۱- اثبات: $\Sigma=\{K\leq M : N\subseteq K, x\notin K\}$ ، $x\in M/N$ ، $N\neq N$ ، $\Sigma\neq\phi$ ، $N\in\Sigma$
فرض کنیم $\{K_i\}_{i\in I}$ ، Λ یک زنجیر از عناصر Σ با رابطه $\subseteq$ باشد. قرار دهید $K\leq\bigcup_{i\in I}K_i$ حال فرض کنیم $x,y\in K$ پس $x\in K_t$ و $y\in K_s$ عضوهایی مثل t,s در I موجودند که $x\in K_s$ و $y\in K_t$ چون Λ یک زنجیر است پس $K_t\subseteq K_s$ یا $K_s\subseteq K_t$ فرض کنیم $K_s\subseteq K_t$ پس داریم:

$$\left.\begin{matrix}x\in K_t\\ y\in K_t\end{matrix}\right\}\Rightarrow x+y\in K_t\ (K_t\leq M)\Rightarrow (x+y)\in K \Rightarrow K\leq M$$
$$r.x\in K_t\ (K_t\leq M)\Rightarrow r.x\in K$$

وضوح تعریف Σ دلیم که $\forall i\in I\ x\notin K_i\Rightarrow x\in\bigcup_{i\in I}K_i\Rightarrow x\notin K$ و همچنین K یک کران بالا برای Λ است پس هر زنجیر ناتهی از عناصر Σ دارای یک کران بالا در Σ پس طبق لم زرن Σ دارای یک عضو ماکسیمال مثل N' است پس $N'\in\Sigma$ ، $x\notin N'$ ، $N\subseteq N'$ ، $N'\neq M$ واضح است که N' یک مدول ماکسیمال است که دارای خواص Σ است. فرض کنیم ماکسیمال نباشد یعنی K' زیرمدولی از M باشد که شرایط Σ را دارد و $K'\leq M$ و $K'\neq N'$ و با ماکسیمال بودن N' در تناقض است پس N' که عضو ماکسیمال است.

۲- مثال $K=\{(x,x) : x\in\mathbb{R}\}$ ، $N=\{(x,x) : x\in\mathbb{R}\}$
$L=\{(x,0) : x\in\mathbb{R}\}$

$$x\in K+(L\cap N)\Rightarrow x=k+y\quad k\in K,\ y\in L\cap N$$
$$y\in N,\ y\in L\Rightarrow\begin{cases}x=k+y & k\in K,\ y\in N\Rightarrow k\in N\Rightarrow x\in N\\ x=k+y & k\in K,\ y\in L\quad x\in K+L\end{cases}\Rightarrow x\in N\cap(L+K)$$
$$K+(L\cap N)\subseteq N\cap(L+K)\ \textcircled{1}$$

$$\text{if } x\in N\cap(K+L)\Rightarrow\begin{cases}x\in N\\ x\in K+L\Rightarrow x=k+l\ : k\in K,\ l\in L\end{cases}\Rightarrow l=x-k\Rightarrow\begin{matrix}l\in N\\ l\in L\end{matrix}\Rightarrow l\in N\cap L$$
$$k\subseteq N\Rightarrow k\in N$$
$$\Rightarrow x=k+l\Rightarrow x\in K+(N\cap L)\Rightarrow N\cap(K+L)\subseteq K+(N\cap L)\ \textcircled{2}$$
$$\textcircled{1},\textcircled{2}\quad N\cap(K+L)=K+(N\cap L)$$

۳- $(Q,+1)$ متناهی مولدنیست بعنوان یک گروه آبلی ولی Q بعنوان Q-مدول متناهی مولد است و با عنصر 1_Q تولید میشود.
$(\mathbb{R},+1)$ بعنوان گروه آبلی متناهی مولدنیست ولی $\mathbb{R}$ بعنوان $\mathbb{R}$-مدول متناهی مولد با عنصر $1_{\mathbb{R}}$ تولید میشود.

۴- $\Gamma_I(M)=\bigcup_{n\geq 0}(0:_M I^n)$ که در آن $(0:_M I^n)=\{x\in M : I^n x=0\}$
if $x,y\in\Gamma_I(M)$ ، $r\in R$
$\Rightarrow x\in\bigcup(0:_M I^n)\Rightarrow$ بدیهی از اجتماع است $\Rightarrow x\in(0:_M I^n)=\{x'\in M : I^n.x=0\}$
$\Rightarrow I^n.x=0$ for some $n\in\mathbb{N}_0$
$y\in\bigcup(0:_M I^n)\Rightarrow y\in(0:_M I^n)=\{x'\in M : I^n.x=0\}\Rightarrow I^{n'}.y=0$ for some $n'\in\mathbb{N}$.
قرار دهید $n_1=\max\{n',n\}\Rightarrow I^{n_1}(x+y)=0\Rightarrow x+y\in\Gamma_I(M)$ ①
$r.x\in M$ ، $x\in\Gamma_I(M)\Rightarrow I^n.x=0$ for some $n\in\mathbb{N}$,
if $k=n\Rightarrow I^n.(rx)=0$ for some $k\in\mathbb{N}$. $\Rightarrow r.x\in\Gamma_I(M)$ ②
①,② $\Gamma_I(M)\leq M$

تمرینات فصل 2.

۲.

$\Gamma_I(\varphi):\Gamma_I(M)\longrightarrow\Gamma_I(N)$ $\qquad \varphi:M\longrightarrow N$ R-homo

$x\longmapsto \varphi(x)$

if $x_1=x_2\Rightarrow \varphi(x_1)=\varphi(x_2)\Rightarrow \Gamma_I(\varphi)$ well define.

$x\in\Gamma_I(M)\Rightarrow x=I^n.x=0$ for som $n\in\mathbb{N}$, if $n\le k\Rightarrow I^k.\varphi(x)\in\Gamma_I(N)$

$\Gamma_I(\varphi)(x+y)=\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$ (φ is R-homo)

$\Gamma_I(\varphi)(r.x)=\varphi(rx)=r\varphi(x)$ (φ is R-homo) $\Rightarrow \Gamma_I(\varphi)$ is R-homo

---

۳. $\varphi:M\to N$ epi $\quad K,L\le M\quad M=K+L$, $K\cap L=\ker\varphi\quad N=?\ \varphi(K)\oplus\varphi(L)$

$x\in N\quad \exists m\in M:\varphi(m)=x\qquad M=K+L\Rightarrow m\in M\Rightarrow m=k+l\quad k\in K,\ l\in L$

$x=\varphi(k+l)=\varphi(k)+\varphi(l)\in\varphi(K)+\varphi(L)\Rightarrow N\subseteq\varphi(K)+\varphi(L)$ ①

$x\in\varphi(K)+\varphi(L)\Rightarrow x=\varphi(k)+\varphi(l)\ :k\in K,\ l\in L$

$\Rightarrow\varphi(k+l)\qquad M=K+L\Rightarrow x\in\varphi(K+L)=\varphi(M)=N$ (φ epi) $\Rightarrow x\in N\Rightarrow\varphi(K)+\varphi(L)\subseteq N$ ②

①, ② $N=\varphi(K)+\varphi(L)$

$x\in\varphi(K)\cap\varphi(L)\Rightarrow\begin{cases}x\in\varphi(K)\\ x\in\varphi(L)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in\varphi(K)\ \Rightarrow\ k\in K\ x=\varphi(k)\\ x\in\varphi(L)\quad x=\varphi(l)\ \ l\in L\end{cases}\Rightarrow\varphi(k)=\varphi(l)\Rightarrow\varphi(k-l)=0$

$\Rightarrow k-l\in\ker\varphi$

$\Rightarrow K-L\subseteq\ker\varphi=L\cap K$, $\quad K-L\not\subseteq L\cap K\Rightarrow\varphi(K)\cap\varphi(K)=0$

$\Rightarrow N=\varphi(K)\oplus\varphi(L)$

---

۴. $L\in(N:_R K)\Rightarrow x\in\{r\in R:rK\subseteq N\}=\{r\in R:rK+N=0\}$

$=\{r\in R:r(K+N)=0\quad K+N\in K+N\}=Ann_R(K+N/N)\Rightarrow(N:_R K)\subseteq Ann\left(\frac{K+N}{N}\right)$ ②

$x\in Ann\left(\frac{K+N}{N}\right)=\{r\in R:r(K+N)=0\quad K+N\in\frac{K+N}{N}\}$

$=\{r\in R:rK+N=0\}=\{r\in R:rK\subseteq N\}=(N:_R K)\Rightarrow Ann\left(\frac{K+N}{N}\right)\subseteq(N:_R K)$ ①

②, ① $Ann\left(\frac{K+N}{N}\right)=(N:_R K)$

---

۵. $X\subseteq Y$ ، $S,T\subseteq R$ ، $X,Y\subseteq M$

$x\in Ann_R(Y)=\{r\in R:rY=0\}$

$X\subseteq Y\Rightarrow x\in\{r\in R:rX=0\}\Rightarrow Ann_R(Y)\subseteq Ann_R(X)$.

if $S\subseteq T$, $x\in Ann_M(T)=\{x\in M:Tx=0\}$ $\quad S\subseteq T\Rightarrow Sx=0$.

$\Rightarrow x\in\{x\in M:Sx=0\}=Ann_M(S)\Rightarrow Ann_M(T)\subseteq Ann_M(S)$.

۶

۶. M یک R-مدول، I_1, I_2 ایدئال‌های R و $I_1 \supseteq I_2$ است. $Ann_M(I_2)$ یک R/I_2-مدول است.

$$Ann_M(I_2) = \{x \in M : I_2 \cdot x = 0\}$$

$$\varphi : R/I_2 \times Ann_M(I_2) \longrightarrow Ann_M I_2$$
$$(r + I_2, x) \longrightarrow r \cdot x$$

$$(r_1 + I_2, x_1) = (r_2 + I_2, x_2)$$
$$\Rightarrow r_1 + I_2 = r_2 + I_2 \Rightarrow r_1 - r_2 \in I_2 \;,\; x_1 = x_2$$
$$x_1, x_2 \in M \Rightarrow I_2 \cdot x_1 = 0 \Rightarrow (r_1 - r_2) \cdot x_1 = 0$$
$$r_1 x_1 = r_2 x_2 \Rightarrow \varphi \text{ is w.d.}$$

۱) $(r + I_2)(x + y) = r(x+y) = rx + ry = (r + I_2) \cdot x + (r + I_2) \cdot y$

۲) $(r + I_2)((r' + I_2) \cdot x) = (r + I_2)(r' \cdot x) = rr' \cdot x = (rr' + I_2) \cdot x = ((r + I_2)(r' + I_2)) \cdot x$

۳) $((r + I_2) + (r' + I_2)) \cdot x = (r + r' + I_2) \cdot x = (r + r') \cdot x = rx + r' \cdot x$
$$= (r + I_2) \cdot x + (r' + I_2) \cdot x$$

۴) $1 \cdot x = (1 + I_2) \cdot x = x$

$\Rightarrow Ann_M(I_2)$ be an R/I_2-module.

$$A'$$

$$x \in Ann_{Ann_M I_2}(I_1/I_2) = \{x \in Ann_M(I_2) : (I_1/I_2) \cdot x = 0\}$$

$$= \{x \in M : I_2 \cdot x = 0 \;,\; (I_1/I_2) \cdot x = 0\} = \{x \in M : I_2 \cdot x = 0 \;\; (i_1 + I_2) \cdot x = 0 \;\; \forall i_1 \in I_1\}$$

$$= \{x \in M : i_1 \cdot x = 0 \;\; \forall i_1 \in I_1\} = \{x \in M : I_1 \cdot x = 0\} = Ann_M I_1 \qquad A' \subseteq A_M(I_1)$$

~~$x \in A_{Ann_M}(I_1) = \{x \in M : I_1 \cdot x = 0\} = \{x \in M : i_1 \cdot x = 0 \;\forall i_1 \in I_1\}$~~

چون $I_1 \subseteq I_2$ این می‌توانیم بنویسیم:

~~$= \{x \in M : (i_1 + I_2) \cdot x = 0\}$~~ $= \{x \in M : (I_2 / I_2) \cdot x = 0\}$

$$= \{x \in M : I_2 \cdot x = 0 \;,\; (I_2/I_2) \cdot x = 0\} = \{x \in A_{Ann_M}(I_2) : (I_1/I_2) \neq 0\}$$

$$= Ann_{Ann_M(I_2)}(I_1/I_2) \Rightarrow A' = Ann_M(I_1)$$

---

۷. $\varphi : M \longrightarrow M$ R-homo , $\varphi^2 = \varphi$ $\qquad M \overset{?}{=} \ker\varphi \oplus Im\varphi$

$m \in M$

$m = \varphi(m) + (m - \varphi(m))$ $\qquad \varphi(m) \in \varphi(M) = Im\varphi$

$$\Rightarrow M = \ker\varphi + Im\varphi$$

$\varphi(m - \varphi(m)) = \varphi(m) - \varphi^2(m) = 0 \Rightarrow m - \varphi(m) \in \ker\varphi$

if $x \in \ker\varphi \cap Im\varphi \Rightarrow \begin{cases} \varphi(x) = 0 \\ x \in Im\varphi = \{\varphi(x) : x \in M\} \end{cases}$

$$\Rightarrow x = 0 \Rightarrow M = \ker\varphi \oplus Im\varphi$$

---

۱۱. $M \to M$: φ هم‌ریختی یوشا $M = \varphi(M)$ و φ عضو $End_R(M)$ است. مجموعه $End_R(M)$ تحت جمع توابع و ترکیب توابع تشکیل یک حلقه می‌دهند، M یک $End_R(M)$-مدول است. فرض کنیم $S = \{\sum a_i \varphi^i : a_i \in R\} \subseteq End_R(M)$ و تعریف کنیم $(\sum a_i \varphi^i)m = \sum a_i \varphi^i(m)$ M یک S-مدول است فرض کنیم $I = \langle \varphi \rangle$ ایدئال S است بین $M \supseteq IM$ ، $M = \varphi(M)$ نشان دهید $(1 - \varphi)M = 0$ حال اگر $m \in \ker\varphi$ آنگاه $\sum a_i \varphi^i = 0$ طرف سوال

$$\Rightarrow m \in \ker\varphi \Rightarrow \begin{cases} \varphi(m) = 0 \\ (1 - \varphi)M = 0 \Rightarrow (1 - \varphi)m = 0 \Rightarrow m - \varphi(m) = 0 \Rightarrow m = \varphi(m) \;,\; \varphi(m) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m = 0 \Rightarrow \varphi \text{ 1-1}$$

۱۴- M, N be an R-modules, I is an ideal of R that $IM = 0$, $IN = 0$.

$\Rightarrow M, N$ be R/I-modules $\nexists \varphi : M \to N$ R-Hom $\Leftrightarrow$ $\varphi : M \to N$ R/I homo

if $\varphi : M \to N$ R-homo $\quad \forall x, y \in M,\ r + I \in R/I$

$R/I \times M \to M$
$(r+I, x) \to rx$

$\Rightarrow \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ (φ R-homo)

$\varphi((r+I)\cdot x) = \varphi(r \cdot x) = r\varphi(x)$ (φ R homo)

$\Rightarrow R\varphi$ is R/I homo.

if $\varphi : M \to N$ R/I homo $\quad x, y \in M,\ r \in R$

$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ (φ R/I homo)

$\varphi(r \cdot x) = \varphi((r+I)\cdot x) = (r+I)\varphi(x) = r \cdot \varphi(x)$

$\Rightarrow \varphi$ is R-homo.

۱۱- $T(M) = \{ x \in M : Ann(x) \neq 0 \}$ $\quad Ann(x) = \{ r \in R : rx = 0 \}$

if $x, y \in T(M)$

$x \in T(M) \Rightarrow Ann(x) \neq 0 \Rightarrow \exists r_1 \neq 0 : r_1 x = 0$ (R حوزه صحیح)

$y \in T(M) \Rightarrow Ann(y) \neq 0 \Rightarrow \exists r_2 \neq 0 : r_2 y = 0$

$\Rightarrow r_1 r_2 \neq 0$ (R حوزه صحیح) $\Rightarrow (r_1 r_2)(x+y) = r_1 r_2 x + r_1 r_2 y = r_2(r_1 x) + r_1(r_2 y) = 0$

$\Rightarrow r_1 r_2 (x+y) = 0 \Rightarrow r_1 r_2 \in Ann(x+y) \neq 0 \Rightarrow Ann(x+y) \neq 0 \Rightarrow x+y \in T(M)$ ①

$Ann(x+y) = \{ r \in R : r(x+y) = 0 \} = \{ r \in R : rx + ry = 0 \}$

$r \in R,\ x \in T(M) \Rightarrow Ann(x) \neq 0 \quad Ann(rx) = \{ r' \in R : r' \cdot rx = 0 \}$

$x \in M,\ r \in R \Rightarrow rx \in M \quad \exists r_1 : r_1 x = 0 \quad = \{ r' \in R : (r' r) \cdot x = 0 \} \Rightarrow Ann(rx) \neq 0$

$Ann(rx) \neq 0$? $\quad r_1(rx) = 0 \Rightarrow r_1 \neq 0,\ Ann(rx) \neq 0 \Rightarrow rx \in T(M)$

① $\Rightarrow r \cdot x \in T(M) \Rightarrow$ ①, ② $\Rightarrow T(M) \leq M$ (R حوزه صحیح جابجایی)

$x \in T(\underbrace{M/T(M)}_{M'}) \Rightarrow x \in \{ m + T(M) : Ann(m + T(M)) \neq 0 \}$

$\Rightarrow x = m' + T(M) : Ann(m' + T(M)) \neq 0$

$Ann(m' + T(M)) = \{ r \in R : r(m' + T(M)) = 0 \} = \{ r \in R : r \cdot m' + T(M) = 0 \}$

$= \{ r \in R : rm' \in T(M) \} \Rightarrow Ann(rm') \neq 0 \Rightarrow Ann(m') \neq 0 \Rightarrow m' \in T(M)$

$\Rightarrow x \in T(M) \Rightarrow T(M/T(M)) = 0$

$x \in T(M/T(M)) \Rightarrow x = m + T(M) \quad Ann(m + T(M)) \neq 0$

$\exists r_1 \neq 0 \ \exists r_1 \in R \quad m + T(M) : m \in M \Rightarrow r_1(m + T(M)) = 0$

$\Rightarrow r_1 \neq 0 \Rightarrow r_1 m + T(M) = 0 \Rightarrow r_1 m \in T(M) \Rightarrow \Rightarrow Ann(r_1 m) \neq 0$

$\exists r_2 \in R \quad r_2 r_1 m = 0 \Rightarrow (r_2 r_1) m = 0 \Rightarrow r_2 m = 0 \quad 0 \neq r_2 \in Ann(m) \neq 0$

R حوزه صحیح $r_1 r_2 \neq 0$

$Ann(m) \neq 0 \Rightarrow m \in T(M) \Rightarrow x = m + T(M) \Rightarrow x \in T(M) \Rightarrow T(M/T(M)) = 0$

۱۱. اگر N و $\frac{M}{N}$ متناهی مولد باشند، M متناهی مولد است ← short exact: $0 \to N \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} K \xrightarrow{\pi} 0$

$\operatorname{Im}\varphi = \ker\psi$ $\quad \operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(x) : x \in N\}$, N f.g

$x \in N \Rightarrow x = Rn_1 + \dots + Rn_n \Rightarrow \varphi(x) = R\varphi(n_1) + \dots + R\varphi(n_n)$

$\Rightarrow \operatorname{Im}\varphi$ is f.g, $\operatorname{Im}\varphi = \ker\psi \Rightarrow \ker\psi$ is f.g

if sequence is exact, ψ is onto $\Rightarrow \operatorname{Im}\psi = K$, K is f.g

$\Rightarrow \operatorname{Im}\psi$ is f.g

$\operatorname{Im}\psi$ and $\ker\psi$ are f.g $\Rightarrow \psi : M \to N$ is R-homo $\Rightarrow M$ is f.g

---

۱۸. $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3$ دنباله دقیق، φ یک‌به‌یک

$x \in M_2$, ψ onto $\Rightarrow \exists\, m_1 \in M_1$ s.t $\varphi(m_1) = x$

$\operatorname{Im}\varphi = \ker\psi = M_2$,

ψ 1-1 $\Rightarrow \ker\psi = 0 \Rightarrow \operatorname{Im}\varphi = 0 \Rightarrow M_2 = 0$

۱۹. $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{f} M_3 \xrightarrow{\psi} M_4$ $\quad \psi$ یک‌به‌یک $\iff \varphi$ پوشا

if φ is onto, $x \in \ker\psi = \{m_2 \in M_2 : \psi(m_2) = 0\}$

$\operatorname{Im}\varphi = M_2 = \ker f$ $\quad$ if $x \in \ker\psi = \operatorname{Im} f \Rightarrow x = f(y)$ $\quad y \in M_2$ پوشا است φ

$\Rightarrow \exists\, m_1 \in M_1$ s.t $\varphi(m_1) = y \Rightarrow x = f(\varphi(m_1)) = 0 \Rightarrow f$ 1-1

برعکس: فرض کنیم ψ 1-1، $x \in M_2$ و $f(x) \in \operatorname{Im} f$ ← $f(x) \in \ker\psi$, ψ 1-1 ← $f(x) = 0$, $x \in \ker f$

$\ker f = \operatorname{Im}\varphi \Rightarrow x \in \operatorname{Im}\varphi \Rightarrow M_2 \subseteq \operatorname{Im}\varphi$, $\operatorname{Im}\varphi \subseteq M_2 \Rightarrow \operatorname{Im}\varphi = M_2 \Rightarrow \varphi$ پوشا است

---

۲۰. $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{f} M_3 \xrightarrow{g} M_4 \xrightarrow{\psi} M_5$, $M_3 = 0 \leftarrow \psi$ 1-1, φ پوشا

فرض کنید $a \in M_3$ پس $g(a) \in \operatorname{Im} g$, $\operatorname{Im} g = \ker\psi$, ψ 1-1 $\leftarrow g(a) = 0$, $a \in \ker g$

$\ker g = \operatorname{Im} f$, $a \in \ker g \Rightarrow a \in \operatorname{Im} f \Rightarrow a = f(b)$: $b \in M_2$

φ پوشا است پس $c \in M_1$ طوری $b = \varphi(c)$,

$\Rightarrow a = f(\varphi(c)) = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow M_3 = 0$

تمرین سری ۲ (ادامه)

۱- $K', K, L, L' \leq M$ مفروض $\Rightarrow \frac{L+L'}{L} \cong \frac{L'}{L\cap L'} \Rightarrow \frac{M}{L} \cong \frac{L'}{0} = L'$

$L\cap L' = 0$ $\quad M = L\oplus L' = K\oplus K'$

$K\cap K' = 0$ $\quad K \leq L$

$\Rightarrow \frac{M}{L} = \frac{M}{K} \cong K'$

$\frac{K+K'}{K} \cong \frac{K'}{K'\cap K} \Rightarrow \frac{M}{K} = \frac{M}{L} \cong K' \Rightarrow L' \cong K'$

۹- $\varphi: M \to M$, $rM \subseteq IM$ $\quad m \mapsto rm$

$\Rightarrow \varphi(M) = \{rm : m\in M\} = rM \subseteq IM \Rightarrow \varphi(M) \subseteq IM$

شرایط سؤال ۸ برقرار است.

$\varphi(\varphi(m)) = \varphi(rm) = r^2 m$

$\Rightarrow \varphi^n(m) = r^n m$

$\varphi^n + a_1\varphi^{n-1} + \cdots + a_n|_M = 0$

$\Rightarrow r^n m + \cdots + a_n|_M = 0 \Rightarrow m(r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n) = 0 \Rightarrow m(r^n + a_1' + \cdots + a_n') = 0$ $\quad a_i' \in I$

$\Rightarrow m(r^n + s) = 0 \Rightarrow (r^n + s)M = 0$ $\quad s \in I$

۱۰- $\varphi: M \to M$ $\quad m \mapsto m$ $\Leftarrow$ $\varphi(M) = M$ وچون زمن سؤال $IM \subseteq M = \varphi(M)$ شرایط سؤال ۸ برقرار است.

$(1-a)M = 0$ $\Leftarrow$ $r = 1$ و $s = -a$ در سؤال ۹ قرار دهیم

۱۱- if $r \in A_m(P/P^2) = \{r\in P : r(P/P^2) = 0\} \Rightarrow rP \subseteq P^2$ $\quad r \in P$

if $P = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle \Rightarrow P^2 = \langle a_i a_j \mid 1 \leq i, j \leq n\rangle$ suppose $\varphi: P \to P$, $p \mapsto rp$

$\varphi(P) = \{rp \mid p\in P\} = rP \Rightarrow \varphi(P) \subseteq rP \subseteq P\cdot P$

$\Rightarrow r^n P + \cdots + a_n \varphi P = 0 \Rightarrow P(r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n) = 0$ $\quad P \neq 0$ $\Rightarrow r^n = -\sum_{i=1}^{n} a_i r^{n-i} \in P$

$\Rightarrow r^n \in P \Rightarrow r \in P \Rightarrow A'_m(P/P^2) \subseteq P$

۱۰- ثابت کنید دنباله دقیق صورت زیر وجود دارد و f یک به یک است اگر و تنها اگر $\bar{f}$ یک به یک باشد.

$$\begin{array}{ccccccc} M' & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & M'' & \to & 0 \\ \downarrow\alpha & & \downarrow\beta & & \downarrow\gamma & & \\ 0 \to N' & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{g} & N'' & & \end{array}$$

$$\ker\alpha \xrightarrow{\bar{f}} \ker\beta \xrightarrow{\bar{g}} \ker\gamma \xrightarrow{\delta} \frac{N'}{\mathrm{Im}\alpha} \xrightarrow{\bar{f}} \frac{N}{\mathrm{Im}\beta} \xrightarrow{\bar{g}} \frac{N''}{\mathrm{Im}\gamma}$$

$\bar{f} = f|_{\ker\alpha}$ $\quad \bar{\varphi}(n' + \mathrm{Im}\alpha) = \varphi(n') + \mathrm{Im}\beta$

$\bar{g} = g|_{\ker\beta}$ $\quad \bar{\psi}(n + \mathrm{Im}\beta) = \psi(n) + \mathrm{Im}\gamma$

$\ker\beta \subseteq M \Rightarrow \mathrm{Im}\bar{f} = \{\bar{f}(m) : m\in M'\} = \{f(m) : m\in M'\} = \mathrm{Im} f$

$\ker\bar{g} = \{x\in M : \bar{g}(x) = 0\} = \{x\in M : g(x) = 0\} = \ker g$ $\quad \mathrm{Im}\bar{f} = \ker\bar{g}$

$\text{Im}\bar{g} = \{\bar{g}(m) : \} = \{g(m) : m \in M\} = \text{Im}\, g$ $\quad \text{Im}\beta \subseteq N$

$\text{Im}\bar{\varphi} = \{\varphi(n') + \text{Im}\beta : n' + \text{Im}\alpha \in N'/\text{Im}\alpha\}$ $\quad \text{Im}\alpha \subseteq N'$

$\ker\bar{\varphi} = \{n + \text{Im}\beta \in N/\text{Im}\beta : \varphi(n) + \text{Im}\gamma = 0\}$

if $m'' \in \ker\gamma \Rightarrow \gamma(m'') = 0$ $\quad m'' \in M''$ ، چون $\exists m \in M$ s.t $m'' = g(m)$ تعریف تابع id:

$\Rightarrow \beta g(m) = 0 \Rightarrow \varphi\beta(m) = 0 \Rightarrow \beta(m) \in \ker\varphi = \text{Im}\varphi$

$\Rightarrow \beta(m) = \varphi(n')$ $\quad n' \in N'$ چون φ 1-1 $\Rightarrow$ n' is unique.

$d : \ker\gamma \longrightarrow N'/\text{Im}\alpha$

$m'' \longmapsto n' + \text{Im}\alpha$

if $m''_1 = m''_2 \Rightarrow g(m''_1) = g(m''_2)$

$\exists n'_1, n'_2 \in N' : \varphi(n'_1) = \beta(m''_1)$

$\varphi(n'_2) = \beta(m''_2) \Rightarrow n'_1 + \text{Im}\alpha = n'_2 + \text{Im}\alpha$

$\Rightarrow$ d is w.d

علت خوش تعریفی:

$m''_1 - m''_2 = 0 \Rightarrow g(m''_1 - m''_2) = 0 \Rightarrow m''_1 - m''_2 \in \ker g = \text{Im} f$

$f(m') = m''_1 - m''_2 \Rightarrow \beta(f(m')) = \beta(m''_1 - m''_2)$

$\varphi(n'_1 - n'_2) = \beta(m''_1) - \beta(m''_2) = \beta f(m') \Rightarrow \varphi(n'_1 - n'_2) = \varphi\alpha(m') \Rightarrow n'_1 - n'_2 = \alpha(m')$ (φ 1-1)

$n'_1 - n'_2 \in \text{Im}\alpha \Rightarrow n'_1 + \text{Im}\alpha = n'_2 + \text{Im}\alpha$ ✓

برای توجیه تعریف ما می‌توانیم دید که d یک همریختی است.

$\text{Im}\, d = \{n' + \text{Im}\alpha : m'' \in \ker\gamma\}$ $\quad m'' \in \ker\gamma \to \gamma(m'') = 0 \cdot \gamma g(m) = 0$

چون g

$\to \varphi\beta(m) = 0$ $\quad \beta(m) \in \ker\varphi = \text{Im}\varphi$

$n' \in N' : \beta(m) = \varphi(n') = \varphi(n') \in \text{Im}\beta \Rightarrow \Rightarrow \ker\bar{\varphi} = \text{Im}\, d$

$\ker\bar{\varphi} = \{n' + \text{Im}\alpha : \varphi(n') + \text{Im}\beta = 0\} = \{n' + \text{Im}\alpha : \varphi(n') + \text{Im}\beta\}$

$\ker d = \{m'' \in \ker\gamma : n' + \text{Im}\alpha = 0\} = \{g(m), m \in M, n' \in \text{Im}\alpha\} = \text{Im}\bar{g}$

اثر f 1-1 باشد چون f تحدید آن به $\ker\alpha$ است پس آن نیز 1-1 است.

اثر $\bar{\varphi}$ پوشا باشد $\Leftarrow$

$n'' + \text{Im}\gamma \in N''/\text{Im}\gamma$ $\quad m'' \in N''$ ، γ پوشا $\Rightarrow \exists n \in N$ s.t $n'' = \varphi(n)$

$\Rightarrow n \in N \to n + \text{Im}\beta \in N/\text{Im}\beta$

$\Rightarrow \bar{\varphi}(n + \text{Im}\beta) = n'' + \text{Im}\gamma \Rightarrow$ $\bar{\varphi}$ پوشا

۱۱) الف) α_1 پوشا، α_2، α_4 یک‌به‌یک $\Leftarrow$ α_3 یک‌به‌یک

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \xrightarrow{f_1} & M_2 & \xrightarrow{f_2} & M_3 & \xrightarrow{f_3} & M_4 & \xrightarrow{f_4} & M_5 \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_1} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_2} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_3} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_4} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_5} \\ N_1 & \xrightarrow[f'_1]{} & N_2 & \xrightarrow[f'_2]{} & N_3 & \xrightarrow[f'_3]{} & N_4 & \xrightarrow[f'_4]{} & N_5 \end{array}$$

α_5 یک‌به‌یک، α_2 و α_4 پوشا $\Leftarrow$ α_3 پوشا.

الف)

Let $x \in \ker \alpha_3 \Rightarrow \alpha_3(x) = 0 \Rightarrow f'_3\alpha_3(x) = 0 \Rightarrow \alpha_4 f_3(x) = 0 \xrightarrow[1-1]{\alpha_4} f_3(x) = 0$

$\Rightarrow x \in \ker f_3 = \mathrm{Im} f_2 \Rightarrow x = f_2(m_2) \Rightarrow \alpha_3(x) = \alpha_3 f_2(m_2) = 0$

$\Rightarrow f'_2\alpha_2(m_2) = 0 \Rightarrow \alpha_2 m_2 \in \ker f'_2 = \mathrm{Im} f'_1 \Rightarrow \alpha_2(m_2) = f'_1(n_1) \quad n_1 \in N_1$

چون α_1 پوشا $\Rightarrow \exists\, m_1 \in M_1$ s.t $n_1 = \alpha_1(m_1)$

$\Rightarrow \alpha_2(m_2) = f'_1(\alpha_1(m_1)) = \alpha_2 f_1(m_1) \Rightarrow \alpha_2(m_2) - \alpha_2(f_1(m_1)) = 0$

$\Rightarrow m_2 - f_1(m_1) \in \ker \alpha_2 \quad \alpha_2$ یک‌به‌یک $\Rightarrow m_2 = f_1(m_1)$

$\Rightarrow x = f_2(f_1(m_1)) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \ker \alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3$ یک‌به‌یک

ب) $a \in N_4 \Rightarrow f'_4(a) \in N_4$ چون α_4 پوشا $\exists\, m_4 \in M_4 \quad \alpha_4(m_4) = f'_4(a)$ *

$f'_4 f'_3(a) = f'_4\alpha_4(m_4) \Rightarrow f'_4\alpha_4(m_4) = 0 \Rightarrow \alpha_5 f_4(m_4) = 0 \Rightarrow f_4(m_4) \in \ker \alpha_5$

و α_5 یک‌به‌یک $\Rightarrow f_4(m_4) = 0 \Rightarrow m_4 \in \ker f_4 = \mathrm{Im} f_3 \Rightarrow m_4 = f_3(m_3) \quad m_3 \in M_3$

$\Rightarrow \alpha_4(m_4) = \alpha_4 f_3(m_3) \Rightarrow \alpha_4(m_4) = f'_3\alpha_3(m_3)$

$\overset{*}{\Rightarrow} f'_4(a) = f'_4\alpha_4(m_4) \Rightarrow a - \alpha_4(m_4) = 0 \Rightarrow a - \alpha_4(m_4) \in \ker f'_4 = \mathrm{Im} f'_3$

$\Rightarrow a - \alpha_4(m_4) = f'_3(n_3) \quad n_3 \in N_3$ و α_3 پوشا $\Rightarrow \exists\, m_3 \in M_3$ s.t $n_3 = \alpha_3(m_3)$

$\Rightarrow a - \alpha_4(m_4) = f'_3(\alpha_3(m_3)) = \alpha_4(f_3(m_3))$

$\Rightarrow a = \alpha_4(m_4 + f_3(m_3)) \Rightarrow \alpha_4$ پوشا

---

۱۲) $\alpha: A \to A'$ همومورفیسم R-مدول‌ها و α پوشا. β و γ را طوری بیابید که دنباله‌ی زیر دقیق باشد.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & A & \xrightarrow{f_1} & B & \xrightarrow{f_2} & C \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} \\ & & A' & \xrightarrow[g_1]{} & B' & \xrightarrow[g_2]{} & C' \end{array}$$

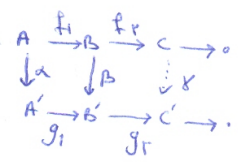
$x \in A \Rightarrow f_1(x) \in B \Rightarrow \beta f_1(x) \in B'$

$g_2\beta f_1(x) \in C'$، $g_2\beta f_1(x) = \gamma f_2 f_1(x) = \gamma(0) = 0 \Rightarrow \beta f_1(x) \in \ker g_2 = \mathrm{Im} g_1$

$\Rightarrow (g_1|_{\mathrm{Im} g_1})^{-1}\beta f_1(x) \in A' \Rightarrow \alpha : A \to A'$ by $\alpha(x) = (g_1|_{\mathrm{Im} g_1})^{-1}\beta(f_1(x))$

$\Rightarrow \beta, f, g$ are R-homo $\Rightarrow \alpha$ is R-homo $\Rightarrow g_1\alpha = \beta f_1(x)$

1/ (۱۲)



let $x \in C \Rightarrow \exists\ b \in B : x = f_2(b)$, $\beta(b) \in B'$

$\Rightarrow g_2\beta(b) \in C' \Rightarrow$ Define $\gamma(x) = g_2\beta(b)$

if $x_1 = x_2 \Rightarrow f_2(b_1) = f_2(b_2) \Rightarrow b_1 - b_2 \in \ker f_2 = \operatorname{Im} f_1$

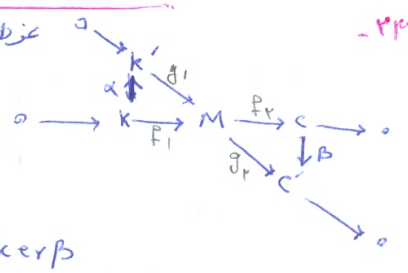
$\Rightarrow f_1(a) = b_1 - b_2 \quad a \in A$

$\beta f_1(a) = \beta(b_1 - b_2) \Rightarrow g_1\alpha(a) = \beta(b_1 - b_2) \Rightarrow \beta(b_1 - b_2) \in \operatorname{Im} g_1 = \ker g_2$

$\Rightarrow g_2\beta(b_1 - b_2) = 0 \Rightarrow g_2\beta(b_1) = g_2\beta(b_2) \Rightarrow$ w.d , $\forall$ R-hom

$\gamma f_2(b) = \gamma(x) = g_2\beta(b) \Rightarrow \gamma f_2 = g_2\beta \Rightarrow$ وجود γ اثبات شد

۲/ب



$g_1\alpha = f_1$

$\beta f_2 = g_2$

let $x + \operatorname{Im}\alpha \in \frac{k'}{\operatorname{Im}\alpha}$, $x \notin \operatorname{Im}\alpha \Rightarrow g_1(x) \in M \quad (x \in k')$

$\Rightarrow f_2 g_1(x) \in C \Rightarrow \beta f_2 g_1(x) = g_2 g_1(x) = 0 \Rightarrow f_2 g_1(x) \in \ker\beta$

if فرض خلف $f_2 g_1(x) = 0 \Rightarrow g_1(x) \in \ker f_2 = \operatorname{Im} f_1 \Rightarrow g_1(x) = f_1(t) : t \in k$

$\Rightarrow g_1(x) = g_1\alpha(t) \Rightarrow 1\text{-}1\ g_1 \Rightarrow x = \alpha(t) \Rightarrow x \in \operatorname{Im}\alpha$ ↯ $\Rightarrow f_2 g_1(x) \neq 0$

($g_1\alpha = f_1$)

$\Rightarrow \ker\beta \neq 0$

$\frac{k'}{\operatorname{Im}\alpha} \neq 0 \Leftarrow \ker\beta \neq 0$ برعکس: نزدیک بین

let $x \neq 0$, $x \in \ker\beta \Rightarrow \beta(x) = 0$

($x \in C$, f_2 پوشا $\Rightarrow \exists\ m \in M : f_2(m) = x$)

$\beta(f_2(m)) = 0 \Rightarrow g_2(m) = 0 \Rightarrow m \in \ker g_2 = \operatorname{Im} g_1 \Rightarrow m = g_1(k') : k' \in k'$

if $k' \in \operatorname{Im}\alpha \Rightarrow k' = \alpha(k) \quad k \in K \Rightarrow g_1\alpha(k) = m \Rightarrow f_1(k) = m$

$\Rightarrow f_2(m) = f_2 f_1(k) = 0 \Rightarrow m \in \ker f_2 \Rightarrow x = 0$ ↯ $\Rightarrow k' \notin \operatorname{Im}\alpha$

($\exists\ n : f_2(m) = n$)

$\Rightarrow \frac{k'}{\operatorname{Im}\alpha} \neq 0$

$\leftarrow k' \notin \operatorname{Im}\alpha$ ثابت میشود

تمرینات فصل ۴:

۱. گروه آبلی $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$ را شناسایی کنید.

if $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Z}$ is $\mathbb{Z}$-homo

$\Rightarrow n\in\mathbb{Z}\quad f(n)=f(n.1)=n f(1)$

$n\times f(\tfrac{1}{n})=f(1)\Rightarrow f(\tfrac{1}{n})=\tfrac{1}{n}f(1)$

$f(\tfrac{m}{n})=m f(\tfrac{1}{n})=\tfrac{m}{n}f(1)$

$\Rightarrow \frac{f(1)}{n}\in\mathbb{Z}\Rightarrow \frac{f(1)}{n}=m\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow f(1)=nm\Rightarrow n\mid f(1)\quad\forall n$

عدد صحیح صفر تنها عدد صحیحی است که بر همه اعداد صحیح بخش‌پذیر است.

$\Rightarrow f(1)=0$

$\Rightarrow f=0\Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z})=0$

---

۲. گروه آبلی $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p^\infty},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ را شناسایی کنید و رتبه هر جمع $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ تواند از p را بیابید.

$\mathbb{Z}_{p^\infty}=\{\frac{a}{p^n}+\mathbb{Z} : a\in\mathbb{Z}, p \text{ is prime}, n=0,1,2,\dots\}\subseteq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

$a\in\mathbb{Z}_{p^\infty}\Rightarrow \exists p: p^n.a=0$

$\varphi\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p^\infty},\mathbb{Q})\Rightarrow \varphi(a)=b\in\mathbb{Q}\Rightarrow p^n.\varphi(a)=b.p^n$ ، φ hom

$\Rightarrow \varphi(\underbrace{p^n.a}_{0})=b.p^n\Rightarrow bp^n=0\Rightarrow p^n\neq 0\Rightarrow b=0\Rightarrow \varphi(a)=0\quad\forall a\in\mathbb{Z}_{p^\infty}$

$\Rightarrow \varphi=0\Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p^\infty},\mathbb{Q})=0$

---

۳. گروه آبلی $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p^\infty},\mathbb{Z})$ را شناسایی کنید: جواب سوال ۲،

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p^\infty},\mathbb{Z})=0$

۴. نشان دهید M,N دو R-مدول باشند و $2M=0, 2N=0$ آنگاه $\mathrm{Hom}_R(M,N)=\mathrm{Hom}_{R/2}(M,N)$

چون $2M=0$، M,N دو $R/2$-مدول هستند

$\cdot: R/2\times M\to M$

$(r+2)x=rx$

$R/2\times N\to N$

$r+2=0\cdot(1+r)$

if $f\in\mathrm{Hom}_R(M,N): f:M\to N$ R-hom

$f(x+y)=f(x)+f(y)\quad x,y\in M$, f is R-homo

if $r+2\in R/2$, $x\in M$ must be show that $f((r+2)x)\overset{?}{=}(r+2)f(x)$

$f((r+2)x)=f(rx)=r f(x)=(r+2)f(x)\Rightarrow f\in\mathrm{Hom}_{R/2}(M,N)$

(تعریف $R/2$-مدول بودن N ، تعریف $R/2$-مدول بودن M ، یک خاصیت ریاضی)

$\Rightarrow \mathrm{Hom}_R(M,N)\subseteq \mathrm{Hom}_{R/2}(M,N)$

if $f\in\mathrm{Hom}_{R/2}(M,N): f:M\to N$ $R/2$ homo $\quad\forall x,y\in M$

$f(x+y)=f(x)+f(y)$ since f is $R/2$-hom

if $r\in R, x\in M\Rightarrow f(rx)\overset{?}{=}r f(x)$

$f(rx)=f((r+2)x)=(r+2)f(x)=r f(x)\Rightarrow f\in\mathrm{Hom}_R(M,N)$

$\Rightarrow \mathrm{Hom}_R(M,N)\leq \mathrm{Hom}_{R/2}(M,N)$

---

۵. فرض کنید R و S دو حلقه باشند و $\varphi:R\to S$ همریختی (حلقه) باشد اگر M,N دو S-مدول چپ باشند ثابت کنید

$\mathrm{Hom}_S(M,N)\leq \mathrm{Hom}_R(M,N)=\mathrm{Hom}_{\varphi(R)}(M,N)\leq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,N)$

چون φ همریختی حلقه‌هاست پس M,N R-مدول چپ نیز هستند، گاه است نشان دهیم $\varphi(R)$-مدول نیز هستند چون $\varphi(R)\subseteq S$ است

$\cdot:\varphi(R)\times M\to M$

$(\varphi(r),m)\to \varphi(r)m$

$\Rightarrow \varphi(R)\times N\to N$

$\varphi(r),y\to \varphi(r)x$

$\Rightarrow M,N$ be $\varphi(R)$-modules

۱۳) if $f,g \in Hom_S(M,N) \Rightarrow \begin{matrix} f:M\to N \\ g:M\to N \end{matrix}$ homo, hom $\Rightarrow f\pm g : M\to N$ رابطه در اینجا برقرار است $\forall x,y\in M$

$(f\pm g)(x+y) = f(x+y) \pm g(x+y) = f(x)+f(y) \pm g(x)+g(y) = (f(x)\pm g(x)) + (f(y)\pm g(y)) = (f\pm g)(x) + (f\pm g)(y)$

$\Rightarrow f+g \in Hom_S(M,N)$ $\forall s\in S, x\in M \Rightarrow (f\pm g)(sx) = f(sx)\pm g(sx) = sf(x)\pm sg(x) = s(f\pm g)(x)$

$f\in Hom_S(M,N) \Rightarrow \forall x,y\in M \Rightarrow f(x+y) = f(x)+f(y)$ تعریف ضرب در R-مدول برون N

$\forall r\in R \Rightarrow f(rx) = f(\varphi(r)\cdot x)$, $\varphi(r)\in S$, f is S-homo $\Rightarrow f(rx) = \varphi(r) f(x)$

$= r f(x)$ ← تعریف ضرب معلق برای R-مدول برون M

$\Rightarrow Hom_S(M,N) \subseteq Hom_R(M,N)$

$Hom_S(M,N) \le Hom_R(M,N)$ بدین $f\pm g$ نیز در $Hom_S(M,N)$, f,g چون ساز ای

if $f\in Hom_R(M,N) \Rightarrow f:M\to N$ R-hom , $\varphi: R\to S$ hom

$x,x'\in M \Rightarrow f(x+x') = f(x)+f(x')$ (f is R-hom)

$\forall \varphi(r)\in\varphi(R), x\in M \Rightarrow f(\varphi(r)\cdot x) = f(rx) = rf(x) = \varphi(r) f(x)$ $\Rightarrow f\in Hom_{\varphi(R)}(M,N)$

$\Rightarrow Hom_R(M,N) \subseteq Hom_{\varphi(R)}(M,N)$ ①

if $g\in Hom_{\varphi(R)}(M,N) \Rightarrow g:M\to N$ $\varphi(R)$-hom , $\varphi: R\to S$ hom

$\forall x,x'\in M \Rightarrow g(x+x') = g(x)+g(x')$ (g is $\varphi(R)$-hom)

$\forall r\in R, x\in M \Rightarrow g(rx) = g(\varphi(r)\cdot x) = \varphi(r)\cdot g(x) = r\,g(x)$ $\Rightarrow g\in Hom_R(M,N)$

$\Rightarrow Hom_{\varphi(R)}(M,N) \subseteq Hom_R(M,N)$ ②

①, ② $\Rightarrow Hom_R(M,N) = Hom_{\varphi(R)}(M,N)$

$\forall f,g\in Hom_{\varphi(R)}(M,N) \Rightarrow \begin{matrix} f:M\to N \\ g:M\to N \end{matrix}$ $\varphi(R)$-hom $f+g: M\to N$

$\forall x,x'\in M \Rightarrow (f\pm g)(x+x') = (f\pm g)(x) + (f\pm g)(x')$ $\Rightarrow f\pm g\in Hom_{\varphi(R)}(M,N)$

$\forall \varphi(r)\in\varphi(R) \Rightarrow (\varphi(r)(f\pm g))(x) = r(f\pm g)(x) = (f\pm g)(rx) = ((\varphi(r)f)\pm g)(x)$

$Hom_{\varphi(R)}(M,N)$ ب Z-مدول است پس $Hom_{\varphi(R)}(M,N) \subseteq Hom_Z(M,N)$ و می دانیم

$\Rightarrow Hom_{\varphi(R)}(M,N) \le Hom_Z(M,N)$

چون ساز $f,g\in Hom_{\varphi(R)}(M,N)$ داریم $\Rightarrow f+g\in Hom_{\varphi(R)}(M,N)$

$Hom_S(M,N) \le Hom_R(M,N) = Hom_{\varphi(R)}(M,N) \le Hom_Z(M,N)$

۶. فرض کنید M, N دو عدد طبیعی باشند که $d = (m,n)$. ثابت کنید $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_d$

$m=dr$, $n=ds$: $(r,s)=1$

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_m \longrightarrow 0 \quad \text{exact}$$

$f(a)=ma$, $g(x)=\bar{x}$

$$\Rightarrow 0 \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}_n) \xrightarrow{g'} Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n) \xrightarrow{f'} Hom(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_m) \quad \text{is exact} \quad , g' \text{ 1-1}$$

$$\Rightarrow \frac{Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}_n)}{\ker g'} \cong Im\, g' = \ker f' \quad , \text{ we show that } \ker f' = \mathbb{Z}_d$$

$Hom(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_n$ چون $h : Hom(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n) \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ که $h \in Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n)$

$$h \longrightarrow h(1)$$

$f'(h) = hof$

$$\ker f' = \{h \mid hof = 0\} = \{h \mid h(f(1)) = 0\} = \{h \mid h(m) = 0\} = \{h \mid mh = 0\} \quad (mh(1) = 0 \text{ در } \mathbb{Z}_n \text{ یعنی } n \mid mh(1))$$

$$= \{h \mid n \mid mh(1)\} = \{h \mid h(1) \in 3\mathbb{Z}_n\} = \{h \mid h(1) \in \mathbb{Z}_d\} = \mathbb{Z}_d$$

توضیح: $3\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_d$ چون $|3| = d$

---

۷. فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد و M، R-مدول. $\theta : R \longrightarrow Hom_R(M,N)$ را صورت $\theta(1) = \theta_1$ تعریف می‌کنیم. ثابت کنید $R \cong M$ اگر و تنها اگر θ یک به یک باشد و M به صورت $\theta_1 : M \to M$ با ضابطه $\theta_1(x) = rx$ تعریف شده است.

$\varphi : R \to M$, $\varphi(r) = ra$, that $M = \langle a \rangle$

if $r_1 = r_2 \Rightarrow \theta_{r_1} = \theta_{r_2} \Rightarrow \theta_{r_1}(a) = \theta_{r_2}(a) \Rightarrow r_1 a = r_2 a \Rightarrow \varphi(r_1) = \varphi(r_2) \Rightarrow \varphi$ is w.d

$\varphi(r_1 + r_2) = (r_1 + r_2)a = r_1 a + r_2 a = \varphi(r_1) + \varphi(r_2) \quad \forall r_1, r_2, r, r' \in R$

$\varphi(rr') = rr'a = r(r'a) = r\varphi(r') \Rightarrow \varphi$ is homo

if $\varphi(r_1) = \varphi(r_2) \Rightarrow r_1 a = r_2 a \Rightarrow \theta_{r_1}(a) = \theta_{r_2}(a) \Rightarrow \theta_{r_1} = \theta_{r_2} \overset{1-1\ \theta}{\Longrightarrow} r_1 = r_2 \Rightarrow \varphi$ is 1-1

φ پوشاست چون $\forall x \in M \leftarrow \exists r \in R$ که $x = ra$ پس $x = \varphi(r)$ یک به یک نیز است یعنی $R \cong M$

---

۸. فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی باشد و M ، N دو R-مدول باشند آیا $Hom_R(M,N)$ نیز متناهی مولد است؟ چرا؟

۱۵/

۹. خانواده‌ی $\{M_i\}_{i\in I}$ از R-مدول‌های مثال بزنید که $\prod_{i\in I} M_i$ ، R-مدول چپ N مثال بزنید که $\mathrm{Hom}_R(\prod M_i, N) \neq \coprod \mathrm{Hom}(M_i, N)$

$R=\mathbb{Z}$ ، $N=\mathbb{Z}$ ، $M_i=\mathbb{Z}_{p_i}$

$f\in \mathrm{Hom}_R(\prod M_i, \mathbb{Z})$ $\quad f: \prod \mathbb{Z}_{p_i} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$(p_i) \longrightarrow p_1 + p_2 + \cdots$

$g_i \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{p_i}, \mathbb{Z})$ $\quad g_i : \mathbb{Z}_{p_i} \longrightarrow \mathbb{Z}$ $\Rightarrow U_{g_i} = \{(p_i)$: p_i هیچ نقاط مشترکی ندارند $\}$

$g_i(p_i) \longrightarrow p_i$

---

۱۴. فرض کنید R حلقه‌ی جابجایی و I ایده‌آلی از R و M یک R-مدول باشد ثابت کنید $\mathrm{Hom}_R(R/I, M) \cong \mathrm{Ann}_M(I)$

$\mathrm{Ann}_M(I) = \{m\in M : Im=0\}$ $\qquad \psi: \mathrm{Hom}_R(R/I, M) \longrightarrow \mathrm{Ann}_M(I)$

$\psi(\varphi) = \varphi(1+I)$

$\varphi(1+I) \in \mathrm{Ann}_M(I)$ چون $\quad I\varphi(1+I) = \{i\varphi(1+i) : i\in I\} = \{\varphi(I)\} = 0$

$\varphi: R/I \longrightarrow M$

$r+I \longrightarrow rm \Rightarrow \varphi(I) = Im = 0$

if $\varphi_1 = \varphi_2 \Rightarrow \varphi_1(1+I) = \varphi_2(1+I) \Rightarrow \psi(\varphi_1) = \psi(\varphi_2) \Rightarrow \psi$ is w.d

if $\varphi_1(1+I) = \varphi_2(1+I) \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2 \Rightarrow \psi$ is 1-1 , ψ is onto

$\psi(\varphi_1+\varphi_2) = (\varphi_1+\varphi_2)(1+I) = \varphi_1(1+I) + \varphi_2(1+I) = \psi\varphi_1 = \psi\varphi_2$

$\psi(r\varphi) = r\varphi(1+I) = r(\varphi(1+I)) = r\psi\varphi$

$\Rightarrow \psi$ is 1-1, onto and homo $\Rightarrow \psi$ is isomorphism

۱۰ راه حل دوم برای سوال ۱ فرض کنیم f یک هم‌ریختی غیر صفر است.

فرض $f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z}$: $f(a/b) = n \neq 0$

$\Rightarrow f\left(\underbrace{\frac{a}{2nb} + \cdots + \frac{a}{2nb}}_{2n \text{ بار}}\right) = f(a/b) = n$

$\Rightarrow f(a/b) = 2n f(\frac{a}{2nb}) = n \Rightarrow f(\frac{a}{2nb}) = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ ✗ $\Rightarrow f(a/b) \neq 0$

تمرینات فصل ۵:

۳- فرض کنید G گروه آبلی باشد و $\forall g \in G \; \exists n \in \mathbb{N}: ng = 0$. ثابت کنید $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$.

Let $g \in G$, $q \in \mathbb{Q}$ $\quad g \otimes q \in G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

$o(g).g = 0 \Rightarrow g \otimes q = \frac{o(g)}{o(g)} g \otimes q = o(g).g \otimes \frac{q}{o(g)} = 0 \otimes \frac{q}{o(g)} = 0 \Rightarrow G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$

۴- ثابت کنید $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0$

$(\frac{r}{s} + \mathbb{Z}), (\frac{p}{q} + \mathbb{Z}) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

$(\frac{p}{q} + \mathbb{Z}) \otimes (\frac{r}{s} + \mathbb{Z}) = (\frac{p}{q} + \mathbb{Z}) \otimes (\frac{qr}{qs} + \mathbb{Z}) = (\frac{pq}{q} + \mathbb{Z}) + (\frac{r}{qs} + \mathbb{Z})$

$= (p + \mathbb{Z}) \otimes (\frac{r}{qs} + \mathbb{Z}) = 0 \otimes (\frac{r}{qs} + \mathbb{Z}) = 0$ $\quad p + \mathbb{Z} \in \mathbb{Z} + p = \text{صفر } \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

۵- فرض کنید R حلقه جابجایی، M، R-مدول چپ باشد و N، R-مدول راست، آیا $M \otimes N$ بی‌تناهی مولد است؟ چرا؟

$M = \langle x_1, \dots, x_n \rangle \quad x \in M \Rightarrow x = r_1 x_1 + \dots + r_n x_n$

$N = \langle y_1, \dots, y_m \rangle \quad y \in N \Rightarrow y = r'_1 y_1 + \dots + r'_m y_m$

$\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in M \otimes N \; ; \; x_i \in M, y_i \in N, n \geq 1$

$\Rightarrow x \otimes y = (r_1 x_1 + \dots + r_n x_n) \otimes y = r_1 x_1 \otimes y + \dots + r_n x_n \otimes y$

$\Rightarrow r_i x_i \otimes y = r_i x_i \otimes (r'_1 y_1 + \dots + r'_m y_m) = r_i x_i \otimes r'_1 y_1 + \dots + r_i x_i \otimes r'_m y_m$

$= r_i r'_1 (x_i \otimes y_1) + \dots + r_i r'_m (x_i \otimes y_m) = a_{i1}(x_i \otimes y_1) + \dots + a_{im}(x_i \otimes y_m)$

$= \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i \otimes y_j \Rightarrow x \otimes y = \sum_{j=1}^{m} a_{1j}(x_1 \otimes y_j) + \dots + \sum_{j=1}^{m} a_{nj}(x_n \otimes y_j)$

$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x_i \otimes y_j) \Rightarrow M \otimes N = \langle x_i \otimes y_j \rangle_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$

۶- فرض کنید R حلقه باشد و I ایده‌آلی از R. اگر M، R-راست R-مدول، و N چپ R-مدول و $IM = 0$، $IN = 0$، ثابت کنید

$M \otimes_{R/I} N = M \otimes_R N$

اثبات اینکه $\otimes_{R/I}$ middle linear است:

$(x + x', r) \otimes_{R/I} (y) = (x, r) \otimes_{R/I} (y) + (x', r) \otimes_{R/I} (y)$

$= (x, y) + (x', y)$

$(x, r + r') \otimes_{R/I} (y) = (x, r) \otimes_{R/I} (y) + (x, r') \otimes_{R/I} (y)$

$(x, r)(r' + I) \otimes_{R/I} (y) = (x, r) \otimes_{R/I} (r' + I) y = (x, r) \otimes_{R/I} (r' y) = (x, r r') \otimes_{R/I} (y)$

$M \times N \xrightarrow{\otimes_{R/I}} M \otimes_{R/I} N$

$\otimes_R \downarrow \quad \nearrow \exists! \varphi$

$M \otimes_R N$

$\exists! \varphi \; s.t \; \varphi \circ \otimes_R = \otimes_{R/I} \quad \varphi : M \otimes_R N \to M \otimes_{R/I} N$

$x \otimes_R y \to x \otimes (r + I) y$

$\psi : M \otimes_{R/I} N \to M \otimes_R N$

$x \otimes_{R/I} (r + I) y = x \otimes_R ry$

$\psi \otimes_{R/I} = \otimes_R \Rightarrow \psi \otimes_{R/I} (x \otimes ry) = \psi(x \otimes (r + I) y) = x \otimes ry \Rightarrow \psi \otimes_{R/I} = \otimes_R$

$M \times N \xrightarrow{\otimes_{R/I}} M \otimes_{R/I} N$

$\otimes_R \downarrow \quad \nearrow \psi$

$M \otimes_R N$

$\varphi \psi (x \otimes y) = \varphi(x \otimes (r + I) y) = x \otimes ry \Rightarrow \varphi \psi = 1_{M \otimes_R N}$

$\psi \varphi (x \otimes y) = \psi(x \otimes ry) = x \otimes (r + I) y \Rightarrow \psi \varphi = 1_{M \otimes_{R/I} N}$

$\Rightarrow M \otimes_{R/I} N \cong M \otimes_R N$

۸- فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی باشد و I و J دو ایدهآل R باشند. ثابت کنید $R/I \otimes R/J \cong R/(I+J)$

$f: R/I \times R/J \to R/(I+J)$

$(r+I, r'+J) \to rr' + (I+J)$

۱) $f(r+I, r'+J) + f(r+I, r''+J) = rr' + rr'' + (I+J) = f(r+I, r'+r''+J)$

۲) $f(r+I, r'+J) + f(r+I, r''+J) = f(r+I, r'+r''+J)$ ✓

۳) $f(r+I, r'+J) = f(r+I, r''+J) = rr' + I + J = f(r+I, r''+J)$

✓ $f(r'+I, r+J) = f(r''+I, r+J) = r'r + I + J = r''r + I + J$

$\Rightarrow f$ is middle linear map

$\Rightarrow \varphi : R/I \otimes R/J \to R/(I+J)$

$(r+I) \otimes r' + J \to rr' + (I+J)$

$\varphi \circ \otimes = f$ ، بنابراین φ یکتا است

$R/I \times R/J \xrightarrow{\otimes} R/I \otimes R/J$

$f \downarrow \quad \swarrow \varphi$ ، φ یکتا

$R/(I+J)$

$\varphi \circ \otimes = f$

$\Rightarrow \varphi : R/I \otimes R/J \to R/(I+J)$

$(r+I) \otimes r' + J \to rr' + (I+J)$

$R/I \times R/J \xrightarrow{f} R/(I+J)$ $\quad \varphi \circ f = \otimes \Rightarrow \psi : R/(I+J) \to R/I \otimes R/J$

$\otimes \downarrow \quad \nearrow \psi$ یکتا است

$R/I \otimes R/J$

$r + (I+J) \to (r+I) \otimes (r'+J)$

$\psi \varphi ((r+I) \otimes (r'+J)) = \psi(rr' + (I+J)) = (r+I) \otimes (r'+J)$

$\varphi \psi (r + (I+J)) = \varphi((r+I) \otimes (1+J)) = r + (I+J)$ ،

$\Rightarrow \varphi \psi = 1_{R/(I+J)}$ $\quad \psi \varphi ((r'+I) \otimes (r''+J)) = \psi(r'r'' + (I+J)) = (r'+I) \otimes (r''+J)$

$\Rightarrow \psi \varphi = 1_{R/I \otimes R/J}$

$\Rightarrow R/I \otimes R/J \cong R/(I+J)$

۹- فرض کنید m, n دو عدد طبیعی باشند بطوریکه $(m,n) = 1$ ثابت کنید $\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n = 0$ بالعکس $\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn}$

۱) $f(m+m', n) = (u+u')n = un + u'n = 0 + 0 = f(m,n) + f(m',n)$

۲) $f(m, n+n') = u(n+n') = un + un' = f(m,n) + f(m,n')$

۳) $f(m'm, n) = u'mn = m'un = m(m'n) = f(m, m'n)$

$\Rightarrow f$ is middle linear map

$\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \xrightarrow{\otimes} \mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n$

$f \downarrow \quad \swarrow \varphi$ یکتا

$\mathbb{Z}_d$

$f: \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_d$

$(u, u') \to uu'$

$\Rightarrow \exists ! \varphi : \mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_d$ s.t $\varphi \otimes = f$ $\quad \varphi \circ \otimes (u, u') = \varphi(u \otimes u') = f(u, u') = uu'$

$m \otimes n \to uu'$

$\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_d$ $\quad \psi : \mathbb{Z}_d \to \mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n$ s.t $\psi f = \otimes \Rightarrow \psi f(u,u') = \psi(uu') = u \otimes u' = m \otimes n$

$\otimes \downarrow \quad \nearrow \psi$ یکتا

$\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n$

$uu' \to u \otimes u'$

$\psi \varphi (m \otimes n) = \psi(mn) = u \otimes u' = (u \otimes u') = 1_{\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n}$

$\varphi \psi (mn) = \varphi(u \otimes u') = uu' = mn \Rightarrow \varphi \psi = 1_{\mathbb{Z}_d}$ $\Rightarrow \mathbb{Z}_d \cong \mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n$

if $d = 1 \Rightarrow \mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_1 = \{0\}$ $\Leftarrow$ فرض $\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n = 0$

۱۰- ثابت کنید $\mathbb{Z}_n \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0$

$|\mathbb{Z}_n| = n \Rightarrow nx = 0$ ، $x \in \mathbb{Z}_n$ ، $z \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ؛ $z = \frac{b}{q} + \mathbb{Z}$

$x \otimes (\frac{b}{q} + \mathbb{Z}) = x \otimes (\frac{nb}{nq} + \mathbb{Z}) = x \otimes (\frac{b}{q} + \mathbb{Z}) = nx \otimes (\frac{b}{q} + \mathbb{Z}) = 0 \otimes (\frac{b}{q} + \mathbb{Z}) = 0$.

$\mathbb{Z}_n$ بردهی خودش و متناهی است.

۱۹ $y \in \mathbb{Z}_n$ let $|\mathbb{Z}_n| = n$

$x \in \mathbb{Q}$ $\Rightarrow y \otimes x \in \mathbb{Z}_n \otimes \mathbb{Q} \Rightarrow y \otimes x = \frac{n}{n} y \otimes x = n(\frac{1}{n} y) \otimes x = 0 \otimes x = 0 \Rightarrow \mathbb{Z}_n \otimes \mathbb{Q} = 0$

الف) ثابت کنید $\mathbb{Z}_n \otimes \mathbb{Q} = 0$

ب) ثابت کنید $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0$

$x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x = \frac{p}{q}$ $\Rightarrow x \otimes y = \frac{p}{q} \otimes (\frac{1}{s} + \mathbb{Z}) = \frac{p}{q} \cdot \frac{s}{s} \otimes (\frac{1}{s} + \mathbb{Z})$

$y \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \Rightarrow y = (\frac{1}{s} + \mathbb{Z})$ $= \frac{p}{qs} \otimes (r + \mathbb{Z}) = \frac{p}{qs} \otimes 0 = 0$ $\Rightarrow \mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0$

$r + \mathbb{Z} = \mathbb{Z} = 0_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$

۲۰. برهان کنید F میدان با بیش از یک عضو $F[x,y] \cong F[x] \otimes F[y]$

$g : F[x] \times F[y] \longrightarrow F[x,y]$

$h, k \longrightarrow hk$

۱) $g(h+h', k) = (h+h')k = hk + h'k = g(h,k) + g(h',k)$

۲) $g(h, k+k') = g(h,k) + g(h,k')$

۳) $g(rh, k) = rhk = hrk = g(h, rk)$

$\Rightarrow g$ is middle linear map.

$F[x] \times F[y] \xrightarrow{\otimes} F[x] \otimes F[y]$

$g \downarrow \quad \nearrow \exists \varphi$

$F[x,y]$

$\exists ! \varphi$ s.t $\varphi \circ \otimes = g$ $\Rightarrow \varphi \circ \otimes (h,k) = \varphi(h \otimes k) = g(h,k) = hk$

$\varphi : F[x] \otimes F[y] \longrightarrow F[x,y]$

$h \otimes k \longrightarrow h.k$

$F[x] \times F[y] \xrightarrow{g} F[x,y]$

$\otimes \downarrow \quad \nearrow \exists \psi$

$F[x] \otimes F[y]$

$\psi : F[x,y] \longrightarrow F[x] \otimes F[y]$ $F[x,y] = F[x][y]$

$f_0 + f_1 y + \cdots + f_n y^n \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes y^i$, $f_i \in F[x]$

$\psi \circ g(h,k) = \psi(hk) = \psi(h(a_0 y^0 + a_1 y^1 + \cdots + a_n y^n))$

$= \psi(ha_0 y^0 + ha_1 y^1 + \cdots + ha_n y^n) = \varphi(f_0 y^0 + \cdots + f_n y^n)$

$= \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes y^i \Rightarrow \psi g = \otimes$

$\varphi \psi (f_0 + \cdots + f_n y^n) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes y^i)$

$= f_i . y^i \Rightarrow \psi \varphi = 1_{F[x,y]}$

$\psi \varphi (h \otimes k) = \psi(hk) = \varphi(a_0 hy^0 + \cdots + a_n hy^n) = \varphi(f_0 y^0 + \cdots + f_n y^n)$

$= \sum f_i \otimes y^i = h \otimes k \Rightarrow \varphi \psi = 1_{F[x] \otimes F[y]}$ $\Rightarrow F[x] \otimes F[y] \cong F[x,y]$

۱۸. ثابت کنید $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\otimes} \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$

$f \downarrow \quad \nearrow \exists \varphi$

$\mathbb{R}$

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longrightarrow xy$

f is middle linear map

$\Rightarrow \exists ! \varphi : \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ s.t $\varphi \circ \otimes = f \Rightarrow \varphi \circ (x \otimes y) = f(x,y) \Rightarrow \varphi(x \otimes y) = xy$

$x \otimes y \longrightarrow xy$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$\otimes \downarrow \quad \nearrow \psi$

$\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$

$\otimes$ is middle linear map $\Rightarrow \exists ! \psi$ s.t $\psi f = \otimes \Rightarrow \psi f(x,y) = \psi(xy)$

$\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$ $= xy \otimes 1_{\mathbb{R}} = x \otimes y$

$x \longrightarrow x \otimes 1_{\mathbb{R}}$

$\psi(\varphi(x \otimes y)) = \psi(xy) = xy \otimes 1_{\mathbb{R}} = x \otimes y \Rightarrow \psi \varphi = 1_{\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}}$ $\Rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$

$\varphi(\psi(x)) = x \otimes 1_{\mathbb{R}} = x$ $\Rightarrow \varphi \psi = 1_{\mathbb{R}}$

۱۵. ثابت کنید $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^4$

$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \xrightarrow{\otimes} \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$

$f \downarrow \quad \nearrow \exists \varphi$

$\mathbb{C}^4$

$f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^4$

$(z, z') \longrightarrow z.z'$

۱) $f(z_1 + z_2, z') = f(z_1, z') + f(z_2, z')$

۲) $f(z, z'_1 + z'_2) = f(z, z'_1) + f(z, z'_2)$

۳) $f(nz, z') = nzz' = zn z' = f(z, nz')$

f is middle linear map

$\exists! \varphi : C\otimes C \to C^2$ s.t $\varphi \circ \otimes = f \Rightarrow \varphi(x\otimes y) = f(x,y) = xy$ ۲۷

$x\otimes y \to xy \Rightarrow \varphi(x\otimes y) = xy$

$C\times C \xrightarrow{f} C^2$ $\exists! \varphi : C^2 \to C\otimes C$ s.t $\varphi \circ f = \otimes \to \varphi f(x,y) = \varphi(xy) = x\otimes y$

$\otimes \downarrow \quad \nearrow \exists! \varphi$

$C\otimes C$ $z_1 z_2 \to z_1 \otimes z_2$

$\Rightarrow \varphi\psi = 1_{C^2} \Rightarrow z_1 z_2 = \varphi\psi(z_1,z_2) = \varphi(z_1\otimes z_2) = \varphi\psi\varphi(z_1\otimes z_2) = 1_{C\otimes C}\varphi\psi \Rightarrow C^2 \cong C\otimes C$

---

۱۲. ثابت کنید $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \xrightarrow{\otimes} \mathbb{Q}\otimes\mathbb{Q}$ $f : \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $(p,q) \to pq$ $\Rightarrow$ f is middle $\mathbb{Z}$-linear map

$f \downarrow \quad \nearrow \exists! \varphi$

$\mathbb{Q}$ $\Rightarrow \exists! \varphi$ s.t $\varphi(p\otimes q) = \varphi(p\otimes 1)\varphi(1\otimes q) = f(p,q) = pq$ $\varphi : \mathbb{Q}\otimes\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $p\otimes q \to pq$

$\psi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}\otimes\mathbb{Q}$, $p \to p\otimes 1$ $\Rightarrow$ ψ is $\mathbb{Z}$-hom

$\psi\varphi(p\otimes q) = \psi(pq) = pq\otimes 1 = p\otimes q \Rightarrow \psi\varphi = 1_{\mathbb{Q}\otimes\mathbb{Q}}$

$\varphi\psi(p) = \varphi(p\otimes 1) = p\cdot 1 = p \Rightarrow \varphi\psi = 1_{\mathbb{Q}}$ $\Rightarrow \mathbb{Q}\otimes\mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$

۱۱- R-مدول راست M و R-مدول چپ N مثال بزنید که $M\otimes_R N \neq M\otimes_{\mathbb{Z}} N$.

$M = \mathbb{Q}, N = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0$, $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

۱۰- R-مدول راست M و R-مدول چپ N مثال بزنید با این ویژگی که عضوی از $M\otimes N$ مثل $x\otimes y$، $x'\otimes y'$ موجود باشند که $x\otimes y = x'\otimes y'$ و $x \neq x'$، $y \neq y'$

$M = \mathbb{Q}$, $N = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $R = \mathbb{Z}$

$\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0 \Rightarrow 2\otimes 1/6 = 6\otimes 1/12 = 0$ و $2 \neq 6$, $1/6 \neq 1/12$

۷- ثابت کنید R حلقه جابجایی و صفرپایه است. $M\otimes N = 0 \iff M = 0$ یا $N = 0$ اگر و فقط اگر R یک میدان باشد.

کسی آیا میدانید درست است یا نه؟

فرض کنیم $M\otimes N = 0$ و J ایدال ماکسیمال R باشد. $K = R/J$ میدان است. فرض کنید $M_K = K\otimes_R M$

$M_K = K\otimes M = R/J \otimes M \cong M/JM$, $M\otimes N = 0 \Rightarrow M_K\otimes N_K = (K\otimes M)\otimes(K\otimes N)$

$= (K\otimes M\otimes K)\otimes N = (K\otimes M)\otimes N = K\otimes(M\otimes N) = 0$

چون M_K و N_K فضای برداری بعد متناهی روی میدان K هستند $M_K\otimes N_K = 0$ پس باید $M_K = 0$ یا $N_K = 0$ یعنی $M = JM$ و طبق لم ناکایاما $M = 0$ و به طور کلی $N = 0$

$\Rightarrow$ اگر M یا N صفر باشد $M\otimes N = 0$ واضح است

اگر $(m,n) = 1 \Rightarrow \mathbb{Z}_m\otimes\mathbb{Z}_n = 0$ و $\mathbb{Z}_n$ جمله‌ای است که بیش از یک ایدال ماکسیمال دارد پس $\mathbb{Z}_n \neq 0$ و $\mathbb{Z}_m \neq 0$ پس $\mathbb{Z}_m\otimes\mathbb{Z}_n = 0$

تمرینات فصل ۶:

۱. $\Gamma_I(M)$ یک R-مدول است.

$\Gamma_I(-) : {}_RM \longrightarrow {}_RM$

$M \longrightarrow \Gamma_I(M)$

$\varphi : M \to N \Rightarrow \Gamma_I(-)(\varphi) = \Gamma_I(M) \to \Gamma_I(N)$

$x \to \Gamma_I \varphi(x) = \varphi(x)$ همانطور که در سوال ۲ قبل دیدیم

i) $\Gamma_I(-)(i_M) \overset{?}{=} i_{\Gamma_I(M)}$

$i_M(f) = i_{\Gamma_I(M)}(f)$; if $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\varphi} L$

ii) $h = \Gamma_I(-)(\varphi\psi) \overset{?}{=} \underbrace{\Gamma_I(-)\varphi}_{k_2} \; \underbrace{\Gamma_I(-)\psi}_{k_1} = k$

$h : \Gamma_I(M) \to \Gamma_I(L)$

$x \to \Gamma_I(\varphi\psi) = \varphi\psi(x)$

$k_1 : \Gamma_I(N) \to \Gamma_I(L)$

$y \to \Gamma_I(\varphi)(y)$

$k_2 : \Gamma_I(M) \to \Gamma_I(N)$

$z \to \Gamma_I(\varphi)(z) = \varphi(z)$

$h(x) = \Gamma_I(\varphi\psi)(x) = \varphi\psi(x) = \varphi(\psi(x)) = \Gamma_I\varphi(\psi(x)) = k_2(\psi(x)) = k_2 k_1(x) = kx$

---

۲. $0 \to Z \xrightarrow{\varphi} Z \xrightarrow{\psi} Z_n \to 0$ exact $\varphi : Z \to Z$, $a \to na$; $\psi : Z \to Z_n$, $n \to \bar{n}$

$\Rightarrow 0 \to \mathrm{Hom}(Z_n, Z) \xrightarrow{\bar{\varphi}} \mathrm{Hom}(Z_n, Z) \xrightarrow{\bar{\psi}} \mathrm{Hom}(Z_n, Z_n) \to 0$ is not exact

۳. مثال ۱) $0 \to Z \xrightarrow{j} Z_{p^\infty} \xrightarrow{j'} Q/Z \to 0$ exact

$0 \to \mathrm{Hom}(Q/Z, Q) \xrightarrow{\bar{j'}} \mathrm{Hom}(Z_{p^\infty}, Q) \xrightarrow{\bar{j}} \mathrm{Hom}(Z, Q) \to 0$ is not exact

$0 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad Z$

$\mathrm{Im}\bar{j} = 0$

مثال ۲) $0 \to Z \xrightarrow{j} Q \xrightarrow{\pi} Q/Z \to 0$ exact

But $0 \to \mathrm{Hom}(Q/Z, Z) \xrightarrow{\bar{\pi}} \mathrm{Hom}(Q, Z) \xrightarrow{\bar{j}} \mathrm{Hom}(Z, Z) \to 0$ is not exact since $\mathrm{Im}\bar{j} \neq 0$

$0 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad Z$

---

۴. $0 \to Z \xrightarrow{\varphi} Z \xrightarrow{\psi} Z_n \to 0$ exact

$0 \to Z \otimes Z_n \xrightarrow{\varphi \otimes 1_{Z_n}} Z \otimes Z_n \xrightarrow{\psi \otimes 1_{Z_n}} Z_n \otimes Z_n \to 0$

if $a \otimes b \in Z \otimes Z_n \Rightarrow (\varphi \otimes 1_{Z_n})(a \otimes b) = \varphi(a) \otimes b = na \otimes b = a \otimes nb = 0$

$\Rightarrow a \otimes b \in \ker \varphi \otimes 1_{Z_n}$ But $a \otimes b \neq 0 \Rightarrow \varphi$ is not 1-1

تمرینات فصل ۷:

۱- فرض کنیم Q یک R-مدول آزاد با پایه‌ی X باشد و $j: X \to Q$ را شمول بگیریم. آنگاه برای هر R-مدول دلخواه M و هر تابع $f: X \to M$ یک همریختی یکتای $\varphi: Q \to M$ موجود است که نمودار زیر جابجایی می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & Q \\ & \searrow^{f} & \downarrow \varphi \\ & & M \end{array} \qquad \varphi \circ j = f$$

حال اگر $M = \mathbb{Z}$ و f را طوری انتخاب کنیم که $f(x_1) \neq 0$ برای $x_1 \in X$، آنگاه هیچ همریختی مانند $\varphi: Q \to \mathbb{Z}$ وجود ندارد که نمودار زیر جابجایی شود:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & Q \\ & \searrow^{f} & \downarrow \varphi \\ & & \mathbb{Z} \end{array} \qquad \varphi \circ j = f \Rightarrow \varphi(x_1) = f(x_1) \Rightarrow 0 = f(x_1) \quad \text{!}$$

۲- هر R-مدول M تصویر همریختی یک R-مدول آزاد مانند F است:

$M = \langle X \rangle$ $\quad F = \bigcup_{x \in X} R \quad ; \quad F = \bigcup_{i=1}^{n} R \quad s.t \quad$ $g = \{e_x\}_{x \in X}$, $g = \{e_{x_i}\}_{i=1}^{n}$

$\Rightarrow \varphi: F \to M$ is epimorphism $\Rightarrow F \to M \to 0$ exact $\quad \varphi(F) = M$

$e_{x_i} \to x_i$

$$\begin{array}{ccccc} & & \bigcup_{i=1}^{n} R & \xrightarrow{\varphi} & M \to 0 \\ & \nearrow^{\ker\varphi} & \downarrow \psi & & \\ n & & & & \end{array}$$

$\ker\varphi = \{(r_1, \dots, r_n) : \varphi(r_1, \dots, r_n) = 0\} \Rightarrow$ if $(r_1, \dots, r_n) \in \ker\varphi$

$\Rightarrow \varphi(r_1, \dots, r_n) = 0 \quad , r_1, \dots, r_n = \sum_{i=1}^{n} r_i e_{x_i} \Rightarrow \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} r_i e_{x_i}\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} r_i \varphi(e_{x_i}) = 0$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} r_i x_i = 0 \quad *$

$\text{Ann}_R(M) = \{r \in R : rx = 0 \quad \forall x \in M\}$, $x \in M \Rightarrow x = r_1 x_1 + \dots + r_n x_n \quad M = \langle X \rangle$

$\Rightarrow \text{Ann}_R(M) = \{r \in R : r_1, \dots r_n \in R : r(r_1 x_1 + \dots + r_n x_n) = 0\}$

$= \{r \in R, r_1, \dots r_n : rr_1 x_1 + \dots + rr_n x_n = 0\} \quad \forall i \; r_i r = r_i' \Rightarrow r_i' \in R$

$= \{r_i' \in R \quad i = 1, \dots n : r_1' x_1 + \dots + r_n' x_n = 0\}$

$\Rightarrow \text{Ann}_R(M) = \{(r_1', \dots r_n') \in \bigcup_{i=1}^{n} R : \sum_{i=1}^{n} r_i' x_i = 0\} \Rightarrow **$

$*, ** \Rightarrow \ker\varphi = \text{Ann}_R(M)$

But $\text{Ann}_R(M)$ is an ideal of R, then $\ker\varphi$ is an ideal of R, R is PID

$\Rightarrow \exists x \in \ker\varphi$ s.t $\ker\varphi = \langle x \rangle$

$\psi: R \to \ker\varphi$ ψ is epimorphism $\quad \varphi_1 = j \circ \psi$

$$\begin{array}{ccccc} R & \xrightarrow{\varphi_1} & \bigcup_{i=1}^{n} R & \xrightarrow{\varphi} & M \to 0 \\ & \searrow^{\psi} & \uparrow j & & \\ & & \ker\varphi & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ 0 & & & & 0 \end{array}$$

show that φ_1 is 1-1

$\ker\varphi_1 = \ker j\circ\varphi = \{r\in R : j\varphi(r)=0\} = \{r\in R : j\varphi(r.1_R)=0\}$

$= \{r\in R : rx=0\} = \{r\in R : r(x_1,\dots,x_n)=0\} = \{r\in R : rx_i=0 \ \forall x_i\in R\}$

$rx_i=0 \begin{cases} r=0 \\ x_i=0 \end{cases}$ $r\in R,\ x_i\in R$. But $\ker\varphi_0 = \langle x\rangle \Rightarrow x_i\neq 0$

$\Rightarrow x=(x_1,\dots,x_n)\neq 0 \Rightarrow \exists\, i\leq \hat{i}\leq n$ s.t $x_i\neq 0$

$\Rightarrow \begin{cases} rx_i=0 \\ x_i\neq 0 \end{cases}$, R is PID $\Rightarrow r=0 \Rightarrow \ker\varphi_1 = \{r\in R : rx_i=0\} = 0 \Rightarrow \varphi_1$ is 1-1

$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\varphi_1} \overset{n}{\underset{i=1}{\bigoplus}} R \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0$ must be show $\operatorname{Im}\varphi_1 = \ker\varphi_0$

$\varphi_1 = j\circ\varphi$ $\varphi_1 : R \longrightarrow \overset{n}{\underset{i=1}{\bigoplus}} R$, $\ker\varphi_0 = \langle x\rangle$

$r \longrightarrow rx$

if $r\in R$ $\varphi_0\varphi_1(r) = \varphi_0(rx) = r\varphi_0(x) = 0$ $\operatorname{Im}\varphi_1 \subseteq \ker\varphi_0$ *

if $(r_1,\dots,r_n)\in\ker\varphi_0 \overset{?}{\Rightarrow} \exists r\in R$ s.t $\varphi_1 r = (r_1,\dots,r_n)$

$(r_1,\dots,r_n)\in\ker\varphi_0 = \langle x\rangle \Rightarrow \exists\, r\in R : (r_1,\dots,r_n) = rx$ $\Rightarrow (r_1,\dots,r_n) = \varphi_1(r)$

$\varphi_1(r) = r(x)$

$\Rightarrow \ker\varphi_0 \subseteq \operatorname{Im}\varphi_1$ ** *,** $\Rightarrow \operatorname{Im}\varphi_1 = \ker\varphi_0$

$\Rightarrow 0 \longrightarrow R \xrightarrow{\varphi_1} \overset{n}{\underset{i=1}{\bigoplus}} R \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0$ is exact

---

$\frac{R}{\ker\varphi} \cong \varphi(R)$ $\varphi : R \longrightarrow S$, hom

قرارداد هیس φ فرا $L = \ker\varphi$ ایدال R است حال میگیریم F یک R-مدول آزاد با پایه‌ها x و y باشد برداریم

$\pi : F \longrightarrow \frac{F}{LF}$ همریختی میگیریم، $\frac{F}{LF}$ یک $\frac{R}{L}$-مدول آزاد است که پایه‌های $\pi x, \pi y$ است زیرا چون

$\frac{R}{L} \cong \varphi(R)$ بنابراین $\frac{F}{LF}$ یک $\varphi(R)$-مدول آزاد است پس یک S-مدول آزاد با پایه‌های $\pi x, \pi y$ است و

$|\pi x| = |\pi y|$ در نتیجه $|y|=1=|x|$ لذا برای هر R-مدول آزاد چون F هر دو پایه دارای عدد اصلی یکسان است.

- قضیه اگر R یک PID باشد زیرمدول هر R-مدول آزاد، آزاد است.

هر R-مدول مثل M تصویر همریختی یک R-مدول آزاد مثل F است یعنی $F \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0$ پوشا است

دنباله دقیق (exact) $0 \longrightarrow \ker\varphi \xrightarrow{j} F \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0$ داریم.

چون R یک حوزه صحیح است پس $\ker\varphi \leq F$ پس $\ker\varphi$ نیز آزاد است. و $F = F_1 \oplus \ker\varphi$.

تمرینات فصل ۸:

۱- P و Q پروژکتیو، پس R-مدولهای آزادشان F_1 و F_2 و R-مدولهای k_1 و k_2 موجودند که

$F_1 \cong k_1 \amalg P$

$F_2 \cong k_2 \amalg Q$

F_1 و F_2 آزادهای متناهرمستند پس $F_1 \otimes F_2$ نیز آزاد است

$$F_1 \otimes F_2 = (k_1 \amalg P) \otimes (k_2 \amalg Q) = (k_1 \otimes (k_2 \amalg Q)) \amalg (P \otimes (k_2 \amalg Q))$$

$$= (k_1 \otimes k_2) \amalg k_1 \otimes Q \amalg P \otimes k_2 \amalg P \otimes Q$$

(P_1, P_2, P_3, P_4)

$F_1 \otimes F_2$ آزاد و پس پروژکتیو است پس هر P_i پروژکتیو است $\Leftarrow P \otimes Q$ نیز پروژکتیو است.

روش ۲: چون R جابجایی است، برای هر R-مدول k داریم:

$$\mathrm{Hom}_R(P \otimes Q, k) \cong \mathrm{Hom}(P, \mathrm{Hom}_R(Q, k))$$

در نتیجه $\mathrm{Hom}(P \otimes Q, -)$ ترکیب $\mathrm{Hom}(P, -)$ و $\mathrm{Hom}(Q, -)$ چون P و Q پروژکتیو است پس هر یک از فانکتورها دقیق

است در نتیجه فانکتور $\mathrm{Hom}(P \otimes Q, -)$ دقیق است.

قضیه: اگر $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ فانکتور covariant دقیق $F \circ G$ نیز دقیق است،

$$A \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} K \to 0 \text{ exact}$$

$$\Rightarrow 0 \to F(M) \xrightarrow{Ff} F(N) \xrightarrow{Fg} F(K) \to 0 \text{ is exact}$$

Since G is exact

$$\Rightarrow 0 \to GF(M) \xrightarrow{GFf} GF(N) \xrightarrow{GFg} G(F(K)) \to 0 \text{ exact}$$

۳- زمن کنیم F R-مدولی آزاد با شد و P R-مدولی پروژکتیو. پس P هموردم ریخت F است

یعنی $\varphi : F \to P$

$$0 \to \ker\varphi \xrightarrow{j} F \xrightarrow{\varphi} P \to 0 \text{ exact}$$

چون P پروژکتیو است پس دنباله‌ی فوق Split است، پس $F \cong P \amalg \ker\varphi$ و چون F هم‌ریخت R است پس Split است

if $y \in \ker\varphi \Rightarrow \exists! x \in F : j'(x) = y$ یعنی $j' : F \to \ker\varphi$ موجود است که $j' \circ j = 1_{\ker\varphi}$ و j یوشا است،

چون F متناهرمولد است لذا $j(F) = \ker\varphi$ متناهرمولد است. چون F آزاد است پس پروژکتیو است لذا

چون $F \cong P \amalg \ker\varphi$ نیز پروژکتیو است (قرار دهید $Q = \ker\varphi$).

۴- $I(\frac{P}{IP}) = 0$ $\quad R/I \times P/IP \to P/IP$

$$((r+I), x+IP) \xrightarrow{*} rx+IP \Rightarrow P/IP \text{ is an } R/I \text{ module.}$$

دیاگرام $\begin{array}{ccc} & & P/IP \\ & & \downarrow f \\ M & \xrightarrow{g} & N \to 0 \end{array}$ را در نظر بگیرید که M, N R/I-مدول و P/IP هم‌ریخت R/I است.

میدانیم M, N R-مدول و P هم‌ریخت R است پس داریم:

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & & \downarrow f\circ\pi \\ M & \xrightarrow{g} & N \to 0 \end{array}$$

چون P پروژکتیو است پس $\exists \varphi : P \to M$ بطوریکه $g \circ \varphi = f \circ \pi$ تعریف کنیم $\psi : P/IP \to M$

$$\psi(P + IP) = \varphi(P) \quad \psi \text{ is } R/I \text{ hom.}$$

۱) $\psi(P+P'+IP) = \varphi(P+P') = \varphi(P) + \varphi(P')$

۲) $\psi((r+I)P + IP) \overset{*}{=} \psi(rP + IP) = \varphi(rP) = r\varphi(P) = (r+I)\varphi(P) \Rightarrow$ ✓

۲۵/ $g\psi(p+2p') = g\varphi(p) = f\circ\pi(p) = f(p+2p') \Rightarrow g\circ\psi = f$

ψ یک‌به‌یک است. P/IP یک R/I-مدول پروژکتیو است. ←

۴- از آنجا که P یک R-مدول است لذا همواره یک R-مدول آزاد F وجود دارد که $F \xrightarrow{\varphi} P \to 0$ دقیق است.

$\Rightarrow 0 \to \ker\varphi \xrightarrow{j} F \xrightarrow{\varphi} P \to 0$ exact , P is Projective $\Rightarrow$ split

$\Rightarrow F \cong \ker\varphi \oplus P$ **

$M \cong \varphi(M_1) \oplus K$ ثابت شود $\Leftarrow$ $0 \to M_1 \to M \to M_2 \to 0$ دنباله دقیق کوتاه است $\Leftarrow$ M را K برمدول‌هایی مثل

$\Rightarrow F \cong j(\ker\varphi) \oplus K_* \Rightarrow$ *,** $P \cong K$

چون F یک R-مدول آزاد و R یک PID است پس هر زیرمدول آن نیز آزاد است لذا P نیز آزاد است.

$\exists K \leq F$ ← P پروژکتیو

۵- زمانی که F آزاد باشد پس هر R-مدولی مثل P همواره زیرمدولی از F است و چون F آزاد است $F = P \cup K$ و $F = \bigcup_{i=1}^{n} R$ یا $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} R$ خواهد شد.

$Hom(F,R) = Hom(\bigcup R, R) \cong \bigcup_{i=1}^{n} Hom(R,R) \cong \bigcup_{i=1}^{n} R = F$

$Hom(F,R) \cong F \cong Hom(P \cup K, R) \cong Hom(P,R) \cup Hom(K,R)$

از آنجا که F آزاد است پس پروژکتیو است پس $Hom(P,R)$ و $Hom(K,R)$ پروژکتیو است و P متناهی‌مولد است پس $Hom(P,R)$ متناهی‌مولد است.

۷- $\varphi : P \to Hom_R(Hom(P,R), P)$

$P \to \varphi_P : Hom(P,R) \to P$

if $P_1 = P_2 \Rightarrow \theta(P_1) = \theta(P_2)$ $\varphi_P(\theta) = \theta(P)$

$\Rightarrow \varphi_{P_1}\theta = \varphi_{P_2}\theta \Rightarrow \varphi_{P_1} = \varphi_{P_2} \Rightarrow \varphi(P_1) = \varphi(P_2) \Rightarrow \varphi$ is w.d

if $P_1, P_2 \in P$, $\gamma \in R$

۱) $\varphi(P_1+P_2) = \varphi_{P_1+P_2} = \varphi_{P_1+P_2}^{\theta} = \theta(P_1+P_2) = \theta(P_1) + \theta(P_2) = \varphi_{P_1}^{\theta} + \varphi_{P_2}^{\theta} = \varphi_{P_1} + \varphi_{P_2} = \varphi(P_1) + \varphi(P_2)$

۲) $\varphi(\gamma P_1) = \varphi_{\gamma P_1} = \varphi_{\gamma P_1}\theta = \theta(\gamma P_1) = \gamma\theta(P_1) = \gamma\varphi_{P_1}^{\theta} = \gamma\varphi_{P_1} = \gamma\varphi(P_1) \Rightarrow \varphi$ is R-hom o

if $P \in \ker\varphi \Rightarrow \varphi(P) = 0 \quad \forall \alpha \in Hom(P,R)$

$\Rightarrow \alpha(P) = 0$

if F is free $f : F \to P$ is onto

$\Rightarrow \exists \alpha : f\circ\alpha = i_P$ $F = \bigcup R \Rightarrow f\alpha(P) = P$ $\alpha : P \to \bigcup R \Rightarrow \alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_n)$

where $\alpha_i : P \to R \Rightarrow \alpha_i P = 0 \Rightarrow \alpha(P) = 0 \Rightarrow f\alpha(P) = 0 \Rightarrow P = 0 \Rightarrow \varphi$ is 1-1

$\Rightarrow 0 \to Hom(P,R) \xrightarrow{\bar{g}} Hom(F,R) \xrightarrow{J} Hom(\ker f, R) \to 0$ exact, split

$g \to gof$ $\bar{g} : h \to hog$

$0 \to Hom(Hom(\ker f, R), R) \to Hom(Hom(F,R),R) \to Hom(Hom(P,R),R) \to 0$ exact, split

اگر P متناهی‌مولد باشد $\ker f$ پروژکتیو و متناهی‌مولد است (بخش ۲) و اگر P متناهی‌مولد و پروژکتیو باشد $Hom(P,R)$ نیز این‌چنین است.

چون $F = \bigcup_{i=1}^{n} R \Rightarrow Hom(F,R) = Hom(\bigcup R, R) \cong \bigcup_{i=1}^{n} Hom(R,R) = F$

۶/ $F \cong \mathrm{Hom}(F,R) \Rightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(F,R),R) \cong F \Rightarrow \exists\ \beta : \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(F,R),R) \xrightarrow{\text{iso}} F$

$0 \to \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}(\ker\varphi,R),R) \xrightarrow{\beta\bar{j}} F \xrightarrow{\bar{g}\beta^{-1}} \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}_R(P,R),R) \to 0$ این دنباله exact است.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker f & \xrightarrow{j} & F & \xrightarrow{f} & P \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow I_f & \swarrow \bar{f} & \downarrow \varphi \\ 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(\ker\varphi,R),R) & \xrightarrow[\beta\bar{j}]{} & F & \xrightarrow[\bar{g}\beta^{-1}]{} & \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(P,R),R) \longrightarrow \cdot \end{array}$$

حال کافیست اثبات شود $\bar{g}\beta^{-1} = \varphi \circ f$.

$\varphi_P \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(P,R),R) \Rightarrow \exists\ p \in P : \varphi(p) = \varphi_P$

$\bar{g}\beta^{-1}$ onto $\Rightarrow \exists\ x \in F : \bar{g}\beta^{-1}x = \varphi_P \Rightarrow \varphi \circ f(x) = \varphi_P \Rightarrow \varphi(f(x)) = \varphi_P$

$\Rightarrow \varphi(f(x)) = \varphi_P$; $f(x) \in P \Rightarrow \varphi$ is onto.

اثبات $\bar{g}\beta^{-1} = \varphi \circ f$

$\sum_{i=1}^{n} r_{x_i} e_{x_i} \in F \Rightarrow \bar{g}\beta^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} r_{x_i} e_{x_i}\right) = \beta$

$\varphi \circ f\left(\sum_{i=1}^{n} r_{x_i} e_{x_i}\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum \varphi(x_i) = \sum \varphi_{x_i} f$

۹- اگر Q پروژکتیو حول R چون Q یک PID است پس آزاد است و این در سوال ۴ اثبات شد که Q عنوان حول آزاد است پس Q عنوان حول پروژکتیو است.

حال اگر Q_2 پروژکتیو باشد داریم $0 \to Z \to Q \to Q_2 \to 0$ شکسته است پس $Q \cong Q_2 \oplus Z$

از آن نتیجه میشود که Q پروژکتیو است. $\therefore$ پس Q_2 نمی‌تواند Z-مولی پروژکتیو باشد.

۱۰- P پروژکتیو است $\Leftrightarrow$ حضور P در هر نوع R مول آزاد مثل F است یعنی $F = P \cup Q$ (R-مول Q)

if $S = F \cup F \cup F \cup \cdots \Rightarrow P \cup S = P \cup (F \cup F \cup \cdots) = P \cup (P \cup Q) \cup (P \cup Q) \cup \cdots$

$= (P \cup Q) \cup (P \cup Q) \cup \cdots = S$

S is free then $P \cup S$ is free.

۱- از آنجا که P، R-مول تخت و S یک $(R-S)$ دومول است پس $P \otimes S$ یک S-مول تخت است. کافیست

ثابت شود $\mathrm{Hom}_S(P \otimes S, -)$ دقیق است. بنابر شرکت پذیری الحاقی

$\mathrm{Hom}_S(P \otimes S, -) \cong \mathrm{Hom}(P, \mathrm{Hom}(S,-)) \cong \mathrm{Hom}(P,-)$

که چون P پروژکتیو است پس $\mathrm{Hom}(P,-)$ دقیق است پس $\mathrm{Hom}_S(P \otimes S, -)$ نیز دقیق است

پس $\mathrm{Hom}_R P \otimes S$ پروژکتیو است.