Inden.ir & Qazvin azad university

تحقیق در عملیات

inden@inden.ir



Teacher: Sharifi

برنامه ریزی پارامتری:

در بخش قبل (تحلیل حساسیت) به بررسی تغییرات جواب مسئله برنامه‌ریزی خطی در زمان تغییرات گسسته پارامترهای مدل پرداخته شد. در این بخش این تغییرات در پارامترهای مسئله بصورت پیوسته می‌باشد. در بخش برنامه‌ریزی پارامتری، سه حالت برای تغییرات پارامترها مورد بررسی قرار می‌گیرد:

برنامه‌ریزی پارامتری برای ضرائب متغییرها در تابع هدف یا C_jها،

برنامه‌ریزی پارامتری برای ضرائب سمت راست یا b_iها،

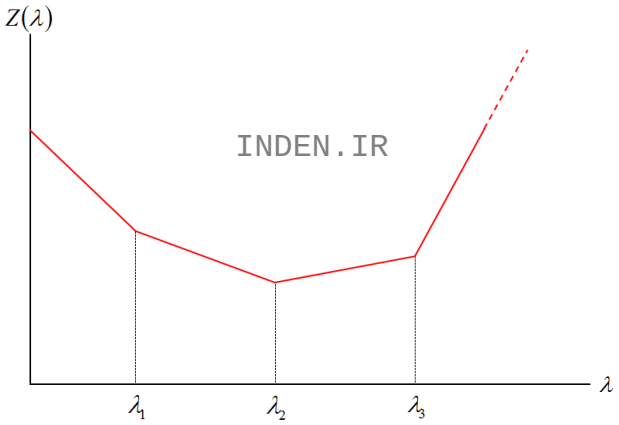
ترکیب دو حالت فوق.

برنامه‌ریزی پارامتری برای ضرائب متغییرها در تابع هدف یا C_jها

در این حالت تابع هدف بصورت زیر تغییر نموده:

$$Z=\sum_{j=1}^{n}C_jX_j \Rightarrow Z(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}(C_j+\lambda\theta_j)X_j \quad \lambda\geq 0$$

که ضرائب θ_j تغییرات ضرائب تابع هدف را به ازاء تغییرات پیوسته مقدار λ نمایش می‌دهد. شکل کلی تابع $Z(\lambda)$ بصورت زیر بوده که همواره یک تابع مقعر منکسر می‌باشد.



در این تابع در بین دو نقطه انکسار (در مابین دو مقدار λ) مجموعه متغییرهای اساسی تغییر نکرده و فقط مقدار تابع هدف در حال تغییر بوده در حالیکه در دو طرف یک نقطه انکسار (در دوطرف یک مقدار مشخص λ) ترکیب متغییرهای اساسی نیز تغییر کرده است. همچنین در نقاط انکسار مسئله دارای جواب بهینه چندگانه می‌باشد.

برنامه‌ریزی پارامتری در این حالت شامل سه قدم زیر می‌باشد:

مقدار $\lambda=0$ در نظر گرفته و مسئله را به یکی از روشهای مطالعه شده حل می‌نمائیم،

ضرائب $\lambda\theta_j$ را به روش مطالعه شده در بحث تحلیل حساسیت به جواب نهائی وارد می‌نمائیم،

مقدار λ را از صفر افزایش داده و در هر مرحله جواب جدید را به دست می‌آوریم.

مثال: اگر در مسئله درب و پنجره سازی، ضرائب تابع هدف بصورت زیر تغییر یابد، به ازاء مقادیر مختلف λ جواب مسئله را به دست آورده و نهایتا تابع $Z(\lambda)$ را رسم نمائید.

$$Z(\lambda)=(3-\lambda)X_1+(5-2\lambda)X_2 \quad \lambda\geq 0$$

حل: ابتدا مقدار $\lambda=0$ قرار داده و می‌دانیم جواب بهینه مسئله بصورت زیر می‌باشد:

B	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	1	0	0	0	$3/2$	1	36
X_1	0	1	0	0	$-1/3$	$1/3$	2
X_2	0	0	1	0	$1/2$	0	6
S_1	0	0	0	1	$1/3$	$-1/3$	2

حال با تغییر ضرائب تابع هدف خواهیم داشت:

$$X_B = [X_1 \quad X_2 \quad S_1] \qquad X_N = [S_2 \quad S_2]$$

$$C_B = [3-\lambda \quad 5-2\lambda \quad 0] \qquad C_N = [0 \quad 0]$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

$$C_B B^{-1} N - C_N = [3-\lambda \quad 5-2\lambda \quad 0] \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} - [0 \quad 0] =$$

$$\left[-1+\lambda/3+5/2-\lambda \quad 1-\lambda/3\right] = \left[3/2-2\lambda/3 \quad 1-\lambda/3\right]$$

INDEN.IR

$$C_B B^{-1} b = [3-\lambda \quad 5-2\lambda \quad 0] \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = 6-2\lambda+30-12\lambda = 36-14\lambda$$

بنابراین جدول جدید بصورت زیر خواهد بود:

B	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	1	0	0	0	$3/2-2\lambda/3$	$1-\lambda/3$	$36-14\lambda$
X_1	0	1	0	0	$-1/3$	$1/3$	2
X_2	0	0	1	0	$1/2$	0	6
S_1	0	0	0	1	$1/3$	$-1/3$	2

جواب فوق در صورتی بهینه خواهد بود که مقادیر متغییرهای غیر اساسی در سطر صفر مثبت باشند بنابراین داریم:

$1-\frac{\lambda}{3}>0\Rightarrow\lambda<3$ $\qquad$ $\frac{3}{2}-\frac{2\lambda}{3}>0\Rightarrow\lambda<\frac{9}{4}$

ناحیه بهینه بودن جدول فعلی $\qquad$ $\lambda\in\left[0,\frac{9}{4}\right)$

حال اگر مقدار $\lambda\geq\frac{9}{4}$ باشد، متغییر S_2 به عنوان متغییر اساسی ورودی انتخاب شده و متغییر S_1 به عنوان متغییر اساسی خروجی انتخاب خواهد شد. بنابراین جدول جدید بصورت زیر خواهد بود:

B	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	1	0	0	$2\lambda-\frac{9}{2}$	0	$\frac{5}{2}-\lambda$	$27-10\lambda$
X_1	0	1	0	1	0	0	4
X_2	0	0	1	$\frac{-3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3
S_2	0	0	0	3	1	−1	6

جواب فوق در صورتی بهینه خواهد بود که مقادیر متغییرهای غیر اساسی در سطر صفر مثبت باشند بنابراین داریم:

$2\lambda-\frac{9}{2}>0\Rightarrow\lambda>\frac{9}{4}$ $\qquad$ $\frac{5}{2}-\lambda>0\Rightarrow\lambda<\frac{5}{2}$

ناحیه بهینه بودن جدول فعلی $\qquad$ $\lambda\in\left(\frac{9}{4},\frac{5}{2}\right)$

حال اگر مقدار $\lambda\geq\frac{5}{2}$ باشد، متغییر S_3 به عنوان متغییر اساسی ورودی انتخاب شده و متغییر X_2 به عنوان متغییر اساسی خروجی انتخاب خواهد شد. بنابراین جدول جدید بصورت زیر خواهد بود:

INDEN.IR

B	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	1	0	$2\lambda-5$	$-\lambda+3$	0	0	$12-4\lambda$
X_1	0	1	0	1	0	0	4
S_3	0	0	2	−3	0	1	6
S_2	0	0	2	0	1	0	12

جواب فوق در صورتی بهینه خواهد بود که مقادیر متغییرهای غیر اساسی در سطر صفر مثبت باشند بنابراین داریم:

$2\lambda-5>0\Rightarrow\lambda>\frac{5}{2}$ $\qquad$ $-\lambda+3>0\Rightarrow\lambda<3$

ناحیه بهینه بودن جدول فعلی $\qquad$ $\lambda\in\left(\frac{5}{2},3\right)$

حال اگر مقدار $\lambda\geq3$ باشد، متغییر S_1 به عنوان متغییر اساسی ورودی انتخاب شده و متغییر X_1 به عنوان متغییر اساسی خروجی انتخاب خواهد شد. بنابراین جدول جدید بصورت زیر خواهد بود:

B	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	1	$\lambda-3$	$2\lambda-5$	0	0	0	0
S_1	0	1	0	1	0	0	4
S_3	0	3	2	0	0	1	18
S_2	0	0	2	0	1	0	12

جواب فوق در صورتی بهینه خواهد بود که مقادیر متغییرهای غیر اساسی در سطر صفر مثبت باشند بنابراین داریم:

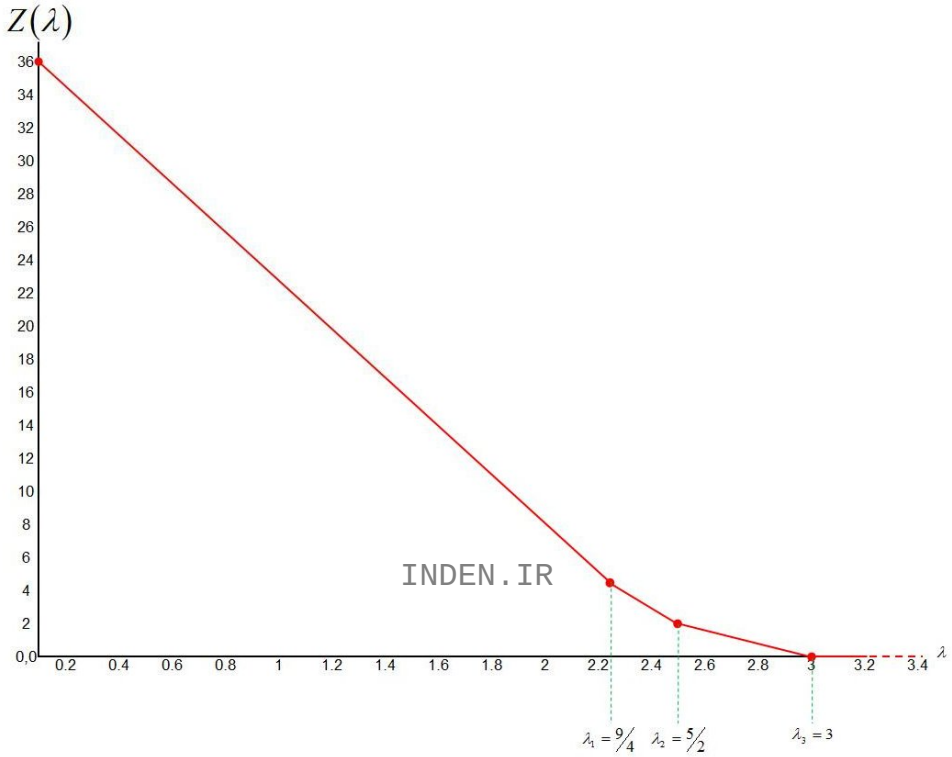
$2\lambda - 5 > 0 \Rightarrow \lambda > 5/2$

$\lambda - 3 > 0 \Rightarrow \lambda > 3$

ناحیه بهینه بودن جدول فعلی

$\lambda \in (3,+\infty)$

بنابراین جدول فوق دیگر تغییر نخواهد نمود. با مشاهده جدول ابتدائی متوجه خواهیم شد که در زمانی که $\lambda > 3$ می‌باشد ضرائب تابع هدف منفی بوده و نقطه $(0,0)$ همواره جواب بهینه باقی خواهد ماند.

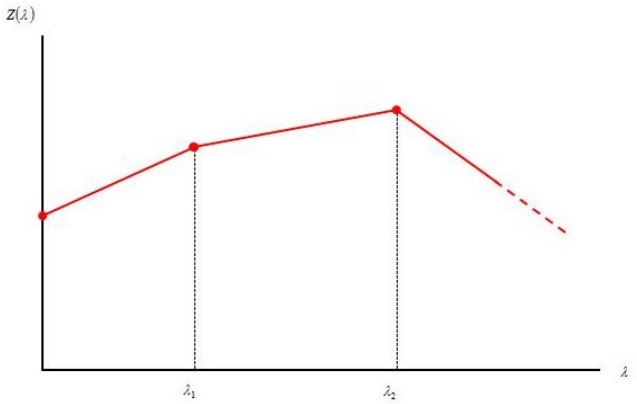


برنامه‌ریزی پارامتری برای ضرائب سمت راست یا b_iها

در این حالت مقادیر سمت راست بصورت زیر تغییر نموده:

$$b_i \Rightarrow b_i + \lambda\theta_i$$

که ضرائب θ_i تغییرات ضرائب سمت راست را به ازاء تغییرات پیوسته مقدار λ نمایش می‌دهد. شکل کلی تابع $Z(\lambda)$ بصورت زیر بوده که همواره یک تابع محدب منکسر می‌باشد.



در این تابع نیز در بین دو نقطه انکسار (در مابین دو مقدار λ) مجموعه متغییرهای اساسی تغییر نکرده و فقط مقدار تابع هدف در حال تغییر بوده در حالیکه در دو طرف یک نقطه انکسار (در دوطرف یک مقدار مشخص λ) ترکیب متغییرهای اساسی نیز تغییر کرده است. همچنین در نقاط انکسار مسئله دارای جواب بهینه چندگانه می‌باشد.

INDEN.IR

برنامه‌ریزی پارامتری در این حالت شامل سه قدم زیر می‌باشد:

مقدار $\lambda = 0$ در نظر گرفته و مسئله را به یکی از روشهای مطالعه شده حل می‌نمائیم،

ضرائب $\lambda\theta_i$ را به روش مطالعه شده در بحث تحلیل حساسیت به جواب نهائی وارد می‌نمائیم،

مقدار λ را از صفر افزایش داده و در هر مرحله جواب جدید را با استفاده از روش سیمپلکس ثانویه به دست می‌آوریم.

مثال: اگر در مسئله درب و پنجره سازی، ضرائب سمت راست بصورت زیر تغییر یابد، به ازاء مقادیر مختلف λ جواب مسئله را به دست آورده و نهایتا تابع $Z(\lambda)$ را رسم نمائید.

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-\lambda \\ 12-2\lambda \\ 18-3\lambda \end{bmatrix}$$

حل: ابتدا مقدار $\lambda = 0$ قرار داده و می‌دانیم جواب بهینه مسئله بصورت زیر می‌باشد:

B	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	1	0	0	0	$3/2$	1	36
X_1	0	1	0	0	$-1/3$	$1/3$	2
X_2	0	0	1	0	$1/2$	0	6
S_1	0	0	0	1	$1/3$	$-1/3$	2

حال با تغییر ضرائب تابع هدف خواهیم داشت:

$$X_B = [X_1 \quad X_2 \quad S_1] \qquad X_N = [S_2 \quad S_3]$$

$$C_B = [3 \quad 5 \quad 0] \qquad C_N = [0 \quad 0]$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 4-\lambda \\ 12-2\lambda \\ 18-3\lambda \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4-\lambda \\ 12-2\lambda \\ 18-3\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda/3 \\ 6-\lambda \\ 2-2\lambda/3 \end{bmatrix}$$

$$C_B B^{-1}b = [3 \quad 5 \quad 0] \begin{bmatrix} 2-\lambda/3 \\ 6-\lambda \\ 2-2\lambda/3 \end{bmatrix} = 36-6\lambda$$

INDEN.IR

بنابراین جدول جدید بصورت زیر خواهد بود:

B	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	1	0	0	0	$3/2$	1	$36-6\lambda$
X_1	0	1	0	0	$-1/3$	$1/3$	$2-\lambda/3$
X_2	0	0	1	0	$1/2$	0	$6-\lambda$
S_1	0	0	0	1	$1/3$	$-1/3$	$2-2\lambda/3$

جواب فوق در صورتی بهینه خواهد بود که ضرائب سمت راست مثبت باشند بنابراین داریم:

$$2-\lambda/3 > 0 \Rightarrow \lambda < 6 \qquad 6-\lambda > 0 \Rightarrow \lambda < 6 \qquad 2-2\lambda/3 > 0 \Rightarrow \lambda < 3$$

$$\lambda \in [0,3)$$

ناحیه بهینه بودن جدول فعلی

حال اگر مقدار $\lambda \geq 3$ باشد، متغییر S_1 به عنوان متغییر اساسی خروجی انتخاب شده و متغییر S_3 به عنوان متغییر اساسی ورودی انتخاب خواهد شد. بنابراین جدول جدید بصورت زیر خواهد بود:

B	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS

Z	1	0	0	3	$\frac{5}{2}$	0	$42-8\lambda$
X_1	0	1	0	1	0	0	$4-\lambda$
X_2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$6-\lambda$
S_3	0	0	0	-3	-1	1	$2\lambda-6$

جواب فوق در صورتی بهینه خواهد بود که ضرائب سمت راست مثبت باشند بنابراین داریم:

$4-\lambda>0\Rightarrow\lambda<4$ $\quad$ $6-\lambda>0\Rightarrow\lambda<6$ $\quad$ $2\lambda-6>0\Rightarrow\lambda>3$

ناحیه بهینه بودن جدول فعلی $\quad$ $\lambda\in(3,4)$

حال اگر مقدار $\lambda\geq 4$ باشد، متغییر X_1 به عنوان متغییر اساسی خروجی انتخاب شده و متغییر ورودی وجود نداشته که این به معنی عدم وجود منطقه موجه بوده و مسئله به پایان رسیده است.



برنامه‌ریزی پارامتری برای ضرائب تابع هدف و مقادیر سمت راست بطور توامان

این حالت از ترکیب دو حالت قبل ایجاد می‌شود. در این حالت در قدم سوم اگر مقدار سطر صفر منفی گردد با استفاده از روش سیمپلکس و اگر مقدار سمت راست صفر گردد با استفاده از روش سیمپلکس ثانویه به حل مسئله ادامه می‌دهیم.

مثال: در مثال قبل اگر تغییرات بطور توامان در نظر گرفته شود جواب چگونه خواهد بود؟

$$X_B=[X_1 \quad X_2 \quad S_1] \qquad X_N=[S_2 \quad S_2]$$

$$C_B=[3-\lambda \quad 5-2\lambda \quad 0] \qquad C_N=[0 \quad 0]$$

$$B=\begin{bmatrix}0 & -1/3 & 1/3\\ 0 & 1/2 & 0\\ 1 & 1/3 & -1/3\end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix}4-\lambda\\ 12-2\lambda\\ 18-3\lambda\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}b=\begin{bmatrix}0 & -1/3 & 1/3\\ 0 & 1/2 & 0\\ 1 & 1/3 & -1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4-\lambda\\ 12-2\lambda\\ 18-3\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-\lambda/3\\ 6-\lambda\\ 2-2\lambda/3\end{bmatrix}$$

$$C_BB^{-1}N-C_N=[3-\lambda \quad 5-2\lambda \quad 0]\begin{bmatrix}-1/3 & 1/3\\ 1/2 & 0\\ 1/3 & -1/3\end{bmatrix}-[0 \quad 0]=[3/2-2\lambda/3 \quad 1-\lambda/3]$$

$$C_BB^{-1}b=[3-\lambda \quad 5-2\lambda \quad 0]\begin{bmatrix}2-\lambda/3\\ 6-\lambda\\ 2-2\lambda/3\end{bmatrix}=\frac{8}{3}\lambda^2-20\lambda+36$$

INDEN.IR

جدول ابتدائی در این حالت برابر است با:

B	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	1	0	0	0	$3/2-2\lambda/3$	$1-\lambda/3$	$\frac{7}{3}\lambda^2-20\lambda+36$
X_1	0	1	0	0	$-1/3$	$1/3$	$2-\lambda/3$
X_2	0	0	1	0	$1/2$	0	$6-\lambda$
S_1	0	0	0	1	$1/3$	$-1/3$	$2-2\lambda/3$

جواب فوق در صورتی بهینه خواهد بود که ضرائب سمت راست مثبت باشند بنابراین داریم:

$$2-\lambda/3>0\Rightarrow\lambda<6 \qquad 6-\lambda>0\Rightarrow\lambda<6 \qquad 2-2\lambda/3>0\Rightarrow\lambda<3$$

$$1-\lambda/3>0\Rightarrow\lambda<3 \qquad 3/2-2\lambda/3>0\Rightarrow\lambda<9/4$$

$$\lambda\in\left[0,9/4\right)$$

ناحیه بهینه بودن جدول فعلی

حال اگر مقدار $\lambda \geq 9/4$ باشد، متغییر S_2 به عنوان متغییر اساسی ورودی انتخاب شده و متغییر S_1 به عنوان متغییر اساسی خروجی انتخاب خواهد شد. بنابراین جدول جدید بصورت زیر خواهد بود:

B	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	1	0	0	$2\lambda - 9/2$	0	$5/2 - \lambda$	$\lambda^2 - 13\lambda + 27$
X_1	0	1	0	1	0	0	$4 - \lambda$
X_2	0	0	1	$-3/2$	0	$1/2$	3
S_2	0	0	0	3	1	-1	$6 - 2\lambda$

جواب فوق در صورتی بهینه خواهد بود که ضرائب سمت راست و سطر صفر مثبت باشند بنابراین داریم:

$4 - \lambda > 0 \Rightarrow \lambda < 4$

$2\lambda - 9/2 > 0 \Rightarrow \lambda > \frac{9}{4}$

$\lambda \in \left[9/4, 5/2\right)$

$6 - 2\lambda > 0 \Rightarrow \lambda < 3$

$5/2 - \lambda > 0 \Rightarrow \lambda < 5/2$

ناحیه بهینه بودن جدول فعلی

حال اگر مقدار $\lambda \geq 5/2$ باشد، متغییر S_3 به عنوان متغییر اساسی ورودی انتخاب شده و متغییر X_2 به عنوان متغییر اساسی خروجی انتخاب خواهد شد. بنابراین جدول جدید بصورت زیر خواهد بود:

INDEN.IR

B	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	1	0	$2\lambda - 5$	$3 - \lambda$	0	0	$\lambda^2 - 7\lambda + 12$
X_1	0	1	0	1	0	0	$4 - \lambda$
S_3	0	0	2	-3	0	1	6
S_2	0	0	2	0	1	0	$12 - 2\lambda$

جواب فوق در صورتی بهینه خواهد بود که ضرائب سمت راست و سطر صفر مثبت باشند بنابراین داریم:

$4 - \lambda > 0 \Rightarrow \lambda < 4$

$2\lambda - 5 > 0 \Rightarrow \lambda > \frac{5}{2}$

$\lambda \in \left(5/2, 3\right)$

$12 - 2\lambda > 0 \Rightarrow \lambda < 6$

$3 - \lambda > 0 \Rightarrow \lambda < 3$

ناحیه بهینه بودن جدول فعلی

حال اگر مقدار $\lambda \geq 3$ باشد، متغییر S_1 به عنوان متغییر اساسی ورودی انتخاب شده و متغییر X_1 به عنوان متغییر اساسی خروجی انتخاب خواهد شد. بنابراین جدول جدید بصورت زیر خواهد بود:

B	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	1	$\lambda-3$	$2\lambda-5$	0	0	0	0
S_1	0	1	0	1	0	0	$4-\lambda$
S_3	0	3	2	0	0	1	$18-3\lambda$
S_2	0	0	2	0	1	0	$12-2\lambda$

$12-2\lambda>0 \Rightarrow \lambda<6$

$4-\lambda>0 \Rightarrow \lambda<4$

$3-\lambda>0 \Rightarrow \lambda<3$

$18-3\lambda>0 \Rightarrow \lambda$

ناحیه بهینه بودن جدول فعلی

$\lambda \in (3,4)$

همانطور که مشخص می‌باشد جدول فوق همان جدول ابتدائی بوده و حل مسئله به پایان رسیده است. تا زمانی که مقدار $\lambda \leq 4$ باشد جدول زیر بهینه بوده و بعد از آن جواب بهینه وجود ندارد.

INDEN.IR