مدولهای انژکتیو

تمرین صفحه ۱۲۶ فصل ۹

۱۵) فرض کنید R حلقه باشد. ثابت کنید هر R-مدول انژکتیو است اگر و تنها اگر هر R-مدول بروژکتیو باشد.

Proof: $\Leftarrow$ کافی است ثابت کنیم هر R-مدول انژکتیو باشد. فرض می‌کنیم M یک R-مدولی باشد که هر R-مدول بروژکتیو است. می‌دانیم که هر R-مدول M را می‌توان به صورت $M \cong F/K$ نوشت که F یک R-مدول آزاد است و K یک زیرمدول F است. حال دنباله دقیق کوتاه $0 \to K \to F \to M \to 0$ را در نظر می‌گیریم. از آنجایی که فرض کردیم هر R-مدول بروژکتیو است پس F انژکتیو است و لذا طبق قضیه ۵ فصل ۸ (شرایط معادل برای انژکتیو) این دنباله دقیق split است و لذا M نیز یک R-مدول projective است.

$\Rightarrow$ کافی است ثابت کنیم هر R-مدول بروژکتیو باشد هر R-مدولی را می‌توان به صورت M انژکتیو است.

می‌دانیم که هر دنباله دقیق کوتاه به صورت $0 \to M \to N \to K \to 0$ split است.

از آنجایی که فرض کردیم هر R-مدول بروژکتیو است لذا K یک R-مدولی بروژکتیو است و لذا هر دنباله دقیق کوتاه به فرم $0 \to K \to N \to M \to 0$ باید split باشد و بنابراین M یک R-مدول انژکتیو است.

□

مدولهای کدکیدار

تمرین صفحه ۱۳۲ فصل ۱۵

۱) فرض کنید M یک R-مدول باشد. ثابت کنید M یک R-مدول کدکیدار است $\Leftrightarrow$ R-مدول $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ انژکتیو باشد.

Proof: $\Rightarrow$ می‌دانیم M یک R-مدول کدکیدار است پس M را می‌توان به صورت F/K نوشت که F یک R-مدول آزاد است و K یک زیرمدول F است. حال دنباله دقیق کوتاه $0 \to K \to F \to M \to 0$ را در نظر می‌گیریم. از آنجایی که $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ یک فانکتور پادهمورفیسم است (قضیه ۱ فصل ۱۴) دنباله دقیق $0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to 0$ را خواهیم داشت.

حال $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R -, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ ترکیب دو فانکتور دوضابطه است پس $M \otimes_R -$ انژکتیو است $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ دوضابطه است پس $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R -, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ یک فانکتور هموار است. از طرفی $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ یک $\mathbb{Z}$-مدول انژکتیو است پس این حکم برقرار است.

$\Rightarrow$ می‌خواهیم ثابت کنیم $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ انژکتیو باشد، پس M یک R-مدولی کدکیدار است.

می‌خواهیم دنباله دقیق $0 \to N \to K$ را در نظر بگیریم که N و K دلخواه باشند. می‌دانیم $0 \to M \otimes_R N \to M \otimes_R K$ دقیق است برای اینکار کافی است دنباله $0 \to M \to N \to K \to 0$ دقیق باشد.

لم: دنباله $0 \to M \to N \to K \to 0$ دقیق است اگر و تنها اگر دنباله زیر از $\mathbb{Z}$-همریختی‌ها دقیق باشد.

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to 0$$

(۲)

از آنجایی که $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,Q/\mathbb{Z})$ انژکتیو است R-مدول است و $0 \to N \xrightarrow{\varphi} K$ دقیق است پس داریم حواصل است

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}_R(K, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,Q/\mathbb{Z})) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(N, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,Q/\mathbb{Z})) & \longrightarrow & 0 \quad \text{exact} \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R K, Q/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N, Q/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0 \quad \text{exact} \end{array}$$

لذا نشان دادیم که: دنباله $0 \to M \otimes_R N \to M \otimes_R K$ دقیق است پس دنباله $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R K, Q/\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N, Q/\mathbb{Z}) \to 0$ دقیق است و بنابراین طبق تعریف گفته شده

دنباله $0 \to M \otimes_R N \to M \otimes_R K$ دقیق است. پس بنابراین M تخت است.

برهان لم: اگر $M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} K \to 0$ دقیق باشد چون $\mathbb{Z}/Q$ انژکتیو $\mathbb{Z}$-مدول است دنباله را دقیق حواصل بود.

پس برعکس را ثابت می‌کنیم.

قضیه: دنباله $0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K, Q/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\overline{\beta}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, Q/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\overline{\alpha}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, Q/\mathbb{Z}) \to 0$ دقیق باشد آنگاه دنباله $M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} K \to 0$ دقیق است.

(اثبات: $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,Q) \neq 0$ نکته: M غیر صفر آزاد)

I) $\ker\beta = \mathrm{Im}\alpha$ (برهان طرفین): گیریم $x \in \ker\beta$ باشد طوری که $x \neq 0$.

$$x \in \ker\beta \Rightarrow \beta(x) = 0 \xrightarrow{\ker\beta \subseteq M} 0 \neq x \in M \Rightarrow \exists f: M \xrightarrow{R\text{-hom.}} Q/\mathbb{Z} \;;\; f(x) \neq 0.$$

$$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, Q/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\overline{\beta}\ \text{epi}} \exists g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, Q/\mathbb{Z}) \;;\; f = \overline{\beta}g \Rightarrow f = g\beta$$

$$\Rightarrow f(x) = g\beta(x) \xrightarrow{f(x) \neq 0} g\beta(x) \neq 0 \xrightarrow{\beta\alpha = 0} g(0) \neq 0 \quad \text{ولذا } \ker\beta \subseteq \mathrm{Im}\alpha$$

II) $\mathrm{Im}\alpha \subseteq \ker\beta$.

انتهای اثبات قضیه: $\mathrm{Im}\alpha \subseteq \ker\beta$ یعنی $\beta\alpha(x) = 0$ یعنی $\alpha(x) \in \ker\beta$ برای هر $x \in M$ یک R-همریختی g داریم که $g\alpha(x) \neq 0$ پس $\alpha(x) \notin \ker\beta$ لذا $x \in M$ وجود دارد.

$$\exists f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K, Q/\mathbb{Z}) \;;\; f\beta\alpha(x) \neq 0 \Rightarrow \overline{\alpha}\overline{\beta}f(x) \neq 0 \Rightarrow \overline{\alpha}\overline{\beta}f \neq 0$$

$\mathrm{Im}\alpha \subseteq \ker\beta$ (I) است پس بنابراین دقیق بودن دنباله $\overline{\alpha}\overline{\beta} = 0$ برقرار است و این تناقض با دقیق بودن دنباله داشتن است.

$\ker\beta \subseteq \mathrm{Im}\alpha$: حال برای اثبات این قضیه بعکس ثابت می‌کنیم

$y \notin \mathrm{Im}\alpha$ یک $y \in \ker\beta$ گزینه‌ای باشد که

$$y \notin \mathrm{Im}\alpha \Rightarrow 0 \neq y + \mathrm{Im}\alpha \in N/\mathrm{Im}\alpha \longrightarrow \exists g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N/\mathrm{Im}\alpha, Q/\mathbb{Z}) \;;\; g(y + \mathrm{Im}\alpha) \neq 0$$

حال داریم $\pi: N \longrightarrow \frac{N}{\mathrm{Im}\alpha}$ لذا R-همریختی g' را ترکیب می‌کنیم. $g' = g \circ \pi$ ولذا

$g'(y) \neq 0$ زیرا $g' \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, Q/\mathbb{Z})$ ارعاج کنیم.

$g(y) = g(\beta(y)) \le g(y + Im\alpha) \neq 0 \Rightarrow g'(y) \neq 0 \Rightarrow \forall y \in ker\beta \; ; \; y \notin Im\alpha \quad g'(y) \neq 0$ (۳)

حال اگر $y \in Im\alpha \Rightarrow g'(y) \le g(\beta(y)) \le g(y + Im\alpha) \overset{y \in Im\alpha}{=} g(0) \le 0 \Rightarrow g'(Im\alpha) \le 0$ زیرا $g'(Im\alpha) = 0$

$\Rightarrow g'o\alpha \le 0 \Rightarrow 0 = g'o\alpha \le \tilde{\alpha} g' \Rightarrow g' \in ker\tilde{\alpha} = Im\tilde{\beta} \Rightarrow g' \in Im\tilde{\beta}$

$\Rightarrow \exists h \in Hom_{\mathbb{Z}}(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \; ; \quad g' = \tilde{\beta}h \Rightarrow g' \le h o \beta \overset{y \in M}{\Rightarrow} g'(y) = h o \beta(y)$

زیرا $g'(y) \neq 0$ در حالی که چون $y \in ker\beta$ لذا $\beta(y) \le 0$ و لذا فرض خلف کامل است و حکم برقرار است پس

$P \Rightarrow Im\alpha \le ker\beta$

$P \Leftarrow ker\beta \le Im\alpha$

$Im\beta \le K$ (M)

از آنجایی که $Im\beta \le K$ و نیز $K \le Im\beta$.

برهان خلف: فرض کنیم $x \in K$ که $x \notin Im\beta$ لذا حاصل رابطه

$x \notin Im\beta \Rightarrow x + Im\beta \neq 0$ and $0 \neq x + Im\beta \in K/Im\beta \Rightarrow \exists g \in Hom_{\mathbb{Z}}(K/Im\beta, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$;

$g(x + Im\beta) \neq 0$ (*) ; Consider $\rho : K \longrightarrow K/Im\beta$

Now, define: $g' = g o \rho \Rightarrow g' \in Hom_{\mathbb{Z}}(K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$

حال اثبات می‌کنیم $g'(x) \neq 0$ زیرا

$g'(x) = g o \rho(x) = g(x + Im\beta) \neq 0 \Rightarrow g'(x) \neq 0$ (**)

We claim that $g'(Im\beta) = 0$, since, if $z \in Im\beta \Rightarrow z + Im\beta = 0$

and $g'(z) \le g o \rho(z) \le g(z + Im\beta) \le g(0) \le 0$

$\Rightarrow g'(Im\beta) \le 0 \Rightarrow g' o \beta = 0 \Rightarrow \tilde{\beta} g' = 0 \Rightarrow g' \in ker\tilde{\beta} \xrightarrow[1-1]{\tilde{\beta}} g' \le 0$

$\Rightarrow g' = 0$ a contradiction because by (**) $g'(x) \le 0$

و لذا فرض خلف باطل است بنابراین $Im\beta \le K$ و بنابراین اثبات کامل می‌شود.

(Y)

① فرض کنید M، R-مدول راست باشد. اگر برای هر ایده‌آل چپ دلخواه I از R، دنباله

$$0 \longrightarrow M \otimes_R I \longrightarrow M \otimes_R R$$

دقیق باشد ثابت کنید M، تخت است.

Proof: با برخی از جبر خطی راست تان (تنسور) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$، R-مدولی از کتیو است. با استفاده از قضیه بیر، تخت I ایده‌آل چپ دلخواهی از R، همریختی $\varphi: I \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ دلخواه باشد نشان می‌دهیم این همریختی تحمیل قوتسیع به کل R است

$$I \trianglelefteq R \Rightarrow 0 \longrightarrow I \longrightarrow R \quad \text{exact}$$

$$\Rightarrow 0 \longrightarrow M \otimes_R I \longrightarrow M \otimes_R R \quad \text{exact} \quad \text{Since } \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \text{ is injective } \mathbb{Z}\text{-module}$$

The sequence

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R I, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0 \quad \text{is exact} \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong & & \\ \mathrm{Hom}_R(R, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(I, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) & \longrightarrow & 0 \quad \text{is exact} \end{array}$$

لذا چون دنباله $\mathrm{Hom}_R(R, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(I, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \longrightarrow 0$ دقیق است پس است و لذا φ قابل توسیع است. و بنابراین $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ ازه کتیو است.

حل سوال ۳ در کتاب اندرسون صفحه ۲۲۸

---

② سئوال جایزی: اگر W یک $(R-S)$-دومدول و N یک S-مدول چپ باشد ثابت کنید اگر W, N تخت به ترتیب S-مدول چپ تخت، R-مدول چپ تخت باشد آنگاه $W \otimes_S N$ یک R-مدول چپ تخت است

Proof: $W \otimes_S N$، R-مدول چپ است کافیست دنباله دقیق دلخواه $0 \longrightarrow M \longrightarrow K$ را در نظر بگیریم

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow K \quad \text{exact} \xrightarrow[\text{Flat}]{\otimes W} 0 \longrightarrow M \otimes_R W \longrightarrow K \otimes_R W \quad \text{is exact}$$

دنباله‌ای دقیق است

حال چون $M \otimes_R W$، S-مدول چپ تخت است و N، S-مدول چپ تخت است لذا دقیق بودن دنباله ① و لازم

$$0 \longrightarrow M \otimes_R W \longrightarrow K \otimes_R W \quad \text{exact of } S\text{-modules} \xrightarrow[\text{Flat}]{\otimes N} 0 \longrightarrow (M \otimes_R W) \otimes_S N \longrightarrow (K \otimes_R W) \otimes_S N \quad \text{is exact}$$

از آنجایی که ⊗ شرکت پذیر است داریم $(M \otimes_R W) \otimes_S N \cong M \otimes_R (W \otimes_S N)$، $(K \otimes_R W) \otimes_S N \cong K \otimes_R (W \otimes_S N)$

و بنابراین دنباله $0 \longrightarrow M \otimes_R (W \otimes_S N) \longrightarrow K \otimes_R (W \otimes_S N)$ دقیق است و لذا حکم برقرار است

③ $J(\mathbb{Z}_n)$ را محاسبه کنید.

برهان: ابتدا ایده آلهای $\mathbb{Z}_n$ را محاسبه می‌کنیم. برای این کار از قضیه تناظر استفاده می‌کنیم.

*قضیه: تناظر:

اگر M و N R-مدول باشند $\varphi: M \xrightarrow{R\text{-ه}} N$ هر یک‌ریختی پوشا باشد. در این صورت تناظری یک‌به‌یک بین زیرمدولهای M شامل $\ker\varphi$ و زیرمدولهای N وجود دارد. که اگر A و B زیرمدولهای M شامل $\ker\varphi$ و β متناظر با A و B زیرمدولهای N باشند آنگاه $\varphi(A) = B$ و $\varphi(K) = \beta(K)$ تابع $\varphi: A \longrightarrow B$ تناظر را برقرار می‌کند.

گیریم $\varphi: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ $k \longmapsto \bar{k}$ لذا φ یک $\mathbb{Z}$-هم‌ریختی پوشاست و $\ker\varphi = n\mathbb{Z}$

طبق قضیه تناظر کامیت زیرمدولهای $\mathbb{Z}$ شامل $n\mathbb{Z}$ را برابر آن در $\mathbb{Z}_n$ و φ را روی آن محاسبه کنیم.

اما ایده‌آلهای $\mathbb{Z}$ شامل $n\mathbb{Z}$ عاد کنند $k\mathbb{Z}$ هایی که $k|n$. بنابراین ایده‌آلهای $\mathbb{Z}_n$ عادکنند

$\varphi(k\mathbb{Z})$ هایی که $k|n$. پس گیریم $k|n$ حواهیم داشت

$$\varphi(k\mathbb{Z}) = \langle\bar{k}\rangle$$

و بنابراین ایده‌آلهای $\mathbb{Z}_n$ عادکنند $I_k = \langle\bar{k}\rangle$ هایی که $k|n$ و لذا ایده‌آلهای یکتای

$\mathbb{Z}_n$ عادکنند $I_p = \langle\bar{p}\rangle$ هایی که p عدد اول و $p|n$ بنابراین حواهیم داشت

$$J(\mathbb{Z}_n) = \bigcap_{\substack{p \text{ اول} \\ p|n}} \langle\bar{p}\rangle$$

مثال: $J(\mathbb{Z}_{12}) = \langle\bar{2}\rangle \cap \langle\bar{3}\rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}\} \cap \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\} = \{\bar{0}, \bar{6}\}$

(۱۱) فرض کنید R، حوزه ایده‌آل اصلی با تنها و تنها یک ایده‌آل ماکسیمال باشد. $J(R)$ را محاسبه کنید.

حل: از آنجایی که R میدان نیست لذا بیش از یک ایده‌آل ماکسیمال دارد. حال برای حل مسئله دو حالت را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: اگر R دارای تعداد نامتناهی ایده‌آل ماکسیمال باشد.

از آنجایی که R یک PID است و لذا یک دامنه است بنابراین هر ایده‌آل ماکسیمال آن یک ایده‌آل اول است که توسط یک عنصر تولید می‌شود. لذا هر ایده‌آل ماکسیمال R توسط یک عنصر اول از R تولید می‌شود.

بنابراین خواهیم داشت $\forall m \in \max(R)\ \exists p \in R ; p \text{ is Prim s.t } m = \langle p \rangle$

$$J(R) = \bigcap_{m \in \max(R)} m = \bigcap_{\substack{p \text{ is} \\ \text{Prim}}} \langle p \rangle$$

حال فرض کنیم $a \in J(R)$ و خواهیم داشت لذا خواهیم داشت

$$\forall p \in R ; p \text{ is Prim} \quad a \in \langle p \rangle$$

از آنجایی که فرض کردیم تعداد ایده‌آل‌های ماکسیمال R نامتناهی است لذا a دارای تعداد نامتناهی مقسوم‌علیه نامدیهی است.

$$\forall p \in R \ (p \text{ is Prim}) \quad p \mid a$$

حال چون هر PID یک UFD است بنابراین a یا $a \sim 0$ عنصری وارون پذیر از R است

if a be invertible $\Rightarrow \exists b \in R ; ab = 1 \Rightarrow$ Since $a \in J(R) \lhd R$ $\Rightarrow$ $b \in R$

$\Rightarrow ab \in J(R) \Rightarrow 1 \in J(R) \Rightarrow J(R) = R$ a contradiction

$\Rightarrow a$ is not invertible $\Rightarrow a \sim 0$

$J(R) \sim 0$

لذا در حالتی که R دارای تعداد نامتناهی ایده‌آل ماکسیمال است آنگاه

Lemma: Suppose that R be a ring and I, J be left (right) ideals of $R[x]$ such that $I \subseteq J$

For all $n \in \mathbb{N}_0$ set

$$\varphi_n(I) = \{ a \in R \; ; \; \exists a_0, \dots a_{n-1} \in R \text{ s.t } ax^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \in I \}$$

Then we have

(I) For every $n \in \mathbb{N}_0$ $\varphi_n(I)$ is left (right) ideal of R and $\varphi_n(I) \subseteq \varphi_n(J)$

(II) $\varphi_0(I) \subseteq \varphi_1(I) \subseteq \dots \subseteq \varphi_n(I) \subseteq \varphi_{n+1}(I) \dots$

(III) For every $n \in \mathbb{N}_0$ if $\varphi_n(I) = \varphi_n(J)$ Then $I = J$

Proof:

(I) Suppose that $a, b \in \varphi_n(I)$, $r \in R \overset{?}{\Rightarrow} a-b, ra \in \varphi_n(I)$

$a \in \varphi_n(I) \Rightarrow \exists a_0 \dots a_{n-1} \in R ; ax^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \in I$

$b \in \varphi_n(I) \Rightarrow \exists b_0 \dots b_{n-1} \in R ; bx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_0 \in I$

$\Rightarrow (ax^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0) - (bx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_0) \in I$

$\in I \qquad \in I$

$(a-b)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_0 - b_0) \in I$

$\Rightarrow a - b \in \varphi_n(I)$

$r \in R$ $\quad ax^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in I$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} I \trianglelefteq R \\ \text{left ideal of } R[x] \end{array} \right.$

$r(ax^n + a_{n-1}x^{n-1} \cdots a_0) \in I \Rightarrow ra x^n + ra_{n-1}x^{n-1} + \cdots ra_0 \in I$

$\Rightarrow ra \in \varphi_n(I) \Rightarrow \varphi_n(I)$ is left ideal of R

we. Now show that $\forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \varphi_n(I) \subseteq \varphi_n(J)$

Let suppose that $n \in \mathbb{N}_0$ and $a \in \varphi_n(I)$ then there exists

$a_0, \cdots a_{n-1} \in R$; $ax^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_0 \in I$

since $I \subseteq J \Rightarrow$; $ax^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_0 \in I \subseteq J$

therefore

$\Rightarrow a \in \varphi_n(J) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \varphi_n(I) \subseteq \varphi(J)$

(N) suppose that $n \in \mathbb{N}$ we have to show that

$\varphi_n(I) \subseteq \varphi_{n+1}(I)$

$a \in \varphi_n(I) \Rightarrow \exists a_0 \cdots a_{n-1} \in R$; $ax^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_0 \in I$

we claim that $a \in \varphi_{n+1}(I)$ i.e $\exists b_0 \cdots b_n \in R$; $bx^{n+1} + b_n x^n + \cdots b_{n+1} b_0 \in I$

Since I is left ideal of $R[x] \Rightarrow$

$x(ax^n + \cdots a_0) \in I \Rightarrow ax^{n+1} + \underbrace{a_{n-1}}_{b_n}x^n + \cdots + \underbrace{a_0}_{b_1}x \in I \quad b_0 = 0$

$\Rightarrow a \in \varphi_{n+1}(I) \quad b_n = a_{n-1} \; \forall n \quad b_0 = 0$

(۱۴) suppose that let $n \in \mathbb{N}$ and $\varphi_n(I) = \varphi_n(J) \overset{?}{\Rightarrow} I = J$

by hypothesis $I \subseteq J$ so we only need to prove that $J \subseteq I$

let $I \subsetneq J \Rightarrow \exists f \in R[x] \; ; \; f \in J \setminus I$

we chosen $J \setminus I$ چندجمله‌ای با کمترین درجه ممکن از بین تمام چندجمله‌ای‌های متعلق به $J \setminus I$ کمترین درجه ممکن از بین تمام چندجمله‌ای‌های متعلق به $J \setminus I$ را انتخاب می‌کنیم و m را درجه آن

$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in J \setminus I \quad (a_m \neq 0 \; , \; m \geq 1)$

Therefore $a_m \in \varphi_m(J)$ since $\varphi_m(I) = \varphi_m(J) \Rightarrow a_m \in \varphi_m(J)$

Then there exists $b_0, \ldots, b_{m-1} \in R$; $a_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0 \in I$

s.t $g(x) = a_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \in I \subsetneq J$

but $h(x) = f(x) - g(x) = (a_{m-1} - b_{m-1}) x^{m-1} + \cdots + (a_1 - b_1) x + a_0 - b_0 \in J \setminus I$

it is a contradiction because $h(x) \in J \setminus I$ and $\deg(h(x)) < \deg(f(x))$ ⚡

Thus $I \subsetneq J$ is impossible and so $I = J$

(4) Proposition: Let R be a left Noeth ring (right Noeth, Noeth) then $R[x]$ is left Noeth (respectively right Noeth, Noeth)

~~Theorem: Let R be a ring Noetherian~~

Proposition: Let R be a left (right) Noetherian ring then $R[x]$ is left (right) Noetherian.

If R be a commutative ring and Noetherian then $R[x]$ is Noetherian.

Proof: Let $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$ be a ~~ascending~~ Ascending chain of left ideals of $R[x]$.

Then for every $n \in \mathbb{N}$. we have the Ascending chain

$\varphi_n(I_1) \subseteq \varphi_n(I_2) \subseteq \cdots$ of left ideales of R.

Since R is left Noetherian The chain ~~stops~~ stops I.e

for every $n \in \mathbb{N}$. $\exists k_n \in \mathbb{N}$; $\varphi_n(I_{k_n}) = \varphi_n(I_{k_n+1}) = \cdots$

$(\forall i_n \geq k_n \quad \varphi_n(I_{i_n}) = \varphi_n(I_{k_n})$

Now, since R left Noeth by Theorem(1) The family $\{\varphi_n(I_i)\}_{n,i}$ of left Ideal of R, hes a maximal element

say $\varphi_p(I_q)$

Then we have

for every $n \geq p$ $\varphi_p(I_q) = \varphi_n(I_q)$ (A)

Because $p \leq n \rightarrow \varphi_p(I_q) \subseteq \varphi_n(I_q)$ (M)

But $\varphi_p(I_q)$ is maximal $\Rightarrow \varphi_n(I_q) \subseteq \varphi_p(I_q)$

$\Rightarrow \varphi_p(I_q) = \varphi_n(I_q)$

for every $i \geq q$ $\varphi_n(I_q) = \varphi_n(I_i)$

$i \geq q \Rightarrow \varphi_n(I_q) \subseteq \varphi_n(I_i) \subseteq \varphi_p(I_q) = \varphi_n(I_q)$

$\Rightarrow \forall\ i \geq n$ $\varphi_n(I_q) = \varphi_n(I_i)$ (**)

(*) (**) $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $n \geq p$, $\forall\ i \geq q$

$\varphi_p(I_q) = \varphi_n(I_q) = \varphi_n(I_i) \Rightarrow$ if $n \geq p \Rightarrow \forall i \geq q$ $\varphi_n(I_i) = \varphi_n(I_q)$

for every $n \geq p$ set $k_n = q$

$\varphi_n(I_1) \subseteq \varphi_n(I_2) \subseteq \cdots \Rightarrow \forall i \geq q$ $\varphi_n(I_i) = \varphi_n(I_q)$

For every $n < p$ $\exists k_n$: $\forall i \geq k_n$ $\varphi_n(I_i) = \varphi_n(I_{k_n})$

Now let $s = k_0 \cdots k_{p-1} q \Rightarrow$ for every $n \geq 0$

$\varphi_n(I_s) = \varphi_n(I_{s+1}) = \cdots$ (M) $\Rightarrow I_s = I_{s+1} = \cdots$

Corollary: Let R be a left Noeth (right Noeth, Noeth), then $R[x_1, \dots, x_n]$ also is left Noeth (respectively) right Noeth, Noeth)

pr: by induction on n.

Note

Corollary: if $R[x]$ be left Noeth (right Noeth, Noeth)

Then R is left Noeth (right Noeth, Noeth). this is also true when $1 \notin R$.

Proof: Let $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \cdots$ be ascending chain of left ideal of R s.t Not stopes Then

$I_1[x] \subsetneq I_2[x] \subsetneq \cdots$ is a ascending chain of left ideales of $R[x]$ s.t Not stopes it is a contradoction.

واسکه $\frac{R[x]}{(x)} \cong R$

Note: اگر $1 \notin R$ ممکن است قضیه هیلبرت برقرار نباشد.

به عنوان مثال قرار می دهیم $R = 2\mathbb{Z}$ و نگیر زیر حلقه نظری گیری

$\langle 2 \rangle \subsetneq \langle 2, 2x \rangle \subsetneq \langle 2, 2x, 2x^2 \rangle \subsetneq \cdots$

که هیچگاه متوقف نمی شود زیرا $R = 2\mathbb{Z}$ نوتری است (قبلاً ثابت کردیم) (خودش ایده آل است)

در حالی که $R[x]$ نوتری نمی باشد.

تکمیل: این قضیه برای کرشتی چپ (راست و کرشتی) برقرار نیست. زیرا اگر R یک حلقه باشد زیرا نوتری است و در حلقه R زنجیر $\langle x \rangle \subsetneq \langle x^2 \rangle \subsetneq \langle x^3 \rangle \subsetneq \cdots$ لزوماً ایده آل متناهی حلقه $R[x]$ هیچگاه متوقف نمی شود زیرا $R[x]$ کرشتی نمی باشد.

(۷) فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی یکدار، M و N R-مدولی متناهی مولد و $l_R(N) = k$ متناهی باشد. ثابت کنید

$$l(\mathrm{Hom}_R(M,N)) \leq k\,l(M).$$

$F \subset \bigoplus_{i=1}^{k} R$ آزاد با رتبه متناهی، $M = \langle m_1, \dots, m_k \rangle$ تصویر R-مدول $\bigoplus_{i=1}^{k} R$ تحت φ است.

$$\Rightarrow \bigoplus_{i=1}^{k} R \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0 \quad \text{exact} \Rightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,N) \xrightarrow{\bar{\varphi}} \mathrm{Hom}_R\left(\bigoplus_{i=1}^{k} R, N\right) \quad \text{exact}$$

$$\Rightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,N) \longrightarrow \prod_{i=1}^{k} \mathrm{Hom}_R(R,N) \quad \text{exact}$$

$$\Rightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,N) \longrightarrow \prod_{i=1}^{k} N \quad \text{exact}$$

$$\Rightarrow l(\mathrm{Hom}_R(M,N)) \overset{?}{\leq} l\left(\prod_{i=1}^{k} N\right) \overset{?}{=} k\,l(N) \Rightarrow \boxed{l(\mathrm{Hom}_R(M,N)) \leq k\,l(N)}$$

Note: اگر M, N R-مدول باشند طوری که $l(M) < \infty$، $l(N) < \infty$ و $\varphi : M \xrightarrow{\text{mon}} N$ تک‌ریخت باشد آنگاه $l(M) \leq l(N)$

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\pi} \frac{N}{\mathrm{Im}\varphi} \longrightarrow 0 \quad \text{is exact}$$

$$\Rightarrow l(N) = l(M) + l\left(\frac{N}{\mathrm{Im}\varphi}\right) \Rightarrow l(M) \leq l(N)$$

Note: اگر N R-مدول و $l(N) < \infty$ آنگاه $l\left(\prod_{i=1}^{k} N\right) < k\,l(N)$.

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\lambda_1} N \amalg N \xrightarrow{p_2} N \longrightarrow 0 \quad \text{is ex} \Rightarrow l(N \amalg N) = l(N) + l(N)$$

با استقرا حکم اثبات می‌شود.

اعمال ضرب تانسوری $M \otimes_R N$:

$$\bigoplus_{i=1}^{k} R \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0 \quad \text{exact} \Rightarrow \bigoplus R \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N \longrightarrow 0 \quad \text{ex}$$

$$\Rightarrow \bigoplus (R \otimes_R N) \longrightarrow M \otimes_R N \longrightarrow 0 \quad \text{ex} \Rightarrow \prod_{i=1}^{k} N \longrightarrow M \otimes_R N \longrightarrow 0$$

is ex sequence, Then we have $l(M \otimes_R N) \leq l\left(\prod_{i=1}^{k} N\right) = k\,l(N) \Rightarrow \boxed{l(M \otimes_R N) \leq k\,l(N)}$

$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M_2 \longrightarrow 0$; Ext seq $\Rightarrow \ell(M) = \ell(M_1) + \ell(M_2)$

$\ell(M_1) < \infty \quad \ell(M_2) < \infty$

let $\ell(M_1) = r$ and $0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_r = M_1$ be composition series of M_1

let $\ell(M_2) = s$ and $0 = M_0' \subsetneq M_1' \subsetneq \cdots \subsetneq M_s' = M_2$ " " " of M_2

$\forall i = 1, \dots r \quad \varphi(M_i) \leq M_1$ and $0 = \varphi(M_0) \subsetneq \cdots \subsetneq \varphi(M_r) = \operatorname{Im}\varphi$ (I)

$\forall i = 1, \dots s \quad \psi^{-1}(M_i') \leq M_2$ and $\psi^{-1}(0) = \psi^{-1}(M_0') \subsetneq \psi^{-1}(M_1') \subsetneq \cdots \subsetneq \psi^{-1}(M_s') = M$ (II)

Since $\psi^{-1}(0) = \ker\psi$ and Seq is exact $\Rightarrow \ker\psi = \operatorname{Im}\varphi$

From (I), (II) $0 = \varphi(M_0) \subsetneq \varphi(M_1) \subsetneq \cdots \subsetneq \operatorname{Im}\varphi = \ker\psi = \psi^{-1}(0) \subsetneq \psi^{-1}(M_1') \subsetneq \cdots \subsetneq \psi^{-1}(M_s) = M$

(r) (s)

is composition series of M which it's length is $r+s$

and then $\ell(M) = r+s$

If a be invertible $\Rightarrow \exists b \in R \; ; \; ab = 1 \Rightarrow$ Since $a \in J(R) \lhd R$

$\Rightarrow ab \in J(R) \Rightarrow 1 \in J(R) \Rightarrow J(R) = R$ a contradiction

$\Rightarrow a$ is not invertible $\Rightarrow a \neq 0$