حسن نوروزی

نام ... / 87521400...

تمرینات صفحه 125 ـ فصل ①

1 فرض کنید R حوزه صحیح باشد و میدان نباشد. اگر R-مدول هم پروژکتیو و هم انژکتیو باشد ثابت کنید صفر است.

اثبات:

گیریم M R-مدول هم انژکتیو و هم پروژکتیو باشد

حال از آنجایی که M یک مدول پروژکتیو است لذا R-مدول آزاد F و R-مدول K موجودند طوری که

$$F = M \oplus K \quad \text{where} \quad F = \coprod_{i\in I} R \quad \& \quad \{e_i\}_{i\in I} \text{ basis of } F$$

(برای خلف) حال گیریم M R-مدول غیرصفر باشد ($M \neq 0$) لذا $\exists m \in M$ عضو دلخواه را در نظر گیریم لذا

$$0 \neq m \in M \oplus 0 \Rightarrow m \in F \Rightarrow \boxed{0 \neq m = \sum_{k=1}^{n} r_k e_{i_k}} \quad ①$$

لذا چون $m \neq 0$ پس حداقل یکی از r_k ها نمونه که آنرا با r_1 نشان دهیم $r_1 \neq 0$

حال ثابت کنیم $\forall r \in R$ ، نامفر، عضر متمایز وجود دارد که این یعنی R میدان است و تناقض با فرض

گیریم $0 \neq r \in R$ دلخواه باشد حال چون R-حوزه صحیح است پس $r_1 r \neq 0$

و چون M انژکتیو است لذا بخش پذیرات نیز این

$$r_1 r \mid m \Rightarrow \exists m' \in M \ s.t \ \boxed{r_1 r m' = m} \quad ⊛$$

$$m' \in M \Rightarrow m' \in F \Rightarrow \boxed{m' = \sum_{j=1}^{n'} s_j e'_{i_j}} \quad (**)$$

$$\Rightarrow \text{By } ①, ⊛, (**) \Rightarrow r_1 r m' = \sum_{j=1}^{n'} r_1 r s_j e'_{i_j} = \sum_{k=1}^{n} r_k e_{i_k} = m$$

و چون m نمایش صفر یکتا دارد پس $n = n'$ و به ازای یک $j \in \{1, \dots, n\}$ داریم $e'_{i_j} = e_{i_1}$

و با مساوی قرار دادن e_{i_1} و e'_{i_j} خواهیم داشت:

$$r_1 r s_j = r_1 \Rightarrow r_1 (r s_j - 1) = 0 \xrightarrow[r_1 \neq 0]{R \text{ صحیح}} r s_j - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{r s_j = 1}$$

لذا s_j داریم $\neq 0$ که عضو دلخواه از R است پس ثابت شد وارون R است لذا فرض خلف باطل

حکم برقرار است یعنی $M = 0$.

حسن نوروزی
87521401

(۲)

(2) فرض کنید R حلقه تقسیم باشد. ثابت کنید هر R-مدول هم پرو و انژکتیو است. هم انژکتیو.
گیریم M یک R-مدل دلخواه روی حلقه تقسیم R باشد.

الف) M انژکتیو است زیرا

چون R یک حلقه تقسیم است لذا تنها ایدآل‌های آن خود R و 0 هستند. حال بنابر قضیه بئر (Baer)

اگر $I \lhd R$ باشد $\psi: I \to M$ یک همریختی دلخواه باشد آنگاه $I = R$ یا $I = 0$

اگر $I = R$ باشد که $\bar{\psi} = \psi : I = R \to M$ توسیع ψ است (که خود ψ است) $\bar{\psi} = \psi$

و اگر $I = \langle 0 \rangle$ باشد لذا $\bar{\psi} : \langle 0 \rangle = I \to M$ و بنابراین توسیع آن می‌شود $\psi : R \to M$, $x \mapsto 0$ و $\psi|_I = \psi$, $0 \mapsto 0$

لذا بنا بر قضیه بئر (Baer) M انژکتیو است.

ب) M پروژکتیو است. زیرا (لم 2 صفحه بعد)

چون R حلقه تقسیم است لذا هر R-مدل مدول آزاد است. ولذا M یک R-مدل آزاد است ولذا پروژکتیو است.

* در لم‌های زیر ثابت می‌کنیم که روی حلقه تقسیم هر R-مدل آزاد است.

لم 1، اگر R حلقه تقسیم باشد و F یک R-مدل آزاد. زیر مجموعه مستقل خطی ماکسیمال X از F پایه‌ای برای F است.

اثبات: فرض کنیم $X \subseteq F$ مجموعه مستقل خطی ماکسیمال باشد. قرار دهیم $F' = \langle X \rangle$

الف) اگر $F = F'$ که مسئله حل است لذا گیریم

ب) $F \neq F'$ لذا داریم $\exists a \in F \text{ s.t } a \notin F'$

ادعا می‌کنیم $X \cup \{a\}$ مستقل خطی است. گیریم $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ عناصر دلخواه باشند و $r_1, r_2, \ldots, r_n$ دو به دو متمایز باشند

$$(*) \quad r_1 x_1 + r_2 x_2 + \cdots + r_n x_n + ra = 0 \quad \text{where } r_i, r \in R \ ; \ \forall i = 1, \ldots, n$$

ادعا می‌کنیم $r = 0$ زیرا در غیر اینصورت $r \neq 0$ و چون R حلقه تقسیم است پس

$$\exists r' \in R \text{ s.t } rr' = r'r = 1_R$$

بنابراین داریم:

$$(*) \Rightarrow ra = -r_1x_1 - r_2x_2 - \dots - r_nx_n \xrightarrow{r\neq 1} a = -rr_1x_1 - rr_2x_2 - \dots - rr_nx_n$$

$$\Rightarrow a \in \langle X \rangle^{=F} \Rightarrow a \in F' \dot{\cdot} \Rightarrow \boxed{r=0}$$

لذا

$$(*) \Rightarrow r_1x_1 + \dots + r_nx_n = 0 \xrightarrow[\text{مستقل خطی}]{x_i \in X} r_i = 0 \quad \text{for all } i = 1, \dots, n$$

ولذا $X \cup \{a\}$ مستقل خطی است. و این با ماکسیمال بودن X در تناقض است لذا حالت (۱) برقرار نمی‌باشد پس $F = F' = \langle X \rangle$

لم 2: اگر R یک حلقه تقسیم باشد F یک R-مدول آنگاه F آزاد است.

اثبات: فرض کنیم F یک R-مدول دلخواه باشد ثابت می‌کنیم F دارای پایه است لذا F آزاد است

می‌گیریم $X \subseteq F$ یک زیر مجموعه مستقل خطی از F باشد

$$\text{Set} \quad S = \{Y \mid Y \subseteq F \text{ مستقل خطی} \; ; \; X \subseteq Y\}$$

S: اعضای زیرمجموعه‌های مستقل خطی F که شامل X هستند

$S \neq \phi$ زیرا $X \in S$.

حال مجموعه S را با رابطه $\subseteq$ جزئاً مرتب می‌کنیم. حال گیریم $\mathcal{N} = \{Y_i\}_{i \in I}$ یک زنجیر دلخواه از عناصر S باشد.

قرار می‌دهیم $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$ لذا Y کران بالا برای $\mathcal{N}$ است زیرا $Y_i \subseteq \bigcup_{i \in I} Y_i = Y$

نشان می‌دهیم $Y \in S$. Y مستقل خطی است زیرا اگر $y_1, \dots, y_n \in Y$ عناصری دلخواه باشند طوری که

$$(*) \quad r_1y_1 + r_2y_2 + \dots + r_ny_n = 0 \quad ; \quad r_i \in R \quad \text{for } i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow y_1, \dots, y_n \in Y = \bigcup_{i \in I} Y_i \Rightarrow \exists i_1, i_2, \dots, i_n \in I \text{ s.t } y_1 \in Y_{i_1}, \dots, y_n \in Y_{i_n}$$

اما چون $\mathcal{N}$ یک زنجیر است لذا وجود دارد j، $1 \leq j \leq n$ بطوریکه

$$y_1, y_2, \dots, y_n \in Y_{i_j} \xrightarrow{\text{زیرا } Y_{i_j} \text{ مستقل خطی است}} (*) \Rightarrow r_1 = r_2 = \dots = r_n = 0$$

لذا Y مستقل خطی است، همچنین $X \subseteq Y$ زیرا برای هر $i \in I$، $X \subseteq Y_i$ لذا $X \subseteq \bigcup_{i \in I} Y_i$

بنابراین $\mathcal{N}$ دارای کران بالای Y است که عضوی از S است بنابراین چون $\mathcal{N}$ دلخواه بود بنابر لم زورن S دارای عضو ماکسیمال است، نامنید X مجموعه بنابر لم (1) X یک پایه برای F است لذا F آزاد است.

حسن نوروزی

۴

ص 125

③ فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی باشد، I ایده‌آلی از R. ثابت کنید اگر E، R-مدولی انژکتیو باشد آنگاه $Ann_E(I)$، $\frac{R}{I}$-مدولی انژکتیو است.

اثبات: از آنجایی که $I.Ann_E(I)=0$ لذا $Ann_E(I)$ ساختار $\frac{R}{I}$-مدولی دارد.

حال نشان می‌دهیم $Hom_{\frac{R}{I}}(-, Ann_E(I))$ دقیق است.

لذا بنابر تمرین 13 صفحه 58 داریم:

$$Hom_R\left(\frac{R}{I}, E\right) \underset{R}{\cong} Ann_E(I)$$

بنابراین

$$Hom_{\frac{R}{I}}(-, Ann_E(I)) \underset{R}{\cong} Hom_{\frac{R}{I}}(-, Hom_R(\tfrac{R}{I}, E)) \underset{\mathbb{Z}}{\cong} Hom_R(- \otimes_{\frac{R}{I}} \tfrac{R}{I}, E) \underset{\mathbb{Z}}{\cong} Hom_R(-, E)$$

چون $Hom_R(-, E)$ دقیق است لذا $Hom_{\frac{R}{I}}(-, Ann_E(I))$ دقیق است.

④ فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی باشد، I, J ایده‌آل‌هایی از آن، $J \subseteq I$ اگر E، R-مدولی انژکتیو باشد ثابت کنید $Hom_R(\frac{I}{J}, E) \underset{R}{\cong} Hom_R(\frac{R}{J}, E)/Hom_R(\frac{R}{I}, E)$

اثبات: حکم را با استفاده از قضیه اول یکریختی ثابت می‌کنیم: تعریف می‌کنیم

$$\varphi : Hom_R(\tfrac{R}{J}, E) \longrightarrow Hom_R(\tfrac{I}{J}, E)$$
$$f \longrightarrow f \circ j \quad \text{where } j : \tfrac{I}{J} \longrightarrow \tfrac{R}{J}$$

ادعا می‌کنیم φ یک R-همریختی پوشا و $\ker\varphi = Hom_R(\frac{R}{I}, E)$ و لذا بنابر قضیه اول یکریختی حکم برقرار است.

الف) φ R-همریختی است: زیرا f همریختی و j نمول است.

ب) φ پوشا است: گیریم $g \in Hom_R(\frac{I}{J}, E)$ دلخواه، نشان می‌دهیم $f \in Hom_R(\frac{R}{J}, E)$ وجود دارد بطوری که

$$\varphi f = g \iff f \circ j = g \overset{\text{تعریف}}{\iff} f|_{\frac{I}{J}} = g$$

$$g : \tfrac{I}{J} \xrightarrow{R\text{hom}} E \xrightarrow{E \text{ انژکتیو}} \tfrac{J}{J} \trianglelefteq \tfrac{R}{J} \quad \text{By Bear criterion } \exists f : \tfrac{R}{J} \xrightarrow{R\text{hom}} E \text{ s.t } f|_{\frac{I}{J}} = g$$

لذا φ پوشا است.

ج) $\ker\varphi = Hom_R(\frac{R}{I}, E)$ ؟

سری دوم

③

$\otimes \quad \ker\varphi \overset{?}{\subseteq} Hom_R(\frac{R}{I}, E)$

$\ast$ گیریم $f \in \ker\varphi$ دلخواه باشد لذا

$f \in Hom_R(\frac{R}{J}, E) \Rightarrow f : \frac{R}{J} \xrightarrow{Rhom} E$, $\varphi f = 0 \Rightarrow f \circ j = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall (r+J) \in \frac{I}{J} : f \circ j(r+J) = 0 \Rightarrow f(r+J) = 0 \in Hom(\frac{R}{J}, E)$

$\Rightarrow f|_{\frac{I}{J}} = 0_{Hom_R(\frac{R}{J},E)} = 0_{Hom_R(\frac{R}{I},E)}|^{\text{کدامین}}_{Hom_R(\frac{R}{I},E)} \Rightarrow f \in Hom_R(\frac{R}{I}, E)$

$\Rightarrow \boxed{\ker\varphi \subseteq Hom_R(\frac{R}{I}, E)}$

$\ast\ast \quad Hom_R(\frac{R}{I}, E) \subseteq \ker\varphi$

$\ast\ast$ گیریم $f \in Hom_R(\frac{R}{I}, E)$ لذا

$\varphi f = f \circ j$; $\varphi f : \frac{I}{J} \longrightarrow E$

گیریم $r+J \in \frac{I}{J}$ لذا چون $J \subseteq I$ لذا $r+J \in I$ ؛

$\varphi f(r+J) = f \circ j(r+J) = f(\underbrace{r+J}_{\in I}) \subseteq f(I) = 0$

$f : \frac{R}{I} \longrightarrow E$ is R-homo.

$I = 0_{\frac{R}{I}}$, f R-hom $\Rightarrow f(I) = 0$

$\Rightarrow \forall (r+J) \in \frac{I}{J}$; $\varphi f(r+J) = 0 \Rightarrow f \in \ker\varphi \Rightarrow \boxed{Hom_R(\frac{R}{I}, E) \subseteq \ker\varphi}$

لذا بنا به قضیه اول همریختی حکم برقرار است.

⑤ فرض کنید M R-مدول باشد، $x_1, \dots, x_n$ عضوهایی از M باشند. E را نیز R-مدولی انژکتیو در نظر گیرید و فرض کنید $e \in E$ ثابت کنید

$$Ann(x_1) \cap \dots \cap Ann(x_n) \subseteq Ann(e)$$

اگر و تنها اگر عضوهایی از $Hom_R(M, E)$ مثل $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ موجود باشند

$$e = \varphi_1(x_1) + \dots + \varphi_n(x_n).$$

$\Leftarrow$ اثبات: گیریم $\bigcap_{i=1}^{n} Ann(x_i) \subseteq Ann(e)$ داریم

$$0 \longrightarrow \frac{R}{\bigcap_{i=1}^{n} Ann(x_i)} \xrightarrow{\varphi} \bigoplus_{i=1}^{n} M$$

$$r + \bigcap_{i=1}^{n} Ann(x_i) \longrightarrow (rx_i)_{i=1}^{n}$$

حسن نوروزی

(4)

(3) قسم اول

الف) φ خوش تعریف است:

$$r+\bigcap_{i=1}^{n} Ann(x_i) = r'+\bigcap_{i=1}^{n} Ann(x_i) \Rightarrow r-r' \in \bigcap_{i=1}^{n} Ann(x_i) \Rightarrow r-r' \in Ann(x_i) \quad \forall i=1,\dots,n$$

$$\Rightarrow (r-r')x_i = 0 \quad \forall i=1,\dots,n \Rightarrow rx_i = r'x_i \quad \forall i=1,\dots,n \Rightarrow (rx_i)_{i=1}^{n} = (r'x_i)_{i=1}^{n}$$

$$\Rightarrow \varphi\left(r+\bigcap Ann(x_i)\right) = \varphi\left(r'+\bigcap Ann(x_i)\right) \Rightarrow \text{خوش تعریف است } \varphi$$

ب) φ به وضوح R-خطی است.

ج) φ یک‌به‌یک است.

$$\varphi\left(r+\bigcap_{i=1}^{n} Ann(x_i)\right) = \varphi\left(r'+\bigcap_{i=1}^{n} Ann(x_i)\right) \Rightarrow (rx_i)_{i=1}^{n} = (r'x_i)_{i=1}^{n} \Rightarrow rx_i = r'x_i \quad \forall i=1,\dots,n$$

$$\Rightarrow (r-r')x_i = 0 \quad \forall i=1,\dots,n \Rightarrow r-r' \in \bigcap_{i=1}^{n} Ann(x_i) \Rightarrow r+\bigcap_{i=1}^{n} Ann(x_i) = r'+\bigcap_{i=1}^{n} Ann(x_i) \quad \checkmark$$

حال تعریف می‌کنیم:

$$f: R/\bigcap_{i=1}^{n} Ann(x_i) \longrightarrow E$$
$$r+\bigcap_{i=1}^{n} Ann(x_i) \longrightarrow re$$

الف) f یک R-خطی است.

ب) f خوش تعریف است.

$$r+\bigcap_{i=1}^{n} Ann(x_i) = r'+\bigcap_{i=1}^{n} Ann(x_i) \Rightarrow r-r' \in \bigcap_{i=1}^{n} Ann(x_i) \xrightarrow{\bigcap Ann(x_i) \subseteq Ann(e)} r-r' \in Ann(e)$$

$$\Rightarrow (r-r')e = 0 \Rightarrow re = r'e \Rightarrow \text{خوش تعریف است } f$$

حال از آنجایی که E یک R-مدل انژکتیو است لذا R-خطی ψ وجود دارد که نمودار مقابل را جابجایی کند یعنی $\psi \circ \varphi = f$

$$0 \longrightarrow R/\bigcap Ann(x_i) \xrightarrow{\varphi} \bigoplus_{i=1}^{n} M$$
$$f \downarrow \swarrow \exists \psi$$
$$E$$

$$\psi\circ\varphi = f \Rightarrow \begin{cases} \psi\circ\varphi\left(r+\bigcap_{i=1}^{n} Ann(x_i)\right) = \psi\left((rx_i)_{i=1}^{n}\right) \\ f\left(r+\bigcap Ann(x_i)\right) = re \end{cases} \Rightarrow \boxed{\psi\left((rx_i)_{i=1}^{n}\right) = re}$$

$$\Rightarrow \psi: \bigoplus M \longrightarrow E$$
$$(rx_i)_{i=1}^{n} \longrightarrow re$$

Set $\varphi_i: M \longrightarrow E$ s.t. $\varphi_i(x_i) = \psi(0,\dots,0,\underbrace{x_i}_{i},0,\dots,0)$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \psi(0,\dots,0,x_i,0,\dots,0) = \psi\left((x_i)_{i=1}^{n}\right) = e \quad \checkmark$$

حسن نوروزی

۸۷۵۲۱۴۰۰۱

۷

تمرین ۵

(برهان (⟹): گیریم $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ عضوهایی از $Hom_R(M, E)$ باشند که $\varphi_1 + \dots + \varphi_n = e$ (*)

حال $r \in \bigcap_{i=1}^{n} Ann(x_i) \Rightarrow rx_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$ (**)

$$\Rightarrow re \overset{(*)}{=} r\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(rx_i) \overset{(**)}{=} \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(0) = 0 \Rightarrow re = 0$$

$$\Rightarrow r \in Ann(e) \Longrightarrow \boxed{\bigcap_{i=1}^{n} Ann(x_i) \subseteq Ann(e)}$$

۶ ۵ ۴

(۶) فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی باشد، I ایدآلی سره از R، x عضوی از R مثل x وجود داشته باشد که $rx = 0$ ثابت کنید عضوی غیرصفر از $\frac{R}{I}$ مثل s وجود دارد که $rs = 0$.

(برهان خلف): گیریم برای هر $0 \neq s \in \frac{R}{I}$ داشته باشیم $rs \neq 0$ ⊛

اگر به تناقض برسیم حکم برقرار خواهد بود، فرض خلف باطل.

از آنجایی که $E(\frac{R}{I})$ پوشش انژکتیو $\frac{R}{I}$ است لذا $\frac{R}{I} \subseteq E(\frac{R}{I})$ لذا بنابر فرض مسئله داریم:

$$\exists r \in R \;,\; \exists 0 \neq x \in E(\frac{R}{I}) \;\; s.t \;\; rx = 0$$

دو حالت برای x وجود دارد:

الف) $x \in \frac{R}{I}$: لذا بنابر فرض خلف (*) داریم $rx \neq 0$ و این با فرض مسئله تناقض است.

ب) $x \notin \frac{R}{I}$: لذا $0 \neq x \in E(\frac{R}{I}) - \frac{R}{I}$ و داریم $J = \langle x \rangle^{\#}$ که زیرمدول غیرصفر پوشش $E(\frac{R}{I})$ است.

ادعا: $\frac{R}{I} \cap J = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{R}{I} \cap J = 0 \\ \frac{R}{I} \underset{ess}{\leq} E(\frac{R}{I}) \end{array}\right\} \Rightarrow J \leq E(\frac{R}{I}) \Rightarrow \frac{R}{I} = 0 \Rightarrow R = I \;\; \text{تناقض}$$

اثبات ادعا: فرض کنیم $\frac{R}{I} \cap J \neq 0$ (خلف) لذا

$$0 \neq y \in \frac{R}{I} \cap J \Rightarrow y \in \frac{R}{I}, \; y \in J = \langle x \rangle \Rightarrow \exists t \in R \;\; s.t \;\; \boxed{y = tx} \;\; (1)$$

$$0 = t(0) \overset{rx=0}{\underset{\text{فرض}}{=}} t(rx) = (tr)x \overset{(1)}{=} r(tx) = ry \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} ry = 0 \\ 0 \neq y \in \frac{R}{I} \end{array}\right. \Rightarrow \text{تناقض با فرض (خلف)}$$

حسن نژاد محمدی

87521401

(۱)

(۷) ثابت کنید R-مدول آزاد P پروژکتیو است اگر و تنها اگر برای هر R-مدول اپیمورفیسم E، هر نمودار

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & & \downarrow f \\ E & \xrightarrow{\varphi} & M \longrightarrow 0 \end{array} \quad (1)$$

که سطر آن دقیق فرض شده است.

R-همریختی مثل $\psi: P \to E$ موجود باشد که نمودار زیر را جابجا کند.

$$\begin{array}{ccc} & \swarrow^{\psi} & P \\ & & \downarrow f \\ E & \xrightarrow{\varphi} & M \longrightarrow 0 \end{array}$$

اثبات:

($\Rightarrow$) اگر P پروژکتیو باشد بنابر گزاره (۸.۱) جایی R-همریختی موجود خواهد بود.

عکس ($\Leftarrow$) گیریم برای هر R-مدول اپیمورفیسم E نمودار (۱) جابجا شود. حال نمودار زیر را از R-مدول‌ها و R-همریختی‌ها که سطر آن دقیق باشد در نظر گیریم و نشان دهیم $\psi: P \to N$ موجود است که نمودار زیر را جابجا کند

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} & & P \\ & & \downarrow g \\ N & \xrightarrow{f} & M \longrightarrow 0 \end{array}$$

حال از آنجا که N یک R-مدول است لذا R-مدول اپیمورفیسم E موجود است که $N \leq E$ حال نمودار زیر را در نظر گیریم:

$$\begin{array}{ccc} & \swarrow^{\exists \psi} & P \\ & & \downarrow h \circ g \\ E & \xrightarrow{\pi} & E/\ker f \longrightarrow 0 \end{array}$$

where $P \xrightarrow{g} M \xrightarrow{h} E/\ker f$

$m \longrightarrow n + \ker f$ s.t $f(n) = m$ (f پوچ)

حال بنابر فرض مسئله R-همریختی $\psi: P \to E$ موجود است طوری که $\boxed{\pi \circ \psi = h \circ g}$ (**)

ادعا می‌کنیم که این ψ نمودار (*) را جابجا می‌کند برای اثبات ادعا باید نشان دهیم: الف) $\psi(P) \subseteq N$ ب) $f \circ \psi = g$

الف) $\psi(P) \subseteq N$ ؟ دلخواه $a \in P \Rightarrow$

$$\forall a \in P \Rightarrow \begin{cases} \pi(\psi(a)) = \psi(a) + \ker f \\ h(g(a)) = n + \ker f \; ; \; g(a) = f(n) \end{cases} \Rightarrow \psi(a) + \ker f = n + \ker f \Rightarrow \psi(a) - n \in \ker f$$

$\ker f \leq f \Rightarrow$

$$\Rightarrow \psi(a) \in N \Rightarrow \boxed{\psi(P) \subseteq N}$$

ب) $f \circ \psi = g$

تعریف می‌کنیم $h': M \longrightarrow N/\ker f$

$m \longrightarrow n + \ker f \; ; \; f(n) = m$ (f پوچ)

در واقع $h(n) = h'(n)$ و لذا h' از گذیر بر h هم برابر است

تمرین ۱
۸۷۵۲۱۴۰۱

سوال ۴

اولا (۱)

ادعا می‌کنیم h یک R-هم‌ریختی پوشا و یک‌به‌یک است.

الف) h' پوشا است (با پوشا بودن f می‌آید $n+\ker f \in N/\ker f$ موجود است $m \in M$ که $f(m)=n+\ker f$)

$$+\ker f \in \frac{N}{\ker f} \Rightarrow n \in N \xrightarrow{\text{پوشا}} \exists m \in M \text{ s.t } f(m)=n \Rightarrow \boxed{h'(m)=n+\ker f}$$

ب) h' یک‌به‌یک است:

$$\in \ker h' \Rightarrow h'(m)=0 \Rightarrow n+\ker f=0 \text{ s.t } f(n)=m \Rightarrow n \in \ker f \Rightarrow \boxed{f(n)=0=m}$$

تعریف می‌کنیم $\pi' : N \longrightarrow N/\ker f$ که $\pi' = \pi|_N$ لذا از آنجایی که ψ پوشا است زیرا

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & \psi \swarrow & \downarrow h'\circ g \\ N & \xrightarrow{\pi'} & N/\ker f \longrightarrow 0 \end{array}$$

$$\pi' \circ \psi(a) = \psi(a)+\ker f \Rightarrow h\circ g(a) = h(g(a)) = h'(g(a)) \Rightarrow \boxed{\pi' \circ \psi = h' \circ g}$$

$$\Rightarrow \underbrace{h' \circ \pi'}_{f} \circ \psi = g \Rightarrow f \circ \psi = g$$

$$h' \circ \pi' = f$$

زیرا: $\forall n \in N \Rightarrow h'(\pi'(n)) = h'(n+\ker f) = m \text{ s.t } f(n)=m$

$$\Rightarrow h' \circ \pi'(n) = f(n) \Rightarrow \boxed{h' \circ \pi' = f}$$

لذا $f \circ \psi = g$ لذا P یک R-مدول پوشا است.

حسن نوروزی

۸۷۵۲۱ ۴۰۰۶

؟ 13, 12, 11, 9, 8

(11) فرض کنید R حوزه صحیح باشد، F میدان کسرهای آن. اگر R، F را اصوان R-مدل در نظر بگیرید ثابت کنید $E(R) \underset{R}{\simeq} F$

اثبات:

اگر ثابت کنیم F پوشش انژکتیو R است لذا چون هر دو پوشش انژکتیو یک R-مدل همریخت‌اند لذا $E(R) \underset{R}{\simeq} F$.

F میدان کسرهای حوزه صحیح R است یعنی

$$F = RS^{-1} = \{ \frac{a}{b} \;,\; a,b \in R \;,\; b \neq 0 \} \qquad , S = \{ a \in R \;,\; a \neq 0 \}$$

F توسیعی از R است. ثابت می‌کنیم یک توسیع اساسی انژکتیو است لذا پوشش انژکتیو برای R است

(الف) F توسیع اساسی است:

زیرا F میدان است پس تنها زیرمدل‌های آن، صفر و خود F است. لذا چون $F \neq 0$ نمی‌توانیم زیرمدل غیرصفر F خود F است و $F \cap R \neq 0$ لذا F توسیع اساسی R است

(ب) F انژکتیو است

زیرا F میدان است لذا جزء هموژن انژکتیو است پس F انژکتیو است.

بنابراین F یک توسیع اساسی انژکتیو برای R است لذا $E(R) \underset{R}{\simeq} F$.

(14) ثابت کنید برای هر عدد اول مثل p، $E(Z_p) \underset{Z}{\simeq} Z_{p^\infty}$ ؟

اثبات: کافیست نشان دهیم که Z_{p^∞} یک پوشش انژکتیو Z_p است لذا چون هر دو پوشش انژکتیو یک Z-مدل همریخت‌اند لذا $E(Z_p) \underset{Z}{\simeq} Z_{p^\infty}$

$$Z_{p^\infty} = \{ \frac{a}{p^n} + Z \;,\; a \in Z \;,\; n \in N \}$$

$$\forall \bar{m} \in Z_p \Rightarrow \bar{m} = \bar{m} \times \frac{p^n}{p^n} \;?$$

؟ Z_{p^∞} یک توسیع Z_p است

نوزدهمی

87524051

راد کامل جبرهای (حل تمرینات صفحه 148 - فصل II)

فرض کنید R و S دو حلقه باشند و $\varphi: R \longrightarrow S$ هر خبری پوشا. ثابت کنید $\varphi(J(R)) \subseteq J(S)$.
مثال بزنید که $\varphi(J(R)) \subsetneq J(S)$ اگر φ پوشا نباشد. (راهنمایی: از حلقه‌های انتگرال استفاده کنید)

الف) فرض کنیم $x \in \varphi(J(R))$ نشان دهید $1-sx$ دارای وارون چپ در R است برای هر $s \in S$ لذا $x \in J(S)$

$$x \in \varphi(J(R)) \Rightarrow \exists t \in J(R) \text{ s.t } x = \varphi(t) \quad (*)$$

Let $s \in S \Rightarrow \exists r_1 \in R$ s.t $\varphi(r_1) = s$ $(**)$

$$1 - sx = 1 - \varphi(r_1)\varphi(t) = 1 - \varphi(r_1 t) = \varphi(1) - \varphi(r_1 t) = \varphi(1 - r_1 t)$$

$$\therefore \quad 1 - sx = \varphi(1 - r_1 t) \quad (***)$$

$\Rightarrow$ حال چون $t \in J(R)$ و $r_1 \in R$ لذا $1 - r_1 t$ دارای وارون چپ دارد لذا

$$\exists u \in R \text{ s.t } u(1 - r_1 t) = 1 \Rightarrow$$

ادعا می‌کنیم $\varphi(u)$ وارون چپ $1 - sx$ است زیرا

$$\varphi(u)(1 - sx) \overset{(***)}{=} \varphi(u)\varphi(1 - r_1 t) = \varphi\big(u(1 - r_1 t)\big) = \varphi(1) = 1$$

$$\therefore \quad \varphi(u)(1 - sx) = 1$$

بنابراین $1 - sx$ دارای وارون چپ دارد لذا $x \in J(S)$.

ب) از این مثال برای حالت $\varphi(J(R)) \subsetneq J(S)$

Define $\varphi: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_8$, $n \longmapsto \bar{n}$

$$J(\mathbb{Z}) = 0 \Rightarrow \varphi(J(\mathbb{Z})) = \varphi(0) = 0$$
$$J(\mathbb{Z}_8) = 2\mathbb{Z}_8 \neq 0$$
$$\Rightarrow 0 = \varphi(J(\mathbb{Z})) \subsetneq J(\mathbb{Z}_8)$$

ج) از این مثال برای حالتی که φ پوشا نیست. تابع کسینوس (مثلا) را در نظر بگیرید.

Define. $\varphi: \mathbb{Z}_{(p)} \overset{\text{شمول}}{\longrightarrow} \mathbb{Q}$ φ همان

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : (b, p) = 1 \right\} \subsetneq \mathbb{Q}$$

φ پوشا نیست (چرا؟ سوال)

$$J(\mathbb{Z}_{(p)}) = p\mathbb{Z}_{(p)} \Rightarrow \varphi(J(\mathbb{Z}_{(p)})) = \varphi(p\mathbb{Z}_{(p)}) = p\mathbb{Z}_{(p)}$$
$$J(\mathbb{Q}) = 0 \quad \text{(چرا؟ سوال)}$$
$$\Rightarrow \varphi(J(\mathbb{Z}_{(p)})) \subsetneq J(\mathbb{Q})$$

لذا به هر دو مثال نیاز است.

ص 148

(2) فرض کنید R حلقه، و I ایده‌آلی از آن باشد. ثابت کنید اگر $J(\frac{R}{I}) = 0$ آنگاه $J(R) \subseteq I$.

ب) بالعکس اگر $I \subseteq J(R)$ و $J(\frac{R}{I}) = 0$ آنگاه $I = J(R)$

اثبات الف) همریختی پوشای $\varphi : R \longrightarrow \frac{R}{I}$ با ضابطه $x \longrightarrow x+I$ را در نظر می‌گیریم. چون φ پوشا است بنابر قضیه D داریم

$$\varphi(J(R)) \subseteq J(\tfrac{R}{I}) \overset{\text{بنابر فرض}}{=} 0_{\frac{R}{I}} = I \Rightarrow \varphi(J(R)) = I \overset{\text{تعریف } \varphi}{\Rightarrow} J(R) + I = I \Rightarrow J(R) \subseteq I$$

ب) بنابر قسمت اول $J(R) \subseteq I$ و طبق فرض $I \subseteq J(R)$ لذا $I = J(R)$

(3) فرض کنید R حلقه‌ای با شرط عضوی همانی باشد. ثابت کنید $J(eRe) = eJ(R)e$

اثبات: اگر $e=0$ یا $e=1$ که بدیهی است لذا می‌گیریم $e \neq 0, 1$ باشد. ($e^2 = e \neq 0$)

الف) ثابت می‌کنیم $J(eRe) \subseteq eJ(R)e$

Let $x \in J(eRe)$ دلخواه $\Rightarrow \exists r \in R$ s.t $x = ere = e^2re^2 = e(ere)e$

کافیست نشان دهیم $ere \in J(R)$ و لذا $e(ere)e \in eJ(R)e$ برقرار شد. پس معادلاً کافیست ثابت کنیم به ازای هر $t \in R$ دلخواه، $1-t(ere)$ وارون راست دارد.

می‌خواهیم از عناصر $J(eRe)$ برانیم که $e-(ete)(ere)$ وارون راست دارد. (دقت کنید e عنصر یکانی eRe است)

$$J(eRe) = \{ete \in eRe \text{ s.t } \forall ere \in R \; ; \; e-(ete)(ere) \text{ has a right inverse}\}$$

لذا فرض کنیم $r \in R$ دلخواه $u = er'e$ وارون راست $e-(ete)(ere)$ باشد لذا

$$\left(e-(ete)(ere)\right)(er'e) = e \xrightarrow{\text{توزیع پذیری}} e\left[\left(e-(ete)(ere)\right)(er'e)\right] = e$$

$$\Rightarrow e\left[(1-(ete)(ere))^{(ere)} - 1\right] = 0 \xrightarrow{e \neq 0 \text{ چون}} (1-(ete)(ere))(ere) = 1$$

(در صورتی که $e=1$ باشد این حالت نیز برقرار است)

لذا ere وارون راست $(1-(ete)(ere))$ است بنابراین $ere \in J(R)$

ب) $eJ(R)e \subseteq J(eRe)$

Let $r \in J(R)$; $ere \in eJ(R)e \xrightarrow{\text{بدیهی}} ere \in J(eRe)$?

کافیست نشان دهیم $e-(ete)(ere)$ که $ete \in eRe$ عنصر دلخواه است وارون راست دارد.

لذا داریم

$$e-(ete)(ere) = e-etere = (1-ete)e$$

چون $ere \in J(R)$ و $1-(ete) \in R$ وارون راست دارد لذا وجود دارد $u \in R$ که

$$u(1-ete)e = e = 1_{eRe} \Rightarrow u(e-(ete)(ere)) = 1_{eRe} \Rightarrow ere \in J(eRe) \Rightarrow \boxed{eJ(R)e \subseteq J(eRe)}$$

④ فرض کنید R حلقه‌ی شرکت‌پذیر، e عضوی خودتوان از $J(R)$. ثابت کنید $e=0$.

اثبات: $e\in J(R)$ لذا $1-aeb$ برای هر $a,b\in R$ دارای وارون ضربی است. لذا $1-e$ نیز دارای وارون ضربی است لذا

$$\exists u\in R \text{ s.t } (1-e)u=1 \quad (*)$$

از طرفی $e=e^2 \Rightarrow e-e^2=0 \Rightarrow e(1-e)=0 \xrightarrow{\times u} e\underbrace{(1-e)u}_{=1}=0 \Rightarrow e\cdot 1=0$

⑤ فرض کنید R حلقه‌ی شرکت‌پذیر، x عضوی از $J(R)$. اگر عدد طبیعی مثل n، $n\geq 2$، موجود باشد که $x^n=x$، ثابت کنید $x=0$.

اثبات: کافی است $x\in J(R)$ لذا $1-ax$ برای هر $a\in R$ دارای وارون ضربی است. لذا اگر $a=x^{n-2}$ آنگاه $1-x^{n-2}\cdot x=1-x^{n-1}$ دارای وارون ضربی است لذا $\exists u\in R:\ (1-x^{n-1})u=1$

از طرفی $x=x^n \ \forall n\geq 2 \Rightarrow x-x^n=0 \Rightarrow x(1-x^{n-1})=0 \xrightarrow{\times u} x\underbrace{(1-x^{n-1})u}_{=1}=0 \Rightarrow x=0$

⑥ فرض کنید $\{R_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای ناتهی از حلقه‌های شرکت‌پذیر. ثابت کنید $J(\prod_{i\in I} R_i)=\prod_{i\in I} J(R_i)$

اثبات:

الف) $J(\prod_{i\in I} R_i) \overset{?}{\subseteq} \prod_{i\in I} J(R_i)$

Let $(x_i)\in J(\prod R_i) \Rightarrow \forall (t_i)\in \prod R_i ;\ (1)_{i\in I} - (t_i)(x_i)$ has a right inv

$\Rightarrow (1)_{i\in I} - (t_i)(x_i) = (1-t_ix_i)_{i\in I}$ has a right invertible.

$\Rightarrow \forall i\in I \quad 1-t_ix_i$ has a right invertible $\Rightarrow \forall i\in I \quad x_i\in J(R_i)$

$\Rightarrow (x_i)_{i\in I}\in \prod_{i\in I} J(R_i)$ ✓ $\Rightarrow$ الف برقرار است

ب) $\prod_{i\in I} J(R_i) \overset{?}{\subseteq} J(\prod_{i\in I} R_i)$

Let $(x_i)\in \prod_{i\in I} J(R_i)$ $\forall (t_i)\in \prod_{i\in I} R_i \Rightarrow \forall i\in I \quad x_i\in J(R_i)$

$\Rightarrow \forall i\in I \quad 1-t_ix_i$ has a right invertible $\Rightarrow (1-t_ix_i)_{i\in I}$ has a right inver

$\Rightarrow (1-t_ix_i) = 1-(t_i)(x_i)$ has a right invertible $\Rightarrow (x_i)\in J(\prod_{i\in I} R_i)$ ✓ ب برقرار است

حسن زرهری — تمرین ۱۲ — جبر

۷) فرض کنید R حلقه‌ای باشد، I ایده‌آلی از R. ثابت کنید $\frac{I+J(R)}{I} \subseteq J(\frac{R}{I})$ و درستی این رابطه را در صورتی که $I \subseteq J(R)$ بررسی کنید.

اثبات:

الف) همریختی پوشای $\varphi : R \to \frac{R}{I}$ با ضابطه $r \to r+I$ را در نظر می‌گیریم. لذا بنابر قضیه‌ی ۱ داریم:

$$\varphi(J(R)) \subseteq J(\tfrac{R}{I}) \quad , \quad \varphi(J(R)) = \frac{J(R)+I}{I} \Rightarrow \boxed{\frac{J(R)+I}{I} \subseteq J(\tfrac{R}{I})} \quad (*)$$

ب) حکم $\iff I \subseteq J(R) \iff J(\frac{R}{I}) = \frac{I+J(R)}{I}$

($\Rightarrow$) کافی است ثابت کنیم $J(\frac{R}{I}) \subseteq \frac{J(R)+I}{I}$ زیرا با توجه به $(*)$ برقرار است.

فرض کنیم $x+I \in J(\frac{R}{I})$ دلخواه باشد. ایده‌آل ماکسیمال دلخواه R مانند M در نظر می‌گیریم (چون R میدان نیست پس حداقل یک ایده‌آل ماکسیمال دارد) و $x \in M$ را اختیار می‌کنیم. داریم:

$$I \subseteq J(R) \subseteq M$$

لذا $\frac{M}{I}$ ایده‌آل ماکسیمال $\frac{R}{I}$ است. پس

$$x+I \in J(R)/I \subseteq \frac{M}{I} \Rightarrow x+I \in \frac{M}{I} \Rightarrow x \in M$$

حال چون M دلخواه بود لذا $x \in J(R)$ و لذا $x+I \in \frac{J(R)+I}{I}$

$\therefore J(\frac{R}{I}) \subseteq \frac{J(R)+I}{I}$ ✓

($\Leftarrow$) کافی است ثابت کنیم $J(\frac{R}{I}) = \frac{J(R)+I}{I}$.

Let $x \in I \Rightarrow x+I \in \frac{I+J(R)}{I} = J(\frac{R}{I})$ دلخواه

$\Rightarrow x+I \in J(\frac{R}{I})$

لذا به ازای هر $r \in R$ ، $(1+I)-(x+I)(r+I)$ وارون راست دارد. لذا $1+(xr-1)$ به ازای هر $r \in R$ وارون راست دارد. لذا $xr-1$ به ازای هر $r \in R$ وارون راست دارد.

لذا $x \in J(R)$ پس $I \subseteq J(R)$

۸) $J(\mathbb{Z}_n)$ را حساب کنید.

ایدئال های $\mathbb{Z}_n$ به صورت $k\mathbb{Z}$ هستند که $k \mid n$ و ایدئال های اصلی $\mathbb{Z}_n$ نیز به صورت $p\mathbb{Z}$ ها یی هستند که $p \mid n$ به طوریکه p عدد اول است. لذا خواهیم داشت

$$J(\mathbb{Z}_n) = \bigcap_{\substack{p_i \text{ Prime} \\ p \mid n}} p\mathbb{Z}$$

مثلاً $J(\mathbb{Z}_{12}) = 2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{6}\}$

ب) $J(\mathbb{Q}[[x]])$ را حساب کنید. ادعا: $J(\mathbb{Q}[[x]]) = (x)$

* یادآوری: اگر R میدان باشد $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ که $f \in R[[x]]$ دارای وارون ضربی است $\iff$ جمله ثابت آن یعنی a_0 در R وارون پذیر باشد.

اثبات: فرض کنیم $f \in J(\mathbb{Q}[[x]])$ و $g \in \mathbb{Q}[[x]]$ دلخواه باشد. لذا $1-fg$ دارای معکوس است در $\mathbb{Q}[[x]]$ لذا وجود دارد $h \in \mathbb{Q}[[x]]$ به طوریکه

$$(1-fg)h = 1 \xrightarrow[\text{نتیجه نکته فوق}]{} (1-a_0 b_0)c_0 = 1 \quad \text{where } a_0 \in \mathbb{Q},\ \forall b_0 \in \mathbb{Q}$$

که a_0 و b_0 به ترتیب جمله ثابت f و h هستند.

لذا $1-a_0 b_0$ در $\mathbb{Q}$ معکوس دارد و چون b_0 عضو دلخواه در $\mathbb{Q}$ است $\Rightarrow J(\mathbb{Q}) = 0$ لذا $a_0 \in J(\mathbb{Q})$ لذا $\mathbb{Q}$ میدان است لذا $a_0 = 0$

لذا برازای هر $f \in J(\mathbb{Q}[[x]])$ که $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ ، $a_0 = 0$ یعنی جمله ثابت آن صفر است

لذا $f \in (x)$ که $(x) = \{xf \mid f \in \mathbb{Q}[[x]]\}$

لذا $J(\mathbb{Q}[[x]]) \subseteq (x)$.

حال ثابت میکنیم $(x) \subseteq J(\mathbb{Q}[[x]])$.

گیریم $h \in (x)$ لذا $h = xf$ که $f \in \mathbb{Q}[[x]]$ و فرض کنیم $g \in \mathbb{Q}[[x]]$ دلخواه باشد لذا

$1-x(fg)$ وارون پذیر است چون جمله ثابت $1-x(fg)$ برابر 1 است $\Rightarrow 1-(xf)g = 1-x(fg)$

لذا بنابر نکته فوق چون $\mathbb{Q}$ میدان است لذا $1-x(fg)$ وارون پذیر است بنابراین $h = xf \in J(\mathbb{Q}[[x]])$ لذا $(x) \subseteq J(\mathbb{Q}[[x]])$

$$J(\mathbb{Q}[[x]]) = (x)$$

نکته مهم در مورد سوال ⑨

حالت کلی: اگر F میدان باشد آنگاه $J(F[x]) = (x)$

اثبات: چون F میدان است لذا $F[x]$ یک حلقه‌ی اویلری با ایده‌آل اصلی (x) است

لذا $J(F[x]) = (x)$

⑩ فرض کنید R حوزه صحیح باشد. $J(R[x])$ را محاسبه کنید.

⑪ فرض کنید R حوزه ایده‌آل اصلی با بیش از یک عنصر وارون‌ناپذیر باشد. $J(R)$ را محاسبه کنید.

(12) فرض کنید $R=C([0,1])$ حلقه توابع پیوسته حقیقی روی $[0,1]$ باشد. $J(R)$ را محاسبه کنید؟

(13) فرض کنید R حلقه شده اگر $M_n(R)$ حلقه ماتریس‌های مربعی مرتبه n با درایه‌های در R باشد؟ ثابت کنید $J(M_n(R))=M_n(J(R))$

(14) فرض کنید D حلقه تقسیم باشد. $J(D)$ را محاسبه کنید

اثبات: چون تنها ایده‌آل‌های حلقه تقسیم D، خودش و صفر هستند لذا تنها ایده‌آل ماکسیمال آن صفر است پس

$$J(D)=\bigcap_{M \text{ max}} M = 0$$

(15) فرض کنید M، R-مدول متناهی مولد باشد. N زیرمدول از M اگر I ایده‌آل چپی از R باشد که $J\subseteq J(R)$ و $M=N+IM$ ثابت کنید $N=M$.

اثبات: چون M متناهی مولد است پس $\frac{M}{N}$ نیز متناهی مولد است لذا

$$I\left(\frac{M}{N}\right)=\frac{IM+N}{N} \overset{\text{فرض سوال}}{=} \frac{M}{N} \Rightarrow \boxed{I\left(\frac{M}{N}\right)=\frac{M}{N}}$$

لذا طبق لم ناکایاما داریم $\frac{M}{N}=0 \Leftarrow \boxed{M=N}$

(16) فرض کنید M، R-مدول متناهی مولد باشد. I ایده‌آل چپی از R که $I\subseteq J(R)$. همچنین فرض کنید $\{m_1,\dots,m_n\}$ مجموعه مولد مینیمال برای M باشد. یعنی مجموعه مولد باشد و زیر مجموعه‌ای سره از آن وجود نداشته باشد که M را تولید کند. ثابت کنید فرض‌های $M\neq 0$ و $IM=M$ تو آماگ با تناقض منجر می‌شود. حال این مساله را ثابت دیگری برای کرام تقدیم ارائه کردیم.

(17) فرض کنید R حلقه جابجایی شرکتی باشد با این ویژگی که فقط تعداد متناهی ماکسیمال در R وجود دارد ثابت کنید $J(R)=0$ و $|Max(R)|=\infty$.

اثبات: (فرض خلف) $J(R)\neq 0$ لذا اگر $t\in J(R)$ و $t\neq 0$ آنگاه بنابر لم $1-at$ وارون‌پذیر است $a\in R$ اما چون R متناهی مولد است لذا تعداد $1-at$ ها نیز متناهی است و این تناقض با فرض سوال است لذا $t=0$ پس $J(R)=0$

۲۰

(18) فرض کنید R حلقه جابجایی شد، $(R[x_1,\dots,x_n])$ را بررسی کنید

(19) فرض کنید R حلقه جابجایی شد و I ایده‌آلی از R اگر $\sqrt{I}$ متناهی مولد باشد ثابت کنید عدد طبیعی مانند n موجود است که $(\sqrt{I})^n \subseteq I$

اثبات: فرض کنیم $\sqrt{I} = \langle a_1, \dots, a_r \rangle$ لذا

$$\forall i \in \{1,\dots,r\} \quad a_i \in \sqrt{I} \Rightarrow \forall i=1,\dots,r \ \exists n_i \in \mathbb{N} \ s.t \quad a_i^{n_i} \in I$$

کار را ادامه دهیم $k = \max\{n_i ; a_i^{n_i} \in I\}$ حال ادعا کنیم اگر $n = rk$ آنگاه $(\sqrt{I})^n \subseteq I$

$$\text{Since } \forall i=1,\dots,n \quad a_i^k \in I \xrightarrow{k=rk} \forall i=1,\dots,n \quad a_i^n \in I$$

لذا

$$(\sqrt{I})^n \subseteq I .$$

(2) فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی شد و I و J ایده‌آل‌هایی متناهی مولد از R ثابت کنید

$$\Gamma_I(-) = \Gamma_J(-) \iff \sqrt{I} = \sqrt{J} .$$