ریاضی مهندسی

اعداد مختلط :

هر زوج مرتب از اعداد حقیقی را عدد مختلط می گوییم پس مجموعه ی اعداد مختلط که با $\not\subset$ نمایش داده می شود عبارت است از مجموعه ی تمام زوج های مرتب از اعداد حقیقی .

قضیه ی اساسی جبر :

هر چند جمله ای از درجه ی n در میدان اعداد مختلط دارای n ریشه می باشد .

تساوی دو عدد مختلط :

دو عدد مختلط $z_1 = (x_1, y_1)$ و $z_2 = (x_2, y_2)$ را مساوی گوییم اگر و تنها اگر $x_1 = x_2$ و $y_1 = y_2$ باشد .

نکته :

۱- عدد مختلط $z = (x, y)$ را در نظر بگیرید . x قسمت حقیقی z (Re (z) / real (z)) و Y را قسمت موهومی z (Im (z) / Image (z)) گویند .

جمع و ضرب اعداد مختلط :

مجموع و حاصلضرب دو عدد مختلط $z_1 = (x_1, y_1)$ و $z_2 = (x_2, y_2)$ به صورت زیر تعریف می شود .

۱- $z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

۲- $z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$

قضیه : اگر z_1, z_2, z_3 سه عدد مختلط باشند .

۱- $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ **(خاصیت جا به جایی جمع)**

۲- $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ **(خاصیت جا به جایی ضرب)**

۳- $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ **(خاصیت شرکت پذیری جمع)**

۴- $z_1(z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2)z_3$ **(خاصیت شرکت پذیری ضرب)**

۵- $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ **(خاصیت توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع)**

اثبات :

عدد مختلط محض :

هر عدد مختلط با قسمت حقیقی صفر را یک عدد مختلط محض می نامیم و هر عدد مختلط با قسمت موهومی صفر را با قسمت حقیقی آن یکی در نظر می گیریم . مثلاً x = (x , 0) در نتیجه مجموعه ی اعداد حقیقی زیر مجموعه ای از مجموعه ی اعداد مختلط می باشد .

نکته :

۱- جمع و ضرب روی اعداد مختلط ، وقتی که محدود به اعداد حقیقی می شویم تبدیل به همان جمع و ضرب اعداد حقیقی می شود .

مثال :

$$(x,0) + (y,0) = (x + y,0)$$

$$(x,0)(y,0) = (xy - 0,0 + 0) = (xy,0)$$

۲- مجموعه ای از اعداد مختلط گسترشی از اعداد حقیقی می باشد .

قضیه : به ازای هر عدد مختلط $z=(x,y)$ داریم

۱- $z+(0,0)=(x,y)+(0,0)=(x,y)=z$

۲- $z(1,0)=(x,y)(1,0)=(x-0,y+0)=(x,y)=z$

عنصر (0 , 0) عضو خنثی جمع و عنصر (1 , 0) عنصر خنثی ضرب می باشند .

قضیه : به ازای هر عدد مختلط $z=(x,y)$ ، عدد مختلط $(-x,-y)$ را قرینه ی z نامیده و با –z نمایش می دهیم . و همچنین به ازای هر دو عدد مختلط z_1 و z_2 عدد مختلط $z_1+(-z_2)$ را تفاضل z_2 از z_1 نامیده و با z_1-z_2 نمایش می دهیم .

قضیه : به ازای هر عدد مختلط $z=(x,y)\neq 0$ عدد مختلط $(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2})$ را معکوس z نامیده و با $\frac{1}{z}$ نمایش می دهیم و همچنین به ازای هر دو عدد مختلط مانند $z_1,z_2\neq 0$ خارج قسمت z_1 بر z_2 را $\frac{z_1}{z_2}$ نمایش داده که عبارت است از $z_1\cdot\frac{1}{z_2}$

مثال : اثبات کنید $\frac{z_1}{z_1}=1$

$$\frac{z_1}{z_1}=(x,y)\cdot(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2})\Rightarrow(\frac{x^2}{x^2+y^2}-\frac{-y^2}{x^2+y^2},\frac{-xy}{x^2+y^2}+\frac{xy}{x^2+y^2})\Rightarrow(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2},\frac{0}{x^2+y^2}=$$
$$(1,0)=1$$

نکته :

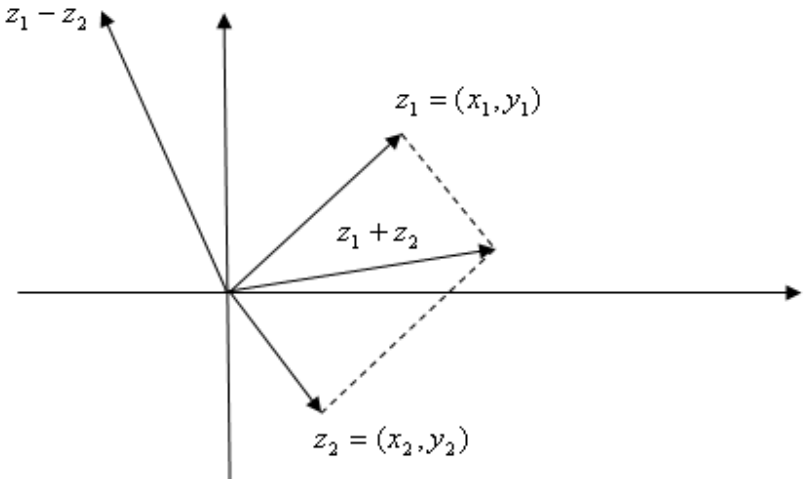
۱- عدد مختلط محض (1 , 0) را یکه ی موهومی می گوییم و با i نمایش می دهیم .

$$i^2=(0,1)(0,1)=(0-1,0+0)=(-1,0)=-1$$
$$(-i)^2=-1$$

پس نتیجه می گیریم که معادله ی $x^2+1=0$ در میدان اعداد مختلط دارای دو ریشه ی i و $-i$ می باشد . مثلاً در معادله ی درجه ی دوم $ax^2+bx+c=0$ اگر $\Delta\leq 0$ بود ریشه ها برابر $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ است حال اگر $\Delta>0$ باشد ریشه ها برابر $\frac{-b\pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ است .

صفحه ی مختلط :

با توجه به تعریف اعداد مختلط به صورت زوج های مرتب (x , y) از اعداد حقیقی می توان هر عدد مختلط را با نقطه ای در صفحه ی xy و یا برداری که ابتدای آن مبدأ مختصات و انتهای آن نقطه ی (x , y) می باشد نمایش داد در این صورت صفحه ی xy را که برای نمایش اعداد مختلط به کار می بریم صفحه ی مختلط می نامیم و محور x ها را محور حقیقی و محور y ها را محور موهومی می نامیم .



نمایش عدد مختلط y و x به صورت $x + iy$:

$$z = (x, y) = x + iy$$

اثبات :

$$z = (x, y) = (x,0) + (y,0) \Rightarrow (x,0) + (0,1)(y,0) = x + iy$$

مثال :

$$(2,3)(4,6) = (8 - 18, 12 + 12) = (-10, 24)$$
$$(2,3i)(4,6i) = 8 + 12i + 12i + 18i^2 = 8 + 24i - 18 = -10 + 24i$$
$$(2,3i) + (4,6i) = 6 + 9i$$

مزدوج اعداد مختلط :

به ازای هر عدد مختلط مانند $z = x + iy$ **، مزدوج z را با** $\bar{z}$ **نمایش داده که برابر** $\bar{z} = x - iy$ **می باشد به لحاظ هندسی** $\bar{z}$ **قرینه ی z نسبت به محور x ها است .**

قضیه : به ازای هر عدد مختلط مانند z داریم .

۱- $\overline{(\bar{z})} = z$

۲- $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$

۳- $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$

برهان :

مثال : $2x + 3y = 5$ **معادله ی یک خط در صفحه ی xy می باشد می خواهیم معادله ی این خط را در صفحه ی مختلط به دست آوریم .**

قضیه : به ازای هر عدد مختلط z_1 **و** z_2 **داریم :**

۱- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$

۲- $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z_1} - \bar{z_2}$

۳- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}$

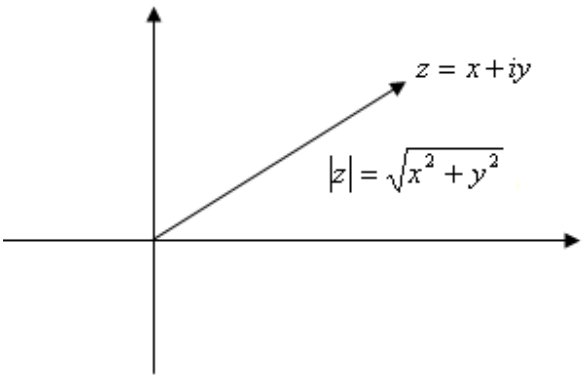
۴- $(z_2 \neq 0)\ \overline{(\frac{z_1}{z_2})} = \frac{z_1}{z_2}$

قدر مطلق اعداد مختلط :

به ازای هر عدد مختلط $z = x + iy$ **قدر مطلق z را** $|z|$ **نمایش می دهیم که برابر می باشد با عدد حقیقی** $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

نکته :

توجه داریم که به لحاظ هندسی قدر مطلق عدد مختلط z طول بردار نمایش دهنده ی عدد مختلط z می باشد .



قضیه : به ازای هر عدد مختلط z داریم :

۱- $|z| \geq 0 \; , \; |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

۲- $|\bar{z}| = |z|$

اثبات :

$$z = x + iy \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\bar{z} = x - iy \Rightarrow |\bar{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2}$$

۳- $|z|^2 = z\bar{z}$

اثبات :

$$|z|^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 \Rightarrow x^2 + y^2$$
$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) \Rightarrow x^2 + y^2$$

۴- $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

اثبات :

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 - y_1y_2 \Rightarrow (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) \Rightarrow$$
$$|z_1z_2| = \sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + y_1x_2)^2} \Rightarrow \sqrt{x_1^{\,2}x_2^{\,2} + y_1^{\,2}y_2^{\,2} - 2x_1x_2y_1y_2 + x_1^{\,2}y_2^{\,2} + y_1^{\,2}x_2^{\,2} + 2x_1y_2x_2y_1} \Rightarrow$$
$$\sqrt{x_1^{\,2}x_2^{\,2} + y_1^{\,2}y_2^{\,2} + x_1^{\,2}y_2^{\,2} + y_1^{\,2}x_2^{\,2}}$$
$$\sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2}} \cdot \sqrt{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}} \Rightarrow \sqrt{(x_1^{\,2} + y_1^{\,2}) \cdot (x_2^{\,2} + y_2^{\,2})} \Rightarrow \sqrt{x_1^{\,2}x_2^{\,2} + y_1^{\,2}y_2^{\,2} + x_1^{\,2}y_2^{\,2} + y_1^{\,2}x_2^{\,2}}$$

۵- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

اثبات :

$$|z_1+z_2|^2 \Rightarrow (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) \Rightarrow (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) \Rightarrow z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2} \Rightarrow |z_1|^2+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+|z_2|^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |z_1|^2+2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})+|z_2|^2 \\ \mathrm{Re}(z) \le \sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow |z_1|^2+2|z_1\overline{z_2}|+|z_2|^2 \Rightarrow |z_1|^2+2|z_1||\overline{z_2}|+|z_2|^2$$

$$|z_1+z_2|^2 \le (|z_1|+|z_2|)^2 \Rightarrow |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$$

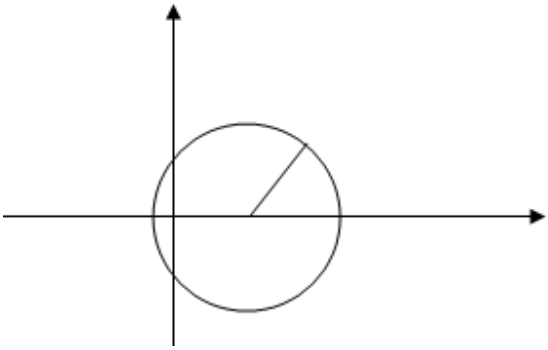
۶- $|z_1-z_2| \ge |z_1|-|z_2|$

اثبات :

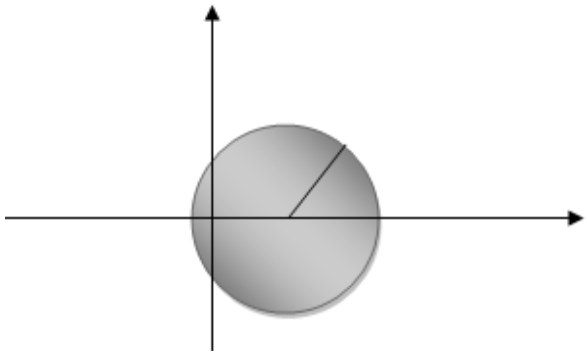
$$|z_1| = |z_1-z_2+z_2| \le |z_1-z_2|+|z_2| \Rightarrow |z_1|-|z_2| \le |z_1-z_2| \Rightarrow |z_1-z_2| \ge |z_1|-|z_2|$$

تمرین : می خواهیم مکان هندسی نقاطی از صفحه ی مختلط را بیابیم که در معادله ی مختلط $|z-2|=3$ صدق کند ؟

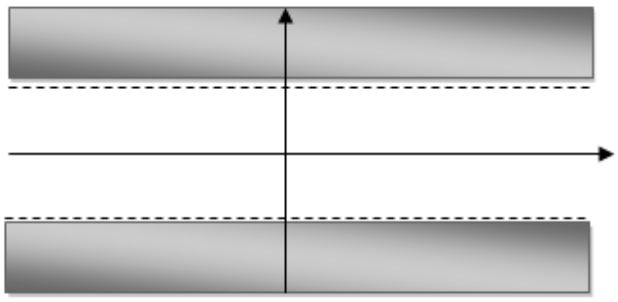
$$|x+iy-2|=3 \Rightarrow |x-2+iy|=3 \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2}=3 \Rightarrow (x-2)^2+y^2=9$$



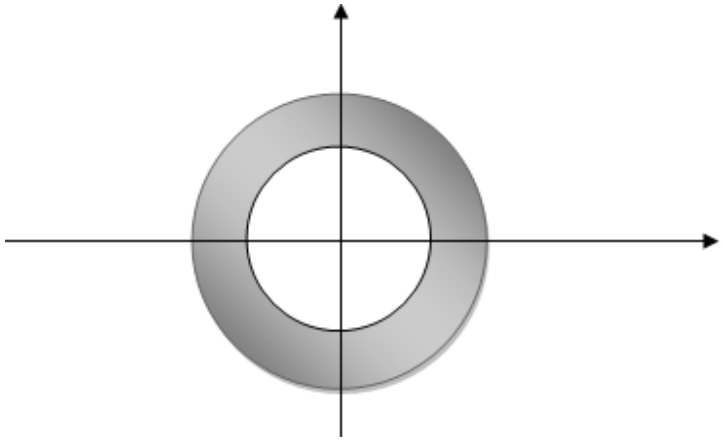
$$|z-2| \le 3 \Rightarrow (x-2)^2+y^2 \le 9$$



$$|\mathrm{Im}(z)| \ge 1 \Rightarrow |y| \ge 1 \Rightarrow \begin{cases} y>1 \\ y<-1 \end{cases}$$



$$3 \le |z| \le 4 \Rightarrow 3 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 4 \Rightarrow 9 \le x^2+y^2 \le 16$$



آوند اعداد مختلط :

عدد مختلط غیر صفر $z = x + iy$ **را در نظر بگیرید منظور از یک آوند z زاویه ای مانند** θ **می باشد به طوری که** $\tan\theta = \frac{y}{x}$ **باشد . توجه داریم که به جای آوند می گوییم یک آوند زیرا که زاویه ی** θ **با تقریب مضاربی از** 2π **معین می شود حال برای این که آوند منحصر به فردی برای عدد مختلط z به دست آوریم** θ **را محدود به بازه ی نیم باز** $(-\pi, \pi]$ **در نظر می گیریم به این مقدار** θ **آوند اصلی z می گوییم و آن را با** $Arg(z)$ **نمایش می دهیم** $-\pi < Arg(z) \le \pi$ **مجموعه ی تمام آوندهای z را با** $\arg(z)$ **نمایش می دهیم**

$$\arg(z) = \{2k\pi + Arg(z); k \in Z\}$$

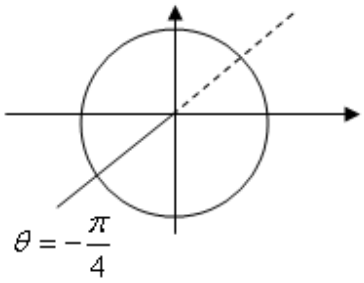
مثال : آوند $z = 1 + i$ **را به دست آورید ؟**

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$-2\pi + \frac{\pi}{4}, 2\pi + \frac{\pi}{4}, 4\pi + \frac{\pi}{4}, \ldots$$

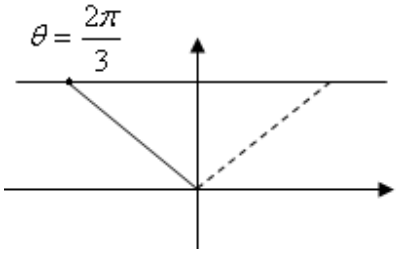
$$z = -1 - i$$

$$\tan\theta = 1$$



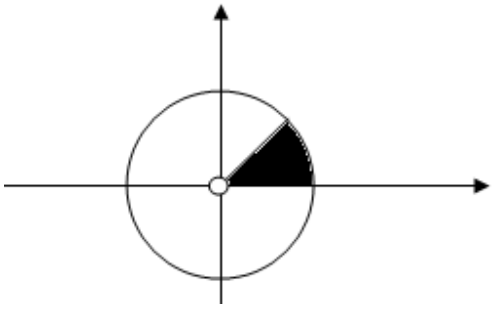
$$z = \frac{-2}{1 + i\sqrt{3}}$$

$$z = \frac{-2(1 - i\sqrt{3})}{1 - 3i^2} \Rightarrow \frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{-1}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$$



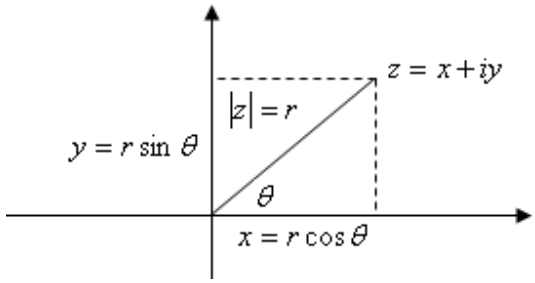
مثال : مکان هندسی مجموعه ی ضلع ها در صفحه ی مختلط که در معادله ی زیر صدق کند را به دست آورید ؟

$$\begin{cases} 0 \le Argz \le \dfrac{\pi}{4} \\ |z| > 0 \end{cases}$$



نمایش قطبی اعداد مختلط :

عدد مختلط غیر صفر $z = x + iy$ **را در نظر بگیرید .**



$$z = r\cos\theta + ir\sin\theta \Rightarrow z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

مثال : عدد مختلط زیر را به صورت قطبی نمایش دهید ؟

$$z = i(1 - i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i) \Rightarrow z = (i - \sqrt{3})(\sqrt{3} + i) \Rightarrow i^2 + 3 + 2i\sqrt{3} \Rightarrow 2 + 2i\sqrt{3}$$ **ربع اول**

$$\tan\theta = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$|z| = \sqrt{4 + 12 = 4}$$

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = 4(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$$

قضیه (دموآور) : به ازای هر عدد صحیح n داریم :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

برهان : ابتدا حکم را برای n های طبیعی ثابت می کنیم .

اثبات به استقرا روی n :

$$n = 1 : (\cos\theta + i\sin\theta)^1 = \cos\theta + i\sin\theta$$

حال فرض می کنیم حکم برای عدد طبیعی n برقرار باشد آن را برای n+1 ثابت می کنیم .

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{n+1} = (\cos\theta + i\sin\theta)^n \cdot (\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow (\cos n\theta + i\sin n\theta)(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow$$
$$\cos n\theta\cos\theta + i\sin\theta\cos n\theta + i\sin n\theta\cos\theta + i^2\sin n\theta\sin\theta \Rightarrow (\cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta) +$$
$$i(\sin\theta\cos n\theta + \sin n\theta\cos\theta) \Rightarrow \cos(n+1)\theta + i\sin(n+1)\theta$$

حکم برای n = 0 واضح می باشد حال فرض می کنیم n عددی صحیح و منفی باشد .

$$m = -n : (\cos\theta + i\sin\theta)^{-m} \Rightarrow \frac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^m} \Rightarrow \frac{1}{\cos m\theta + i\sin m\theta} \Rightarrow \frac{\cos m\theta - i\sin m\theta}{\cos^2 m\theta + \sin^2 m\theta} \Rightarrow \cos m\theta - i\sin m\theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos -n\theta - i\sin -n\theta \\ \cos -n\theta = \cos n\theta \\ \sin -n\theta = -\sin n\theta \end{cases} \Rightarrow \cos n\theta + i\sin n\theta$$

مثال : عدد مختلط زیر را به صورت قطبی حل نمایید ؟

$$z=(1+i)^{100} \Rightarrow \tan\theta=1 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$$

$$|z|=\sqrt{2}$$

$$z=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})^{100} \Rightarrow \sqrt{2}^{100}(\cos 100\frac{\pi}{4}+i\sin 100\frac{\pi}{4}) \Rightarrow \sqrt{2}^{100}(\cos 25\pi+i\sin 25\pi) \Rightarrow z=\sqrt{2}^{100}(-1+0)$$

$$\Rightarrow z=-\sqrt{2}^{100} \Rightarrow z=2^{50}$$

نکته :

برای راحتی کار $\cos\theta+i\sin\theta$ را با $e^{i\theta}$ نمایش می دهیم و از طرفی چون :

$$(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot(\cos\theta_2+i\sin\theta_2) \Rightarrow \cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\cos\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_1\cos\theta_2) \Rightarrow$$

$$\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2) \Rightarrow e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

ریشه های n ام اعداد مختلط :

اگر z عددی مختلط باشد عدد w را یک ریشه ی n ام z می نامیم هر گاه $W^n=z$

قضیه :

اگر z عددی مختلط و $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ باشد در این صورت ریشه های n ام متمایز z فقط n مقدارند که از دستور زیر محاسبه می شود .

$$W_k=\sqrt[n]{r}(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n})$$

برهان : فرض کنید $W=\rho(\cos\phi+i\sin\phi)$ یک ریشه ی n ام عدد z باشد در نتیجه $W^n=z$

$$W^n=\rho^n(\cos\phi+i\sin\phi)^n \Rightarrow \begin{cases}\rho^n(\cos n\phi+i\sin n\phi)\\ r(\cos\theta+i\sin\theta)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\rho^n=r\\ \cos n\phi=\cos\theta \Rightarrow n\phi=2k\pi+\theta \Rightarrow \phi=\frac{2k\pi+\theta}{n}\\ \sin n\phi=\sin\theta\end{cases}$$

$$w=\rho(\cos\phi+i\sin\phi) \Rightarrow w=\sqrt[n]{r}(\cos\frac{2k\pi+\theta}{n}+i\sin\frac{2k\pi+\theta}{n})$$

بنابراین به ازای هر عدد صحیح مانند k یک ریشه ی n ام عدد مختلط z می باشد که فقط به ازای k = 0 , 1 , ... , n-1 ریشه های متمایز به دست می آورد .

تمرین : ریشه های n ام عدد یک را به دست آورید ؟

$$z=1 \qquad |z|=1 \qquad Arg(Z)=0 \qquad 1=\cos 0+i\sin 0$$

$$w_k=\cos\frac{2k\pi+0}{n}+i\sin\frac{2k\pi+0}{n} \qquad k=0,1,\ldots,n-1$$

$$w_0=\cos 0+i\sin 0=1$$

$$w_1=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}=e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

$$w_{n-1}=\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}$$

$$w_n=\cos\frac{2n\pi}{n}+i\sin\frac{2n\pi}{n}=w_0$$

نکته :

$w_1 = w, w_2 = w^2, w_3 = w^3, ..., w_{n-1} = w^{n-1}$

$w_0 = w^n$

ریشه های متمایز n ام عدد یک عبارتند از : $1, w, w^2, ..., w^{n-1}$

$w^{\frac{2\pi i}{n}}$ **را ریشه ی n ام اصلی واحد می گوییم . به لحاظ هندسی عددهای** $1, w, w^2, ..., w^{n-1}$ **برای** $n \geq 3$ **رئوس یک n ضلعی منتظم محاط در دایره ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع یک می باشد .**

مثال : ریشه های دوم عدد ۱- را به دست آورید ؟

$z = -1 \qquad |z| = 1 \qquad \tan\theta = 0$ **در ربع دوم** $\qquad \theta = Arg(-1) = \pi$

$z = \cos\pi + i\sin\pi \Rightarrow w_k = \cos\frac{2k\pi}{2} + i\sin\frac{2k\pi}{2} \qquad k = 0,1$

$w_0 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

$w_1 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$

$(-i)^2 = -1$

مثال : ریشه های معادله ی $z^4 - 1 = i$ **را به دست آورید ؟**

$z^4 = 1 + i \qquad |z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \qquad \tan\theta = \frac{\pi}{4}$

$z^4 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) \Rightarrow w_k = \cos\frac{2k\pi + \frac{\pi}{4}}{4} + i\sin\frac{2k\pi + \frac{\pi}{4}}{4} \Rightarrow w_k = \sqrt[8]{2}(\cos\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{16} + i\sin\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{16})$

$k = 0,1,2,3$

نواحی در صفحات مختصات :

فرض کنید z_3 **نقطه ای در صفحه ی مختلط و** ε **عددی حقیقی و مثبت باشد در این صورت مجموعه های** $\{Z \in C : |Z - z_0| > \varepsilon\}$ ،

$\{Z \in C : |Z - z_0| = \varepsilon\}$ **و** $\{Z \in C : |Z - z_0| < \varepsilon\}$ **به ترتیب مجموعه نقاط خارج ، روی محیط و داخل دایره ای به مرکز** z_0 **و شعاع** ε **را نشان می دهد .**

قرص باز :

فرض کنید z_0 **نقطه ای در صفحه ی مختلط و** ε **عددی حقیقی و مثبت باشد مجموعه ی** $\{Z \in C : |Z - z_0| < \varepsilon\}$ **یعنی مجموعه نقاط داخلی یک دایره به مرکز** z_0 **و شعاع** ε **را قرص باز به مرکز** z_0 **و شعاع** ε **و یا یک همسایگی به مرکز** z_0 **می گویند .**

نقطه ی داخلی مجموعه :

فرض کنید S زیر مجموعه ای از C باشد . نقطه ی z_0 **را یک نقطه ی داخلی مجموعه ی S می نامیم هر گاه S شامل قرص بازی به مرکز** z_0 **باشد .**

نقطه ی خارجی مجموعه :

نقطه ی z_1 **را یک نقطه ی خارجی مجموعه ی S می نامیم هر گاه قرص بازی به مرکز** z_1 **موجود باشد که با مجموعه ی S هیچ اشتراکی نداشته باشد .**

نقطه ی مرزی مجموعه :

نقطه ی z_2 را یک نقطه ی مرزی مجموعه ی S می گوییم هر گاه هر قرص بازی به مرکز z_2 هم با S اشتراک داشته باشد و هم با $C-S$

نکته :

۱- بنابر تعریف قبل ، هر نقطه ی داخلی S ، نقطه ای از S می باشد و هر نقطه ی خارجی S نقطه ای از $C-S$ می باشد اما یک نقطه ی مرزی S ، ممکن است متعلق به S یا $C-S$ باشد .

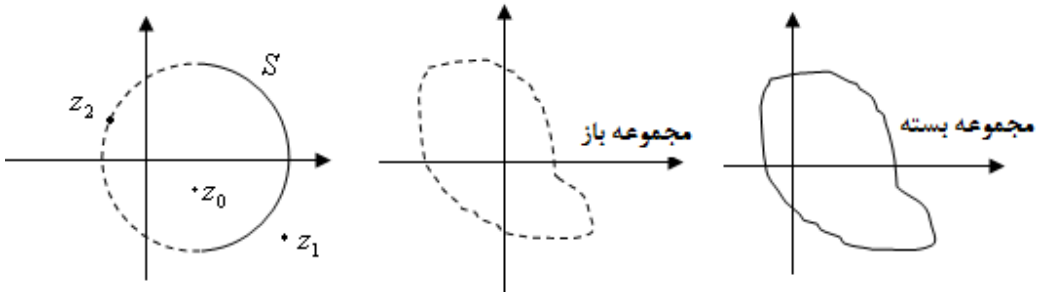
۲- هر نقطه ی C یا یک نقطه ی داخلی S یا نقطه ی خارجی S و یا نقطه ی مرزی S می باشد اما ممکن نیست دو تا از این ویژگی ها را داشته باشد .

زیر مجموعه ی باز :

زیر مجموعه ی S از C را باز می گوییم هر گاه نقطه ی S نقطه ی داخلی S باشد .

زیر مجموعه ی بسته :

مجموعه ی S را بسته می گوییم هر گاه $C-S$ باز باشد .



نکته :

۱- مجموعه نقاط داخل و خارج دایره به مرکز z_0 و شعاع ε ، $\{Z\in C:|Z-z_0|<\varepsilon\}$ و $\{Z\in C:|Z-z_0|>\varepsilon\}$ هر دو مجموعه هایی باز می باشند و متتم های آن ها یعنی $\{Z\in C:|Z-z_0|\geq\varepsilon\}$ و $\{Z\in C:|Z-z_0|\leq\varepsilon\}$ هر دو مجموعه هایی بسته می باشند . و مچنین مجموعه ی $\{Z\in C:|Z-z_0|=\varepsilon\}$ بسته است زیرا متمم آن $\{Z\in C:|Z-z_0|<\varepsilon\}\cup\{Z\in C:|Z-z_0|>\varepsilon\}$ باز می باشد .

به عنوان مثال فرض کنید $z_0\in C$ و $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2$ باشد در این صورت مجموعه ی $\{Z\in C;\varepsilon_1<|z-z_0|<\varepsilon_2\}$ یک مجموعه ای باز می باشد .



و همچنین مجموعه ی $\{Z\in C;\varepsilon_1\leq|z-z_0|\leq\varepsilon_2\}$ مجموعه ای بسته می باشد .

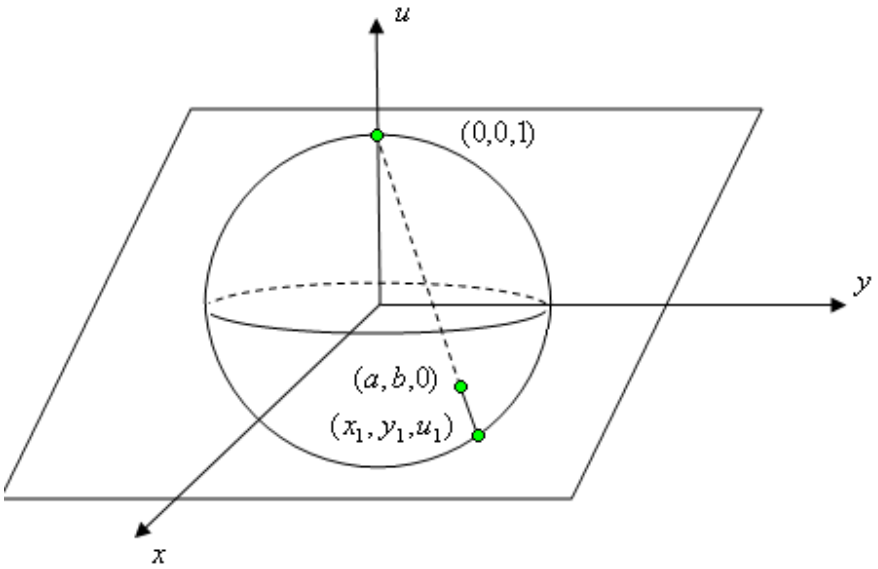


و مجموعه ی $\{Z\in C;\varepsilon_1<|z-z_0|\leq\varepsilon_2\}$ نه باز است نه بسته .



دستگاه اعداد مختلط وسعت یافته :

در صفحه ی مختلط نقطه ی بی نهایت وجود ندارد اما می توان با اضافه کردن یک نقطه به صفحه ی مختلط آن را توسعه داد و دستگاه اعداد مختلط وسعت یافته را به دست آورد . به ازای هر عدد مختلط مانند (a , b) خط مستقیمی در R^3 از نقطه ی (a , b , 0) به نقطه ی (0 , 0 , 1) وصل می کنیم این خط کره ی $x^2+y^2+u^2=1$ را در نقطه ی (0 , 0 , 1) ، در نقطه ی دیگری مانند (x_1,y_1,u_1) قطع می کند به این ترتیب عدد مختلط (a , b) به نقطه ی (x_1,y_1,u_1) از کره نظیر می شود این تنازل تصویر استریوگرافیک نامیده می شود .



این تنازل یک به یک همه ی نقاط صفحه ی مختلط و همه ی نقاط کره به استثنای نقطه ی (۰ , ۰ , ۱) را می پوشاند نقطه ی واقع در بی نهایت از دستگاه اعداد مختلط وسعت یافته را متناظر با نقطه ی (۰ , ۰ , ۱) در نظر می گیریم نقطه ی (۰ , ۰ , ۱) قطب شمال هم نامیده می شود .

حد و پیوستگی :

فرض کنید S زیر مجموعه ای از C باشد در این صورت هر تابع مانند $f : S \to C$ **را یک تابع مختلط می نامیم . توجه کنید که اگر تابع** $f : S \to C$ **یک تابع مختلط باشد آن گاه توابع دو متغیره ی حقیقی** $u : S \to R$ **و** $v : S \to R$ **موجود می باشند که** $f = u + iv$

مثال : فرض کنید تابع $f : C \to C$ **با ضابطه ی** $f(z) = z^2$ **تعریف شده باشد قسمت حقیقی و موهومی آن را تعیین کنید .**

$$f(x,y) = (x+iy)^2 \Rightarrow x^2 - y^2 + i2xy \Rightarrow \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

مثال : فرض کنید توابع u و v هر دو از $R^2 \to R$ **به صورت** $u(x,y) = e^x \cos y$ **و** $v(x,y) = e^x \sin y$ **باشد حال اگر** $z = (x,y)$ **باشد** $f(z)$ **را حساب کنید ؟**

$$f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

تعریف :

فرض کنید n عددی طبیعی و $a_0, a_1, ..., a_n$ **اعدادی مختلط باشند تابع** $P : C \to C$ **را با ضابطه ی** $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n$ **را چند جمله ای می نامیم که اگر k بزرگترین اندیسی باشد که** $a_k \neq 0$ **در این صورت چند جمله ای را از درجه ی k می نامیم . همچنین اگر p و q دو چند جمله ای باشند تابع f با ضابطه ی** $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ **به ازای هر** z **متعلق به** $C = \{z \in C : q(z) = 0\}$ **تعریف شده می باشد و تابع کسری نام دارد .**

حد :

فرض کنید S زیر مجموعه ای از C و $f : S \to C$ **تابعی دلخواه باشد و** z_0 **حضوی از S باشد در این صورت می گوییم حد تابع f وقتی** $z \to z_0$ **برابر** w_0 **است .**

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

۱- هر گاه f در همسایگی محذوفی از z_0 **که داخل S قرار دارد تعریف شده باشد .**

۲- به ازای هر عدد مثبت ε **عددی مثبت مانند** δ **موجود باشد که اگر** $0 < |z - z_0| < \delta$ **آن گاه** $|f(z) - w_0| < \varepsilon$

قضیه :

فرض کنید S زیر مجموعه ای از C باشد و $f : S \to C$ **تابع مختلط باشد و** $z_0 \in C$ **و همچنین فرض کنید** $z_0 = x_0 + iy_0$ **و** $w_0 = u_0 + iv_0$ **باشد**

حال اگر $u : S \to R$ **و** $v : S \to R$ **باشد به ترتیب قسمت های حقیقی و موهومی تابع f باشند آن گاه** $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ **اگر و تنها اگر**

$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = u_0$ **و همچنین** $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$ **فرض کنید f و g دو تابع مختلط باشند و** $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ **و** $\lim g(z) = w_0'$

۱- $\lim_{z \to z_0} f(z) + g(z) = w_0 + w_0'$

۲- $\lim_{z \to z_0} (f(z) - g(z)) = w_0 - w_0'$

۳- $\lim_{z \to z_0} (f(z) \cdot g(z)) = w_0 \cdot w_0'$

۴- $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{w_0}{w_0'} \quad (w_0' \neq 0)$

مثال :

$$\lim_{(x,y) \to (0,1)} (2x + iy^2) = i$$

پیوستگی توابع مختلط :

فرض کنید S زیر مجموعه ای از C و $f : S \to C$ **تابعی مختلط باشد و** $z_0 \in S$ **، در این صورت می گوییم تابع** f **در نقطه ی** z_0 **پیوسته است هر گاه :**

۱- f **در همسایگی از** z_0 **که داخل S قرار دارد تعریف شده باشد .**

۲- $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

تعریف :

فرض کنید S زیر مجموعه ای از C و $f : S \to C$ **تابعی مختلط باشد می گوییم** f **بر S پیوسته است هر گاه در هر نقطه از S پیوسته باشد .**

مثال : نشان دهید تابع $f(z) = \begin{cases} \frac{z}{z'} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}$ **در** $z = 0$ **پیوسته نیست ؟**

$$\begin{cases} z = x + iy \\ z' = x - iy \end{cases} \Rightarrow \frac{z}{z'} = \frac{x + iy}{x - iy}$$

روی محور x ها به $z = 0$ **نزدیک می شویم .** ($y = 0$)

$$\lim_{z \to 0} \frac{z}{z'} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$$

روی محور y ها به $z = 0$ **نزدیک می شویم** ($x = 0$)

$$\lim_{z \to 0} \frac{z}{z'} = \lim_{y \to 0} \frac{iy}{-iy} = -1$$

پس تابع f در $z = 0$ دارای حد نمی باشد در نتیجه پیوسته نمی باشد .

مشتق و توابع تحلیلی :

فرض کنید $D \subset C$ و $f : D \to C$ تابعی دلخواه باشد و $z_0 \in D$ در این صورت می گوییم f در z_0 مشتق پذیر است هر گاه :

۱- f در همسایگی از z_0 که داخل **D** قرار دارد تعریف شده باشد .

۲- $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ موجود باشد .

اگر تابع f در نقطه ی z_0 مشتق پذیر باشد حد مذکور در قسمت ۲ را مشتق تابع f در نقطه ی z_0 می نامیم و با $f'(z_0)$ یا $\left.\frac{df(z)}{dz}\right|_{z=z_0}$ تمایز می هیم .

مثال : اگر $f(z) = z^2$ مشتق آن را در $z_0 \in C$ به دست آورید ؟

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \Rightarrow \lim_{z \to z_0} \frac{z^2 - {z_0}^2}{z - z_0} \Rightarrow \lim_{z \to z_0} (z + z_0) = 2z_0$$

نکته :

یک روش دیگر به دست آوردن مشتق به صورت زیر می باشد .

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

مثال : نشان دهید تابع f با ضابطه ی $f(z) = \bar{z}$ در هیچ نقطه ای مشتق پذیر نیست ؟

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\overline{z_0 + h} - \overline{z_0}}{h} \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{\overline{z_0} + \bar{h} - \overline{z_0}}{h} \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{\bar{h}}{h} \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{x - iy}{x + iy} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \to -1 \\ y = 0 \to 1 \end{cases}$$

قضیه :

فرض کنید f و g دو تابع باشند که در نقطه ی z_0 مشتق پذیر می باشند .

۱- $f + g$ در z_0 مشتق پذیر است و $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$

۲- $f - g$ در z_0 مشتق پذیر است و $(f - g)'(z_0) = f'(z_0) - g'(z_0)$

۳- $f \cdot g$ در z_0 مشتق پذیر است و $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0)$

۴- اگر $g(z_0) \neq 0$ و $\frac{f}{g}$ مشتق پذیر است و $\frac{f}{g}(z_0) = \frac{f'(z_0) \cdot g(z_0) - f(z_0) \cdot g(z_0)}{g^2(z_0)}$

اگر تابع f در نقطه ی z_0 مشتق پذیر باشد آن گاه در z_0 پیوسته است .

قاعده ی زنجیره ای :

اگر تابع f در نقطه ی z_0 و g در نقطه ی $w_0 = f(z_0)$ مشتق پذیر باشد آن گاه تابع $F = fog$ در z_0 مشتق پذیر است و مشتق آن برابر است با

$$F'(z_0) = g'(f(z_0)) f'(z_0)$$

قاعده ی هوپیتال :

فرض کنید توابع f و g در z_0 مشتق پذیر باشند و $f(z_0)=g(z_0)=0$ در این صورت اگر $g'(z_0)\neq 0$ آن گاه :

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}\Rightarrow \lim_{z\to z_0}\frac{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\frac{g(z)-g'(z_0)}{z-z_0}}\Rightarrow\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

روابط کشی – ریمن :

فرض کنید تابع مختلط $f=u+iv$ در نقطه ی $z_0=x_0+iy_0$ مشتق پذیر باشد در این صورت کلیه ی مشتقات پاره ای مرتبه ی اول u و v در نقطه ی (x_0,y_0) موجود می باشند و علاوه بر این $\begin{cases}u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0)\\u_y(x_0,y_0)=v_x(x_0,y_0)\end{cases}$ و همچنین

$$f'(z_0)=u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0)-iu_y(x_0,y_0)$$

اثبات :

۱- فرض کنید $f=u(x,y)+iv(x,y)$ و همچنین فرض کنید z در امتداد خط $y=y_0$ به z_0 میل می کند .

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\Rightarrow\lim_{x\to x_0}\frac{u(x,y_0)+iv(x,y_0)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)}{x-x_0}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{u(x,y_0)-u(x_0,y_0)}{x-x_0}+i\lim_{x\to x_0}\frac{v(x,y_0)-v(x_0,y_0)}{x-x_0}=u_x+iv_x$$

۲- حال فرض می کنیم z روی خط $x=x_0$ به z_0 میل می کند .

$$\lim_{y\to y_0}\frac{u(x_0,y)+iv(x_0,y)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)}{iy-iy_0}\Rightarrow\lim_{y\to y_0}\frac{u(x_0,y)-u(x_0,y_0)}{i(y-y_0)}+i\lim_{y\to y_0}\frac{v(x_0,y)-v(x_0,y_0)}{i(y-y_0)}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{i}u_x+v_y\Rightarrow\begin{cases}i^{-1}u_y+v_y\\ i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\\ i^{-1}=\cos(-\frac{\pi}{2})+i\sin(-\frac{\pi}{2})=-i\end{cases}\Rightarrow -iu_y+v_y\Rightarrow v_y-iu_y$$

از ۱ و ۲ نتیجه می شود .

$$\begin{cases}u_x=v_y\\u_y=-v_x\end{cases}$$

نکته :

معادلات فوق را معادلات کشی – ریمن می گوییم که شرط لازم ولی غیر کافی برای وجود مشتق می باشد .

مثال : ثابت کنید تابع $f(z)=|z|^2$ فقط در نقطه ی صفر مشتق پذیر می باشد .

$$\lim_{z \to z_0} \frac{|z|^2 - |z_0|^2}{z - z_0} \Rightarrow \begin{cases} \lim \frac{|z|^2 - 0}{z - 0} \Rightarrow \lim \frac{z\bar{z}}{z} \Rightarrow \lim \bar{z} = 0 \\ |z|^2 = z\bar{z} \end{cases} \quad \begin{matrix} z \to z_0 \\ z \to z_0 \end{matrix}$$

$$f(z) = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = x^2 + y^2$$

$$u(x,y) = x^2 + y^2 \qquad v(x,y) = 0 \qquad \begin{cases} u_x = 2x \\ u_y = 2y \\ v_x = 0 \\ v_y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_x = v_y \Rightarrow 2x = 0 \\ u_y = -v_x \Rightarrow 2y = 0 \end{cases}$$

چون از تساوی های $u_y = 0$ و $v_x = 0$ نتیجه می شود $x = 0$ و $y = 0$ پس تابع f در هیچ نقطه ای جز $z = 0$ مشتق پذیر نمی باشد .

تعریف :

فرض کنید تابع مختلط $f = u + iv$ در قرص باز $\begin{cases} |z - z_0| < \delta \\ z_0 = x_0 + iy_0 \end{cases}$ تعریف شده باشد اگر کلیه ی مشتقات پاره ای مرتبه ی اول u و v نسبت به x و y در قرص باز $|z - z_0| < \delta$ موجود باشد و همچنین در نقطه ی (x_0, y_0) پیوسته باشند و در روابط کشی – ریمن نیز صدق کنند آن گاه تابع f در نقطه ی z_0 مشتق پذیر می باشد و همچنین $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)$

مثال : مشتق پذیری تابع $f(z) = z\,\mathrm{Re}(z)$ را در صفحه مختلط بررسی کنید ؟

$$\begin{cases} z = x + iy \\ z = x \end{cases} \Rightarrow (x + iy)x = x^2 + ixy \Rightarrow \begin{cases} u = x^2 \\ v = xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_x = 2x \\ u_y = 0 \\ v_x = x \\ v_y = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = x \Rightarrow x = 0 \\ 0 = -y \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

در نتیجه تابع فقط در نقطه ی (0 , 0) مشتق پذیر است .