بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکدهٔ علوم ریاضی

آزمون ورودی دورهٔ دکتری ریاضی

تاریخ امتحان: ۸۳/۲/۳۱
موضوع امتحان: جبر

در سوالات زیر تمام حلقه‌ها یکدار و مدولها یکانی‌اند و ارزش تمامی سوالات با هم برابر می‌باشد.

۱– R یک حلقه است بقسمی که R شامل یک میدان K بوده و R دارای مقسوم‌علیه صفر ناصفر نیست. هرگاه R به عنوان یک Kـمدول چپ دارای بعد متناهی باشد، ثابت کنید R یک حلقه تقسیم است.

۲– فرض کنید G یک pـگروه متناهی است. هرگاه G دارای یک زیرگروه منحصر به‌فرد از اندیس p باشد، ثابت کنید G دوری است.

۳– فرض کنید R حلقه ماتریس‌های بالا مثلثی روی یک حلقه تقسیم D است. رادیکال جیکبسن (Jacobson) R را یافته و نشان دهید به عنوان یکریختی حلقه‌ای داریم $R/J(R) \cong D \times \cdots \times D$.

۴– فرض کنید I ایده‌آلی از حلقه R و M و N دو Rـمدول‌اند.

الف) نشان دهید به عنوان R/Iـمدول‌های چپ داریم $R/I \otimes_R M \cong M/IM$.

ب) فرض کنید R حلقهٔ $\mathbb{Z}_4$ و M ایده‌آل $\frac{2\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$ باشد. ثابت کنید $M \otimes_R M \simeq M$ به عنوان Rـمدول.

۵– فرض کنید R یک حلقه نیمه ساده است.

الف) ثابت کنید تحت یکریختی فقط تعداد متناهی Rـمدول ساده وجود دارد.

ب) تمام ایده‌آلهای اول R را مشخص کنید.

۶– فرض کنید R یک حلقه جابجایی موضعی با ایده‌آل ماکزیمال m است. قرار دهید $k = R/m$ و فرض کنید M یک Rـمدول متناهیاً تولید شده است. ثابت کنید هرگاه $Hom_R(M,k) = 0$، آنگاه $M = 0$.

Sharif University of Technology

Department of Mathematical Sciences

Ph.D. Entrance Examination
Algebra

All the rings have a unity and modules are unitary and all questions have the same points.

1) Let R be a ring which contains a field K. Assume that R has no non-zero divisors, and R is finite dimensional as a left K-module. Prove that R is a division ring.

2) Prove that a finite p-group with a unique subgroup of index p is cyclic.

3) Denote by R the ring of upper triangular matrices over a division ring D. Calculate the Jacobson radical $J(R)$ and show that $R/J(R) \simeq D \times D$.

4) Let I be an ideal of a ring R, and M, N be two R-modules.

i) Show that $M/IM \otimes_R N/IN$ as left R/I-modules.

ii) Let R be the ring $\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$ and let M be the ideal $\frac{2\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}$. Prove that $M \otimes_R M \simeq M$ as R-module.

5) Let R be a semi-simple ring.

i) Prove that up to isomorphism there are only finitely many simple R-modules.

ii) Identify all the prime ideals of R.

6) Let R be a local commutative ring with maximal ideal m, and let $k = R/m$, and M be a finitely generated R-module. Show that if $Hom_R(M, k) = 0$, then $M = 0$.