–3–4 قضیه

اگر $\phi : E \to E$ و $E = R^n$ و ϕ یک تابع تکرار باشد، $x_0 \in E$ ، یک نقطه شروع و

$$x_{i+1} = \phi(x_i) \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

به علاوه یک همسایگی $S_r(x_0)$ به طوریکه

$$S_r(x_0) = \{ x \mid \| x - x_0 \| < r \}$$

از x_0 را در نظر می گیریم و یک ثابت k ، $0 \le k < 1$ وجود داشته باشد که

الف) $\| \phi(x) - \phi(y) \| \le k \| x - y \|$ برای $x, y \in \bar{S}_r(x_0)$

ب) $$\| x_1 - x_0 \| \le \| \phi(x_0) - x_0 \| \le (1-k) r < r$$

دراین صورت داریم:

(۱) $x_i \in S_r(x_0)$

(۲) ϕ دارای دقیقا یک نقطه ثابت ξ است.

به طوریکه $\phi(\xi) = \xi$ و $\xi \in S_r(x_0)$ به علاوه

$$\lim_{i \to \infty} x_i = \xi$$

$$\| x_{i+1} - \xi \| \leq k \| x_i - \xi \| \quad ,$$

$$\| x_i - \xi \| \leq \frac{k^i}{1-k} \| x_1 - x_0 \| \quad ,$$

اثبات

آشکارا رابطه $x_i \in S_r(x_0)$ برای x_1 برقرار است.

(ب) فرض می کنیم رابطه برای $j = 0, 1, 2, \ldots, i$ و $i \geq 1$ برقرار باشد. آن را برای $i+1$ ثابت می کنیم. اما با توجه به (الف) داریم:

$$\begin{aligned} \| x_{i+1} - x_i \| &= \| \phi(x_i) - \phi(x_{i-1}) \| \\ &\leq k \| x_i - x_{i-1} \| \leq k^i \| x_1 - x_0 \| \end{aligned}$$

از طرف دیگر داریم :

$$\begin{aligned} \| x_{i+1} - x_0 \| &\leq \| x_{i+1} - x_i \| + \| x_i - x_{i-1} \| + \cdots + \| x_1 - x_0 \| \\ &\leq (k^i + k^{i-1} + \cdots + 1) \| x_1 - x_0 \| \\ &\leq (k^i + k^{i-1} + \cdots + 1)(1-k) r \\ &= (1 - k^{i+1}) r < r \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\| x_{i+1} - x_0 \| < r \quad , \quad x_{i+1} \in S_r(x_0)$$

برای اثبات (۲) نخست نشان می دهیم که دنباله $\{x_i\}_{i \in N}$ یک دنباله کشی است.

$$\| x_m - x_l \| \leq \| x_m - x_{m-1} \| + \| x_{m-1} - x_{m-2} \| + \cdots + \| x_{l+1} - x_l \|$$
$$\leq k^l (1 + k + k^2 + \cdots + k^{m-1-l}) \| x_1 - x_0 \|$$
$$< k^l \frac{1}{1-k} \| x_1 - x_0 \| < k^l r$$

اکنون اگر ε مقدار ثابت داده شده مثبتی باشد، می توان یک $N(\varepsilon)$ یافت که برای $m, l > N(\varepsilon)$ رابطه $\| x_m - x_l \| < \varepsilon$ برقرار باشد، یعنی دنباله کشی است.

چون $E = R^n$ کامل است، لذا هر دنباله کشی در آن همگراست، یعنی یک ξ وجود دارد

به طوریکه

$$\xi \in S_r(x_0)$$

و داریم :

$$\lim_{i \to \infty} x_i = \xi$$

به علاوه ثابت می کنیم که ξ یک نقطه ثابت نگاشت ϕ است. زیرا :

$$\begin{aligned} \| \phi(\xi) - \xi \| &\leq \| \phi(\xi) - \phi(x_i) \| + \| \phi(x_i) - \xi \| \\ &\leq k \| x_i - \xi \| + \| x_{i+1} - \xi \| \end{aligned}$$

چون $\lim_{i \to \infty} x_i = \xi$ ، لذا داریم:

$$\| \phi(\xi) - \xi \| \leq 0$$

یعنی $\phi(\xi) = \xi$ ، اگر $\hat{\xi}$ یک نقطه ثابت دیگر برای ϕ به طوریکه $\hat{\xi} \in \bar{s}_r(x_0)$ باشد، آنگاه :

$$\left\| \xi - \hat{\xi} \right\| = \left\| \phi(\xi) - \phi(\hat{\xi}) \right\| \leq k \left\| \xi - \hat{\xi} \right\|$$

یعنی

$$\left\| \hat{\xi} - \xi \right\| (1-k) \leq 0$$

بنابراین

$$\xi = \hat{\xi}$$

بالاخره توجه داریم که

$$\left\| \xi - x_l \right\| = \lim_{m \to \infty} \left\| x_m - x_l \right\| \leq \frac{k^l}{1-k} \left\| x_1 - x_0 \right\|$$

همچنین داریم :

$$\left\| x_{i+1} - \xi \right\| = \left\| \phi(x_i) - \phi(\xi) \right\| \leq k \left\| x_i - \xi \right\|$$

4-4 همگرايي روش نيوتن با چند متغير

ديديم براى معادله $f(x)=0$ وقتى $f : R^n \to R^n$ مى توان از روش نيوتن استفاده نمود.
براى كاربرد روش اخير لازم است تابع f در يک همسايگى نقطه ξ جواب معادله، ديفرانسيل پذير باشد. براى توابع از R^n در R^n مفهوم ديفرانسيل پذيرى را يادآورى مى كنيم:
تابع f از R^n در R^n را در نقطه x_0 ديفرانسيل پذير خوانيم، هرگاه يک تبديل خطى A (ماتريس مربعى A) وجود داشته باشد. به طوريكه:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\| f(x) - f(x_0) - A(x - x_0) \|}{\| x - x_0 \|} = 0$$

در اين حالت A همان ماتريس ژاكوبين تابع f است كه با نماد $Df(x)$ نمايش داده مى شود.

لم 1–4–4

اگر $D f(x)$ برای همه x های واقع در یک ناحیه محدب $C_0 \in R^n$ وجود داشته باشد و اگر یک ثابت γ نیز وجود داشته باشد، با شرط

$$\| D f(x) - D f(y) \| \le \gamma \| x - y \| \qquad x, y \in C_0$$

آنگاه برای همه x و y ها در C_0 تخمین زیر برقرار است:

$$\| f(x) - f(y) - D f(y)(x - y) \| \le \frac{\gamma}{2} \| x - y \|^2$$

یادآور می شویم که مجموعه S از R^n را یک مجموعه محدب خوانیم هرگاه برای هر $x, y \in S$ پاره خط

$$[x, y] = \{ z \mid z = \lambda x + (1 - \lambda) y \ ; \ 0 \le \lambda \le 1 \}$$

در S باشد.

اثبات

تابع $\phi : [0,1] \to R^n$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\phi(t) = f(y + t(x-y))$$

با توجه به اینکه f یک تابع دیفرانسیل پذیر فرض شده است ، با کاربرد قاعده زنجیره ای داریم:

$$\phi'(t) = Df(y + t(x-y))(x-y)$$

لذا برای $0 \le t \le 1$ داریم :

$$\begin{aligned} \| \phi'(t) - \phi'(0) \| &= \| (Df(y + t(x-y)) - Df(y))(x-y) \| \\ &\le \| (Df(y + t(x-y)) - Df(y) \| \, \| x-y \| \\ &\le \gamma \, \| t(x-y) \| \, \| x-y \| \\ &\le \gamma \, t \, \| x-y \|^2 \end{aligned}$$

لذا

$$\| \phi'(t) - \phi'(0) \| \leq \gamma \; t \; \| x - y \|^2$$

از طرف دیگر اگر

$$\Delta = f(x) - f(y) - Df(y)(x-y)$$

$$= \phi(1) - \phi(0) - \phi'(0)$$

$$= \int_0^1 \phi'(t)\, dt - \phi'(0)$$

$$= \int_0^1 (\phi'(t) - \phi'(0))\, dt$$

با نرم گیری از طرفین رابطه اخیر داریم :

$$\| \Delta \| = \left\| \int_0^1 (\phi'(t) - \phi'(0)) \, dt \right\|$$

$$\leq \int_0^1 \| (\phi'(t) - \phi'(0)) \| \, dt$$

$$\leq \int_0^1 \gamma t \, \| x - y \|^2 \, dt$$

$$= \gamma \, \| x - y \|^2 \int_0^1 t \, dt$$

$$= \frac{\gamma}{2} \, \| x - y \|^2$$

با توجه به تعریف Δ نتیجه لم را به دست می دهد.

2-4-4 قضیه

اگر $C \subset R^n$ یک مجموعه باز داده شده و C_0 یک مجموعه محدب با شرط $\overline{C}_0 \subset C$ و $f : C \to R^n$ یک تابع دیفرانسیل پذیر برای $x \in C_0$ و پیوسته برای $x \in C$ ، هرگاه برای $x_0 \in C_0$ فرض کنیم ثابت های مثبت r ، α ، β ، γ و h به صورت زیر باشند:

$$S_r(x_0) = \{ x \mid \| x - x_0 \| < r \} \subset C_0$$

$$h = \frac{\alpha \beta \gamma}{2} < 1 \quad , \quad r = \frac{\alpha}{(1-h)}$$

و فرض کنیم که f دارای خواص زیر باشد:

الف) برای هر $x, y \in C_0$ داشته باشیم که

$$\| D f(x) - D f(y) \| \leq \gamma \| x - y \|$$

ب) $Df^{-1}(x)$ وجود داشته باشد و در شرط $\|Df^{-1}(x)\| < \beta$ صدق کند. $x \in C_0$

ج) $\|Df^{-1}(x_0)\, f(x_0)\| < \alpha$

آنگاه داریم :

۱) با شروع از نقطه x_0 ، هر نقطه

$$x_{k+1} = x_k - Df^{-1}(x_k)\, f(x_k) \quad , \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

خوب تعریف می شود و برای $k \geq 0$ ، $x_k \in S_r(x_0)$.

۲) $\lim_{k\to\infty} x_k = \xi$ وجود دارد و در شرط های $\xi \in \bar{S}_r(x_0)$ و $f(x) = 0$ صدق می کنند.

برای هر $k \geq 0$ داریم :

$$\|x_k - \xi\| \leq \alpha \frac{h^{2^k - 1}}{1 - h^{2^k}}$$

اثبات : به اشتوئر مراجعه شود.

يعني بين BFS ها ونقاط راسي تناظر بر قرار است

فرض مي كنيم $\bar{x}$ يك BFS نباشد در اينصورت $\{a_j \mid j \in J\}$ يك مجموعه وابسته خطي است يعني $\sum_{j\in J} \alpha_j a_j = 0$ وجود دارد كه $\alpha \neq 0$

از طرفي داريم $\sum_{j\in J} \alpha_j \bar{x}_j = b$ اولين معادله را در θ ضرب كرده وبا دومي جمع مي كنيم $\sum_{j\in J} a_j(\bar{x}_j + \theta\alpha_j) = b$

براي اينكه $\bar{x} + \theta\alpha$ شدني باشد بايد براي هر $j \in J$ داشته باشيم $\bar{x} + \theta\alpha_j \geq 0$

اگر $\alpha_j > 0$ انگاه $\theta \geq -\frac{x_j}{\alpha_j} < 0$

اگر $\alpha_j < 0$ انگاه $\theta \leq -\frac{x_j}{\alpha_j} > 0$

$$\theta_1 = \begin{cases} \max\left\langle -\frac{x_j}{\alpha_j} \middle| x_j > 0 \right\rangle If \alpha \leq\neq 0 \\ -\infty \quad If \quad \alpha \leq 0 \end{cases}$$

$$\theta_2 = \begin{cases} \min\left\langle -\frac{x_j}{\alpha_j} \middle| x_j < 0 \right\rangle If \alpha \geq\neq 0 \\ +\infty \quad If \quad \alpha \geq 0 \end{cases}$$

فرض مي كنيم $\bar{\theta} = \min\{|\theta_1| \text{ و } |\theta|_2\}$ در اينصورت براي هر $-\bar{\theta} \leq \delta \leq \bar{\theta}$ ، $x(\delta) = \bar{x} + \theta\alpha \geq 0$

فرض مي كنيم $0 < \varepsilon < \bar{\theta}$ در اينصورت با توجه به رابطه فوق $x(\varepsilon) = \bar{x} + \varepsilon\alpha$ و $x(-\varepsilon) = \bar{x} - \varepsilon\alpha$

هردو شدني اند و $\bar{x} = \frac{1}{2}x(\varepsilon) + \frac{1}{2}x(-\varepsilon)$ يعني $\bar{x}$ راسي نيست

فرض كنيم $\bar{x}$ يك جواب شدني پايه x با پايه B ونيز $\bar{x} = \lambda x' + (1-\lambda)x''$ به ازاي $0 < \lambda < 1$ و $x', x'' \in X$

$$\begin{cases} A\bar{X} = b \\ \bar{X} \geq 0 \end{cases}, \begin{cases} AX' = b \\ X' \geq 0 \end{cases}, \begin{cases} AX'' = b \\ X'' \geq 0 \end{cases}$$

- فرض كنيد $A=[B,N]$ و $\overline{X}=\begin{bmatrix}\overline{x_B}\\ x_N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B^{-1}b\\ 0\end{bmatrix}$

$$\begin{pmatrix}\overline{x_B}\\ x_N\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x'_B\\ x'_N\end{pmatrix}+(1-\lambda)\begin{pmatrix}x''_B\\ x''_N\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\overline{x_B}=\lambda x'_B+(1-\lambda)x''_B\\ x_N=\lambda x'_N+(1-\lambda)x''_N\end{cases}$$

- تساوي در حالتي برقرار است كه $x'_N=x''_N=0$
- و

$$\bar{x}=\begin{bmatrix}B^{-1}b\\ 0\end{bmatrix},x'=\begin{bmatrix}x'_B\\ 0\end{bmatrix},x''=\begin{bmatrix}x''_B\\ 0\end{bmatrix}$$

$$B\overline{x_B}=b,Bx'_B=b,Bx''_B=b$$

$$\overline{x_B}=B^{-1}b,x'_B=B^{-1}b,x''_B=B^{-1}b$$

$$\bar{x}=x'=x''=\begin{pmatrix}B^{-1}b\\ 0\end{pmatrix}$$

- پس $\bar{x}$ يك نقطه راسي است .