معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

بنام خدا

مجموعه حاضر حل مسائلی در انتگرال دوگانه میباشد. در این مجموعه سعی شده است درخصوص موارد زیر به ترتیب اهمیت آنها، مطالب مهم و مورد توجه گنجانده شود. دانشجویان در ابتدا سعی نمایند نکات مهم در مسائل حل شده را با دقت مورد توجه قرار داده ودر هر بخش به طور جداگانه نسبت به حل تمرینات خواسته شده اقدام نمایند.

موارد مورد بررسی به شرح زیر میباشند

۱ – رسم ناحیه انتگرالگیری
۲ – محاسبه انتگرال دوگانه در مختصات دکارتی
۳ – محاسبه انتگرال دوگانه در مختصات قطبی
٤ – محاسبه انتگرال دوگانه با استفاده از تغییر متغیر
٥ – محاسبه انتگرال دوگانه غیر عادی
٦ – محاسبه سطح ناحیه به کمک انتگرال دوگانه
۷ – محاسبه حجم با استفاده از انتگرال دوگانه
۸ – محاسبه سطح رویه و انتگرال رویه ای

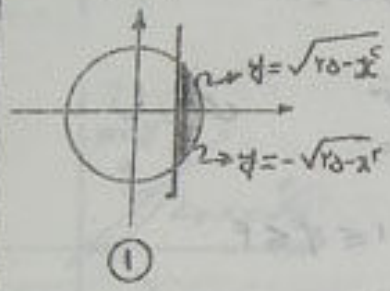
باقر کرامتی

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

ناحیه R را در هریک از مسائل زیر رسم و حدود متغیرها را با توجه به اختیار نوارهای قائم یا افقی و یا در حالت قطبی مشخص نمائید .

① R سمت راست خط $x=3$ و داخل دایره $x^2+y^2=25$ می باشد .

$$R:\begin{cases} x \geq 3 \\ x^2+y^2 \leq 25 \end{cases}$$



ⓒ : درصورت استفاده از نوار قائم طبق شکل ① داریم

سقف بالا $y=\sqrt{25-x^2}$

کف پائین $y=-\sqrt{25-x^2}$

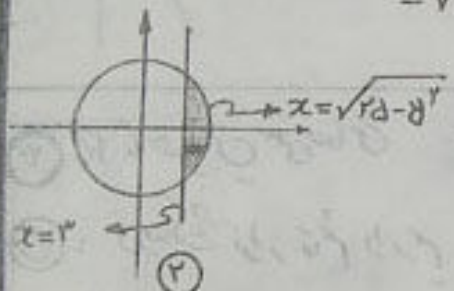
$$-\sqrt{25-x^2} \leq y \leq \sqrt{25-x^2} \quad , \quad 3 \leq x \leq 5$$

درصورت استفاده از نوار افقی طبق شکل ② داریم

سمت راست $x=\sqrt{25-y^2}$

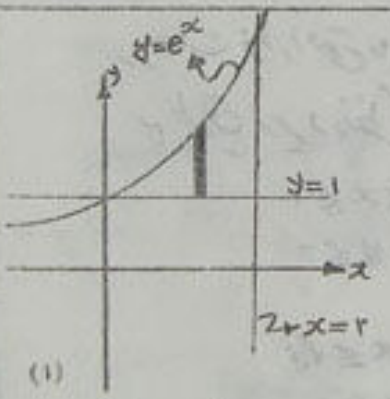
سمت چپ $x=3$

$$3 \leq x \leq \sqrt{25-y^2} \quad , \quad -4 \leq y \leq 4$$



$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x=3 \end{cases} \rightarrow 9+y^2=25 \rightarrow y=\pm 4$$

② R ناحیه بین منحنی های $y=e^x$ ، $y=1$ و $x=2$ می باشد .



ⓒ : درصورت استفاده از نوار قائم (شکل ۱) داریم

سقف بالا $y=e^x$

کف پائین $y=1$

$$\rightarrow \quad 1 \leq y \leq e^x \quad , \quad 0 \leq x \leq 1$$

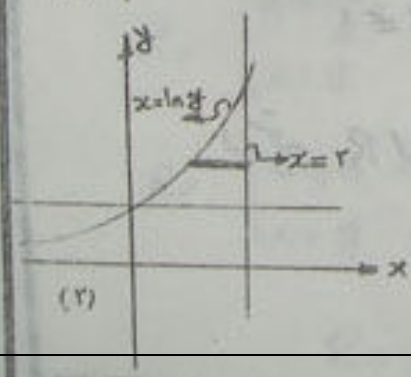
درصورت استفاده از نوار افقی (شکل ۲) داریم

سمت چپ $x=\ln y$

سمت راست $x=2$

$$y=e^x \rightarrow y=e^2 \quad , \quad x=2$$

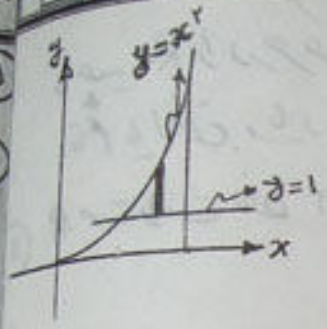
$$\ln y \leq x \leq 2 \quad , \quad 1 \leq y \leq e^2$$



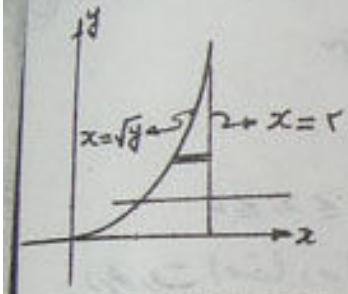
معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

۳) R ناحیه بین منحنی های $y=x^2$ ، $x=2$ و $y=1$ می باشد.

ج) نوار قائم : منحنی بالا $y=x^2$
" پائین $y=1$
$1 \le x \le 2$ $1 \le y \le x^2$

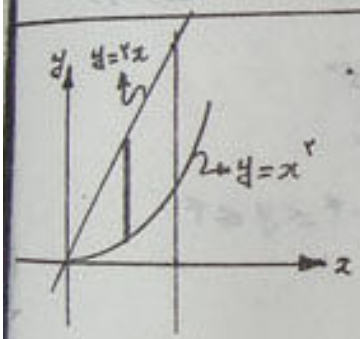


نوار افقی : منحنی راست $x=2$ $x=2$
" چپ $x=\sqrt{y}$ $y=4$
$1 \le y \le 4$ $\sqrt{y} \le x \le 2$



۴) R ناحیه بین منحنی های $y=2x$ ، $y=x^2$ و $x \ge 1$ می باشد.

ج) در حالت نوار قائم داریم : منحنی بالا $y=2x$
" پائین $y=x^2$
$0 \le x \le 1$ $x^2 \le y \le 2x$
$x=1$, $y=x^2=1$

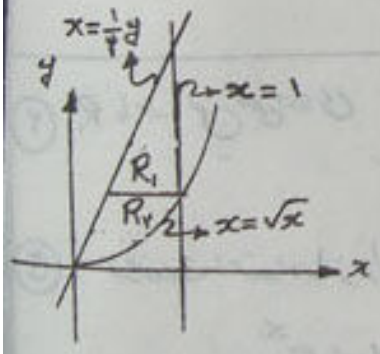


در حالت نوار افقی با شکستی در ناحیه R_1 و R_2 به طریق زیر در نظر بگیریم

R_1 : $\begin{cases} x=1 & \text{منحنی راست} \\ x=\frac{1}{2}y & \text{منحنی چپ} \end{cases}$ $\quad 1 \le x \le \frac{y}{2}$ $\quad 1 < y \le 2$

$x=1, y=2x \rightarrow y=2$

R_2 : $\begin{cases} x=\sqrt{y} & \text{منحنی راست} \\ x=\frac{1}{2}y & \text{" چپ} \end{cases}$ $\quad \frac{y}{2} \le x \le \sqrt{y}$ $\quad 0 \le y \le 1$

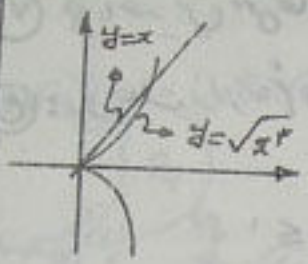


در نتیجه R می تواند بصورت اجتماع این دو ناحیه باشد، یعنی

$R = R_1 \cup R_2$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

⑤ R ناحیه‌ای بین منحنی‌های $y=x$ و $y^2=x^3$ می‌باشد.

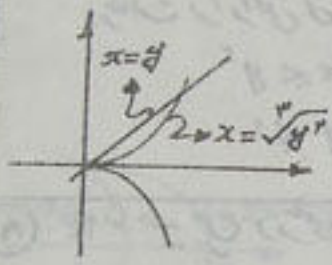


ⓒ: در حالت نوار قائم داریم

$y=x$ منحنی بالا

$y=\sqrt{x^3}$ " پائین $\sqrt{x^3} \le y \le x$

$x=\sqrt{x^3} \to x=0$ و $x=1$ $0 \le x \le 1$



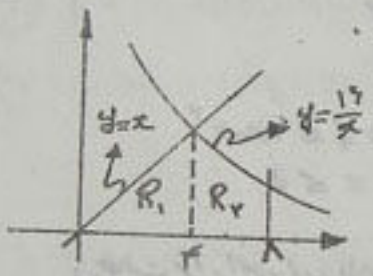
در حالت نوار افقی داریم

$x=\sqrt[3]{y^2}$ منحنی راست

$x=y$ " چپ $y^2 \le x \le y$

$0 \le y \le 1$

⑥ R ناحیه بین منحنی‌های $xy=16$ ، $y=x$ ، $x=8$ و $y=0$ می‌باشد.



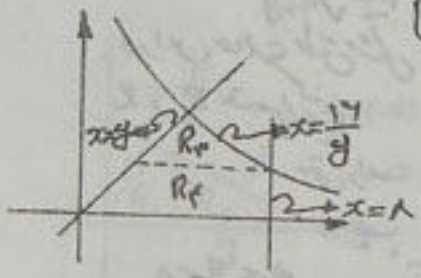
ⓒ: در حالت نوار قائم، ناحیه را به دو ناحیه R_1 و R_2 تبدیل زیر تقسیم می‌کنیم

R_1: $\begin{cases} y=x & \text{منحنی بالا} \\ y=0 & \text{منحنی پائین} \end{cases}$ $0 \le x \le 4$

$\begin{cases} x=8 \\ y=\frac{16}{x} \end{cases} \to y=2$ ، $\begin{cases} y=x \\ y=\frac{16}{x} \end{cases} \to x=4, y=4$

R_2: $\begin{cases} y=\frac{16}{x} & \text{بالا} \\ y=0 & \text{پائین} \end{cases} \to$ $0 \le y \le \frac{16}{x}$ $4 \le x \le 8$

$R=R_1 \cup R_2$



در حالت نوار افقی ناحیه را طبق شکل ۲ به R_3 و R_4 تبدیل زیر تقسیم می‌کنیم

R_3: $\begin{cases} x=\frac{16}{y} & \text{منحنی راست} \\ x=y & \text{" چپ} \end{cases}$ $y \le x \le \frac{16}{y}$ $2 \le y \le 4$

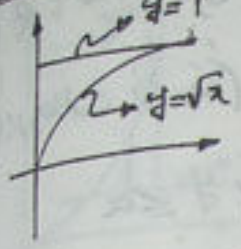
R_4: $\begin{cases} x=8 & \text{منحنی راست} \\ x=y & \text{" چپ} \end{cases}$ $y \le x \le 8$ $0 \le y \le 2$

$R=R_3 \cup R_4$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

(۷) R ناحیه بین منحنی های $y=\sqrt{x}$ و $y=1$ می باشد.

ج: در حالت نوار قائم داریم

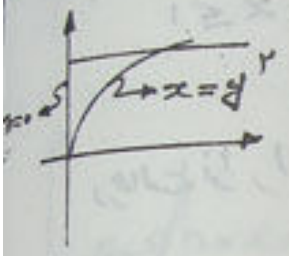


$y=1$ منحنی بالا

$y=\sqrt{x}$ " پائین

$0 \le x \le 1 \quad \sqrt{x} \le y \le 1$

در حالت نوار افقی می توان نوشت



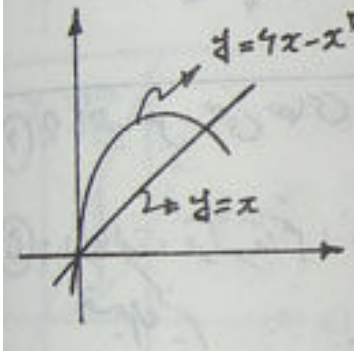
$x=y^2$ منحنی راست $\quad 0 \le x \le y^2$

$x=0$ " چپ $\quad 0 \le y \le 1$

---

(۸) R ناحیه بین دو منحنی $\begin{cases} y=6x-x^2 \\ y=x \end{cases}$ می باشد.

ج: در حالت نوار قائم می توان نوشت



$y=6x-x^2$ منحنی بالا

$y=x$ " پائین

$x=6x-x^2 \quad x \le y \le 6x-x^2$

$x^2-5x=0 \quad 0 \le x \le 5$

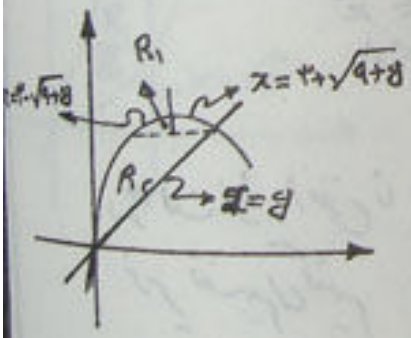
$x=0,5$

$y=0,5$

در حالت نوار افقی می توان نوشت

$x^2-6x-y=0 \quad x=3\pm\sqrt{9+y}$

در این حالت طبق شکل ناحیه R را به دو ناحیه R_1 و R_2 تقسیم می کنیم



$R_1: \begin{cases} x=3+\sqrt{9+y} & \text{منحنی راست} \\ x=3-\sqrt{9+y} & \text{" چپ} \end{cases} \quad 5 \le y \le 8$

$3-\sqrt{9+y} \le x \le 3+\sqrt{9+y}$

می توان با شتق گرفتن نشان داد که نقطه ماکزیمم دارای مختصات $A\left|{}^{2}_{8}\right.$ می باشد.

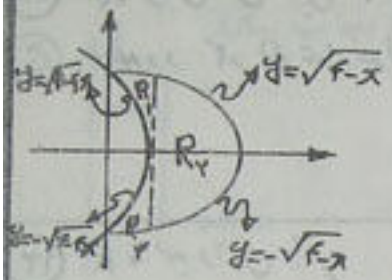
$R_2: \begin{cases} x=3-\sqrt{9+y} & \text{منحنی چپ} \\ x=y & \text{" راست} \end{cases} \quad 0 \le y \le 5$

$3-\sqrt{9+y} \le x \le y$

$R=R_1 \cup R_2$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

(۹) R ناحیه‌ای بین منحنی‌های $y^2=4-x$ و $y^2=4-4x$ می‌باشد.



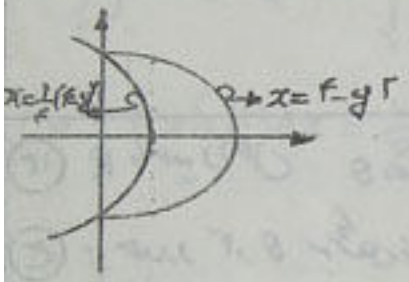
ⓐ : درصورت استفاده از نوار عمودی R به سه زیرناحیه R_1، R_2 و R_3 تشکیل زیر افراز میگردد

نقاط برخورد $y^2=4-4x \rightarrow y=\pm\sqrt{4-4x}$

$y^2=4-x \rightarrow y=\pm\sqrt{4-x}$

(۰,۴) (۰,-۲)

$$R_1:\begin{cases} y=\sqrt{4-x} & \text{بالا} \\ y=\sqrt{4-4x} & \text{پائین} \end{cases} \quad \sqrt{4-4x}\le y\le\sqrt{4-x} \quad 0\le x\le 1$$



$$R_2:\begin{cases} y=\sqrt{4-x} & \text{بالا} \\ y=-\sqrt{4-x} & \text{پائین} \end{cases} \quad -\sqrt{4-x}\le y\le\sqrt{4-x} \quad 1\le x\le 4$$

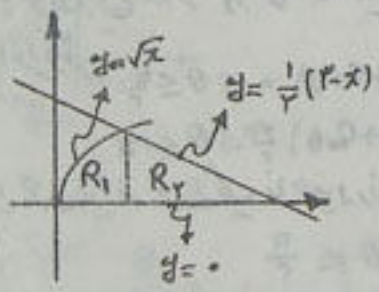
$$R_3:\begin{cases} y=-\sqrt{4-4x} & \text{بالا} \\ y=-\sqrt{4-x} & \text{پائین} \end{cases} \quad -\sqrt{4-x}\le y\le-\sqrt{4-4x} \quad 0\le x\le 1$$

درصورت استفاده از منحنی‌های چپ و راست، حدود به شکل زیر می‌باشد

راست $x=4-y^2$ $\quad \frac{1}{4}(4-y^2)\le x\le 4-y^2$

چپ $x=\frac{1}{4}(4-y^2)$ $\quad -2\le y\le 2$

(۱۰) R ناحیه بین $x=y^2$، $x+2y=3$ و $y=0$ می‌باشد



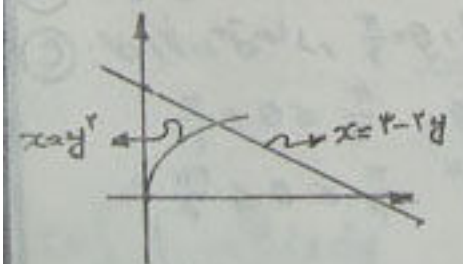
ⓒ : ازنظر منحنی‌های بالا و پائین R مجبوریم به دو زیرناحیه R_1، R_2 به صورت زیر تقسیم گردد

محل برخورد $x+2y=3$ ، $x=y^2 \rightarrow$ (۱,۱)

R_1 : $\quad \sqrt{x}\le y\le\frac{1}{2}(3-x) \quad 0\le x\le 1$

R_2 : $\quad 0\le y\le\frac{1}{2}(3-x) \quad 1\le x\le 3$

$R=R_1\cup R_2$



منحنی‌های چپ و راست :

راست $x=3-2y$

چپ $x=y^2$

$y^2\le x\le 3-2y$

$0\le y\le 1$

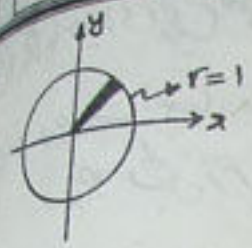
معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

انتگرال دوگانه : رسم ناحیه انتگرالگیری R

(۱۱) R داخل منحنی قطبی $r=1$ می باشد.

ج : حدود r و θ عبارتند از

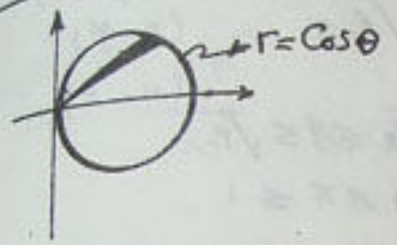
$$0 \le r \le 1$$
$$0 \le \theta \le 2\pi$$



(۱۲) R ناحیه داخل دایره $r=\cos\theta$ می باشد

ج : حدود r و θ عبارتند از

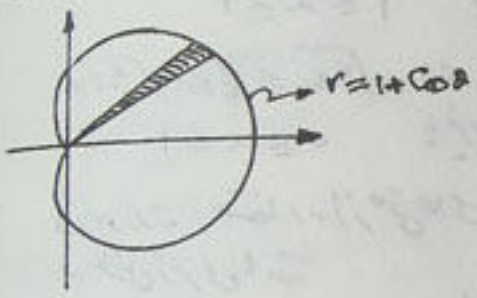
$$0 \le r \le \cos\theta$$
$$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$



(۱۳) R ناحیه داخل $r=1+\cos\theta$ می باشد.

ج : حدود r و θ به شکل زیر می باشد

$$0 \le r \le 1+\cos\theta$$
$$0 \le \theta \le 2\pi$$



(۱۴) R ناحیه داخل $r=2(1+\cos\theta)$ و خارج $r=2$ می باشد.

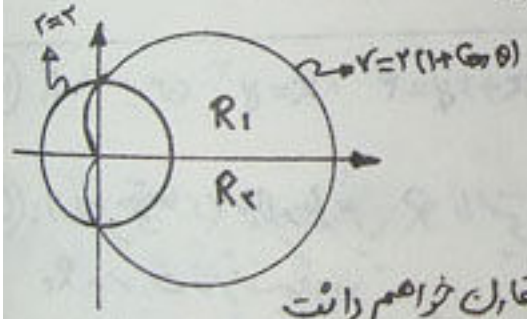
ج : برای تعیین حدود r و θ ناحیه R می توانیم به دو ناحیه R_1 و R_2 افراز گردد

R_1 : $2 \le r \le 2(1+\cos\theta)$ $\quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

R_2 : $2 \le r \le 2(1+\cos\theta)$ $\quad \frac{3\pi}{2} \le \theta \le 2\pi$

یا R می تواند فقط یک ناحیه در نظر گرفته شود و با استفاده از تقارن خواهیم داشت

$$2 \le r \le 2(1+\cos\theta) \qquad \frac{-\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$



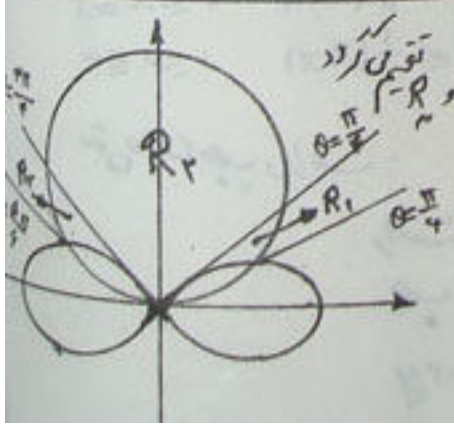
(۱۵) R ناحیه خارج $r^2=8\cos 2\theta$ و داخل $r=4\sin\theta$ می باشد

ج : محل برخورد منحنی ها در $\theta=\frac{\pi}{6}$ و $\theta=\frac{5\pi}{6}$ می باشد. ناحیه به سه ناحیه R_1، R_2 و R_3 تقسیم می گردد

R_1 : $2\sqrt{2\cos 2\theta} \le r \le 4\sin\theta$ $\quad \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$

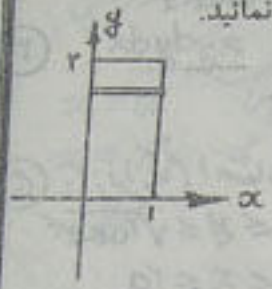
R_2 : $0 \le r \le 4\sin\theta$ $\quad \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3\pi}{4}$

R_3 : $2\sqrt{2\cos 2\theta} \le r \le 4\sin\theta$ $\quad \frac{3\pi}{4} \le \theta \le \frac{5\pi}{6}$



معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

درهر یک از مسائل زیر ناحیه انتگرالگیری R رارسم ومقدار انتگرال را محاسبه نمائید.



$$I=\int_0^1\int_0^2 (x^2+y^2)\,dy\,dx \qquad (1)$$

ج: ناحیه R یک مستطیلی به رئوس $R:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 2\end{cases}$ می باشد.

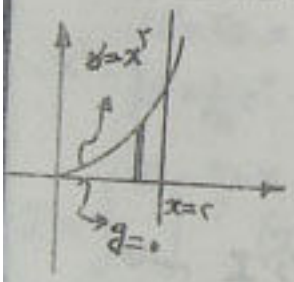
اگر از نوار قائم انتگرالگیری می توانیم بنویسیم

$$I=\int_0^1\int_0^2 (x^2+y)^2\,dy\,dx=\int_0^1\left[x^2y+\frac{1}{3}y^3\right]\Big|_0^2 dx$$

$$=\int_0^1 \left(2x^2+\frac{8}{3}\right)dx=\frac{10}{3}$$

درصورت استفاده از متغیرهای جب وراست داریم

$$I=\int_0^2\int_0^1 (x^2+y^2)\,dx\,dy=\int_0^2 \left(\frac{x^3}{3}+xy^2\right)\Big|_0^2 dy=\int_0^2\left(\frac{8}{3}+2y^2\right)dy=\frac{10}{3}$$



$$I=\int_0^2\int_0^{x^2} e^{\frac{y}{x}}\,dy\,dx \qquad (2)$$

ج: متغیرها بالا و پائین می باشد و R عبارتست از $\begin{cases}0\le y\le x^2\\ 0\le x\le 2\end{cases}$

لذا از نوار قائم استفاده شده است و داریم

$$I=\int_0^2\int_0^{x^2} e^{\frac{y}{x}}\,dy\,dx=\int_0^2\left(xe^{\frac{y}{x}}\right)\Big|_0^{x^2} dx=\int_0^2 (xe^x-x)\,dx=(x-1)e^x-\frac{1}{2}x^2\Big|_0^2=e^2-1$$

درحالت استفاده از متغیرهای جب وراست داریم

متغیر جب $x=\sqrt{y}$

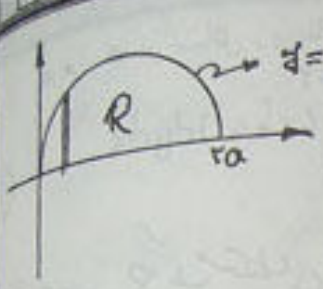
" راست $x=2$

$0\le y\le 4$

$$I=\int_0^4\int_{\sqrt{y}}^2 e^{\frac{x}{y}}\,dx\,dy$$

انتگرال $\int_{\sqrt{y}}^2 e^{\frac{x}{y}}dx$ نسبت به x قابل حل نمی باشد لذا نمی توان محاسبه کرد.

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران
منبع این کتاب : www.icivil.ir
www.icivil.ir



$y=\sqrt{2ax-x^2}$

$$I=\int_0^{2a}\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} xy\,dy\,dx \quad (3)$$

ج) : از نوار قائم استفاده شده است و R عبارت از

$$R:\begin{cases} 0\le y\le\sqrt{2ax-x^2} \\ 0\le x\le 2a \end{cases}$$

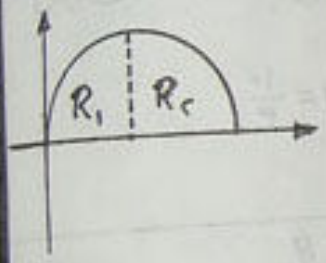
$y=\sqrt{2ax-x^2}$ محور xها و $y=0$ دایره می باشد ،

$$y=\sqrt{2ax-x^2}\to y^2=2ax-x^2$$

$$\to x^2-2ax+y^2=0 \to (x-a)^2+y^2=a^2$$

$$I=\int_0^{2a}\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} xy\,dy\,dx=\int_0^{2a}\left(\frac{x}{2}y^2\right)\Big|_0^{\sqrt{2ax-x^2}}dx=\int_0^{2a}\frac{x}{2}(2ax-x^2)\,dx=\frac{2}{3}a^4$$

درصورت استفاده از نوار افقی ، R به دو ناحیه R_1 و R_2 تبدیل میگردد



$$y=\sqrt{2ax-x^2}\to x^2-2ax+y^2=0$$

$$x=a\pm\sqrt{a^2-y^2}$$

$$\begin{cases} x=a+\sqrt{a^2-y^2} \\ x=a-\sqrt{a^2-y^2} \end{cases} \qquad 0\le y\le a$$

$$\iint_R=\iint_{R_1}+\iint_{R_2}\to I=\int_0^a\int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{x=a} xy\,dx\,dy+\int_0^a\int_{x=a}^{a+\sqrt{a^2-y^2}} xy\,dx\,dy$$

محاسبه I در حالت نوار قائم به مراتب بهتر از حالت استفاده از نوار افقی می باشد

$$I=\int_0^a\int_0^x \frac{\cos y\cdot dy\,dx}{\sqrt{(a-x)(a-y)}} \quad (4)$$



ج) : از نوار قائم استفاده شده است و R عبارت از :

$$0\le y\le x$$
$$0\le x\le a$$

$$I=\int_0^a\int_0^x \frac{\cos y\cdot dy\,dx}{\sqrt{(a-x)(a-y)}}=\int_0^a (a-x)^{-\frac{1}{2}}\left[\int_0^x\left(\frac{\cos y}{\sqrt{a-y}}\right)dy\right]dx$$

در این حالت جزو $\int\frac{\cos y}{\sqrt{a-y}}\,dy$ قابل انتگرالگیری می باشد ، با بستی ترتیب انتگرالگیری را

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

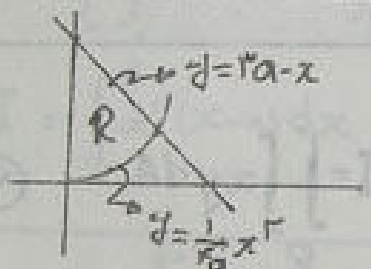
← تغییر داد ، ممکن است در حالت استفاده از نوار افقی بتوان انتگرال را محاسبه نمود. در این صورت حدی های جهت و راست و حدود y بشکل زیر است

$x=a$ حدی راست
$x=y$ چپ "
$0 \le y \le a$

$$\rightarrow I=\int_0^a \int_y^a \frac{\cos y \, dx\,dy}{\sqrt{(x-a)(y-a)}} = \int_0^a \frac{\cos y}{\sqrt{y-a}} \left[\int_y^a (x-a)^{-\frac{1}{2}} dx \right] dy$$

$$\int_y^a (x-a)^{-\frac{1}{2}} dx = 2(x-a)^{\frac{1}{2}} \Big|_y^a = 2(0-\sqrt{y-a})$$

$$\rightarrow I=\int_0^a \frac{\cos y}{\sqrt{y-a}} (-2\sqrt{y-a})\,dy = -2\int_0^a \cos y\,dy = -2\sin y \Big|_0^a = -2\sin a$$



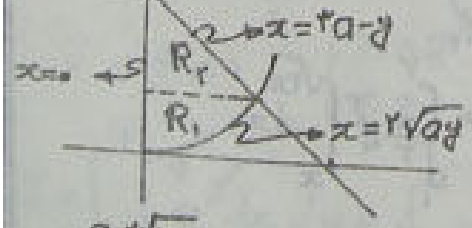
$$I=\int_0^{2a} \int_{\frac{x^2}{4a}}^{3a-x} (x^2+y^2)\,dy\,dx \quad (a)$$

(a) : از مختصات بالا و پائین استفاده شده است ولذا :

$$R: \begin{cases} y=3a-x & \text{بالا} \\ y=\frac{1}{4a}x^2 & \text{پائین} \end{cases} \quad 0 \le x \le 2a$$

$$I=\int_0^{2a} \int_{\frac{1}{4a}x^2}^{3a-x} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^{2a} \left(x^2 y + \frac{1}{3}y^3 \right) \Big|_{\frac{x^2}{4a}}^{3a-x} dx$$

$$= \int_0^{2a} \left[x^2(3a-x) + \frac{1}{3}(3a-x)^3 - \frac{x^4}{4a} - \frac{x^6}{192a^3} \right] dx = \frac{314}{35}a^4$$



در صورت استفاده از نوار افقی باید ناحیه R به دو ناحیه R_1 و R_2 افراز گردد و در این صورت

$$\iint_R = \iint_{R_1} + \iint_{R_2}$$

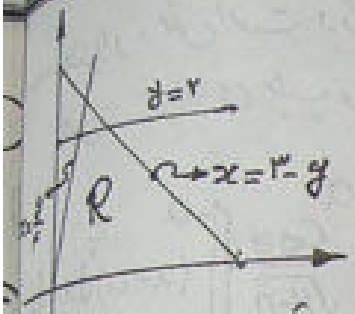
طبق شکل می توان نوشت

$$I=\int_0^a \int_0^{x\sqrt{4a}} (x^2+y^2)\,dx\,dy + \int_a^{3a} \int_0^{3a-y} (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

⑥ $I=\iint_R (x^2+y^2)\,dA \quad (dA=dx\,dy)$ ، R ناحیه محدود به منحنی‌های

$y=2$ ، $y=4x$ ، $x+y=3$ و $y=0$ می‌باشد

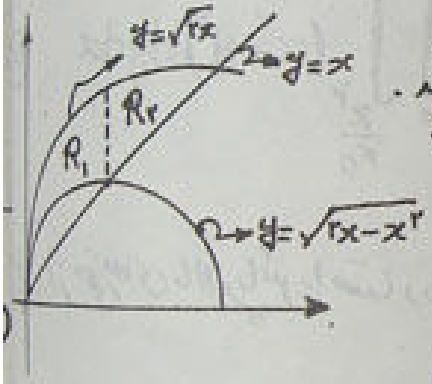


ⓒ : در اینجا بهتر است از نوار افقی استفاده نمائیم زیرا اگر از نوار قائم استفاده نمائیم باید ناحیه را به سه قسمت تقسیم نمائیم که در واقع محاسبات بسیار طولانی‌تر می‌شود

$0\le y\le 2$ ، منحنی چپ $x=\frac{1}{4}y$ ، منحنی راست $x=3-y$

$$I=\int_0^2\int_{\frac{1}{4}y}^{3-y}(x^2+y^2)\,dx\,dy=\int_0^2\left(\frac{1}{3}x^3+xy^2\right)\Big|_{\frac{1}{4}y}^{3-y}dy=\int_0^2\left[\frac{(3-y)^3}{3}+(3-y)y^2-\frac{y^3}{192}-\frac{y^3}{4}\right]dy=9\frac{21}{48}$$

⑦ $I=\iint_R xy\,dA$ ، R ناحیه بین منحنی‌های $\begin{cases}x^2+y^2-2x=0\\ y^2=2x\\ y=x\end{cases}$ می‌باشد.



ⓒ : اگر ناحیه R را به دو ناحیه R_1 و R_2 طبق شکل افراز نمائیم آنگاه با استفاده از نوار قائم به راحتی می‌توان مقدار انتگرال را محاسبه نمود.

R_1: $\begin{cases}y=\sqrt{2x} & \text{منحنی بالا}\\ y=\sqrt{2x-x^2} & \text{منحنی پائین}\end{cases}$ $\quad 0\le x\le 1$

$\begin{cases}x^2+y^2-2x=0\\ y=x\end{cases}\rightarrow \begin{matrix}x=0\\ x=1\end{matrix}$ $\quad \begin{cases}y=\sqrt{2x}\\ y=x\end{cases}\rightarrow \begin{matrix}x=0\\ x=2\end{matrix}$

R_2: $\begin{cases}y=\sqrt{2x} & \text{منحنی بالا}\\ y=x & \text{منحنی پائین}\end{cases}$ $\quad 1\le x\le 2$

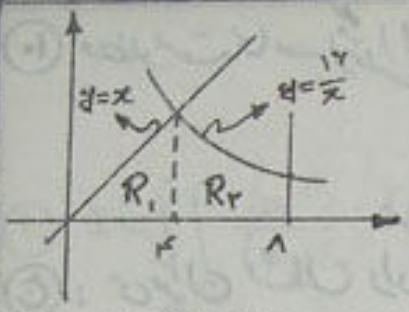
$$I=\iint_R=\iint_{R_1}+\iint_{R_2}$$

$$I=\int_0^1\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}}xy\,dy\,dx+\int_1^2\int_x^{\sqrt{2x}}xy\,dy\,dx=\int_0^1\frac{x}{2}y^2\Big|_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}}dx+\int_1^2\frac{x}{2}y^2\Big|_x^{\sqrt{2x}}dx$$

$$I=\int_0^1\frac{x}{2}(2x-2x+x^2)\,dx+\int_1^2\frac{x}{2}(2x-x^2)\,dx=\frac{7}{12}$$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

⑧ $I=\iint_R x^2\,dA$ ، R ناحیه بین منحنی‌های $\begin{cases} xy=16 \\ y=x \\ y=0 \\ x=8 \end{cases}$ می‌باشد.



$R_1: \begin{cases} 0\le y\le x \\ 0\le x\le 4 \end{cases}$

$R_2: \begin{cases} 0\le y\le \frac{16}{x} \\ 4\le x\le 8 \end{cases}$

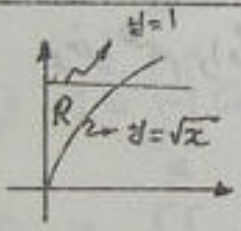
ⓒ : اگر R را به دو ناحیه R_1 و R_2 طبق شکل افراز نمائیم می‌توانیم از نوارهای قائم استفاده نمائیم. البته می‌توان R را بگونه‌ای افراز نمود که از نوار افقی نیز استفاده نمائیم

$$I=\iint_{R_1}+\iint_{R_2}$$

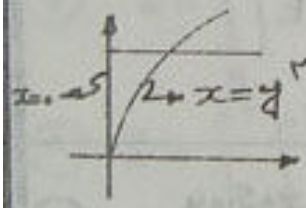
$$I=\int_0^4\int_0^x x^2\,dy\,dx+\int_4^8\int_0^{\frac{16}{x}} x^2\,dy\,dx=\int_0^4 x^2y\Big|_0^x dx+\int_4^8 x^2y\Big|_0^{\frac{16}{x}} dx$$

$$I=\int_0^4 x^2(x-0)\,dx+\int_4^8 x^2\left(\frac{16}{x}-0\right)dx=448$$

⑨ مطلوبست محاسبه انتگرال $I=\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}\,dy\,dx$.



ⓒ : انتگرال $\int e^{y^3}dy$ قابل محاسبه نمی‌باشد زیرا مشتق y^3 در انتگرال موجود نمی‌باشد. اکنون ترتیب انتگرالگیری را تغییر، ممکن است سهولتی در محاسبه انتگرال ایجاد شود.



در حالت اولی ناحیه R بشکل $\begin{cases} \sqrt{x}\le y\le 1 \\ 0\le x\le 1 \end{cases}$ می‌باشد

$y=1$ سقف بالا

$y=\sqrt{x}$ " پائین

اکنون با استفاده از نوار افقی می‌توان نوشت $\begin{cases} x=y^2 \\ x=0 \end{cases}$ ، $0\le y\le 1$

به این ترتیب خواهیم داشت

$$I=\int_0^1\int_0^{y^2} e^{y^3}dx\,dy=\int_0^1 xe^{y^3}\Big|_0^{y^2}dy=\int_0^1 (y^2e^{y^3}-0)\,dy$$

$$I=\frac{1}{3}e^{y^3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}(e-1)$$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

(۱۰) مطلوبست محاسبه انتگرال زیر

$$I=\iint_{x^2+y^2\le 1}(\sin x+y^3+3)\,dA$$

ج: می‌توان نشان داد که در یک انتگرال دوگانه اگر ناحیه R نسبت به محورهای مختصات متقارن باشد و توابع $f(x)$ یا $g(y)$ فرد باشد آنگاه

$$\iint_R f(x)\,dA=0 \quad , \quad \iint_R g(y)\,dA=0$$

همانطور که مشاهده می‌شود میدان $R: x^2+y^2\le 1$ نسبت به محورهای مختصات متقارن می‌باشد و توابع y^3 و $\sin x$ فرد می‌باشند به این ترتیب:

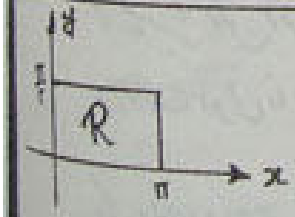
$$\iint_R y^3\,dA=\iint_R \sin x\,dA=0$$

و خواهیم داشت

$$I=\iint_R \sin x\,dA+\iint_R y^3\,dA+3\iint_R dA$$

$$I=0+0+3\iint_R dA=3(\text{مساحت دایره } R)=3(\pi)=3\pi$$

(۱۱)



$$R:\begin{cases}0\le x\le \pi\\ 0\le y\le \frac{\pi}{2}\end{cases} \qquad I=\iint_R e^{x+\sin y}\cos y\,dA$$

ج: طبق ناحیه R، I به شکل زیر محاسبه می‌شود

$$I=\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x+\sin y}\cos y\,dy\,dx=\int_0^{\pi} e^x\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos y\,e^{\sin y}\,dy\right]dx=\int_0^{\pi} e^x e^{\sin y}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}dx$$

$$I=(e-1)\int_0^{\pi} e^x dx=(e^{\pi}-1)(e-1)$$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

تمرینات برای حل

۱- مطلوبست محاسبه انتگرالهای زیر

① $I=\iint_R \frac{x^2}{1+y^2}\,dA$ $R: \begin{matrix}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1\end{matrix}$

② $I=\iint_R \frac{dA}{(x+y+1)^2}$ $R: \begin{matrix}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1\end{matrix}$

③ $I=\iint_R x^2 y \cos(\pi y^2)\,dA$ $R: \begin{matrix}0\le x\le \frac{\pi}{2}\\ 0\le y\le 2\end{matrix}$

④ $I=\iint_R (x^2+y^2)\,dA$ $R: \begin{matrix}y=x^2\\ y^2=x\end{matrix}$

⑤ $I=\iint_R (x+y)\,dA$ ناحیه داخل متوازی الاضلاع به رئوس $R: \begin{matrix}A(2,2)\\ B(1,-1)\\ C(-2,-2)\\ D(-1,1)\end{matrix}$

⑥ $I=\iint_R \cos(x+y)\,dA$ $R: \begin{cases}x=0\\ y=\pi\\ y=x\end{cases}$

⑦ $I=\iint_R x^2y^2\sqrt{1-x^3-y^3}\,dA$ $R: \begin{cases}x^3+y^3=1\\ x\ge 0\\ y\ge 0\end{cases}$

⑧ $I=\int_{-2}^{2}\int_{-1}^{1} |x^2y^3|\,dy\,dx$

⑨ $I=\int_{-2}^{2}\int_{-1}^{1} [x^2]y^3\,dy\,dx$

⑩ $I=\int_{-2}^{2}\int_{-1}^{1} [x^2]|y^3|\,dy\,dx$

⑪ $I=\int_{1/2}^{1}\int_{0}^{2x} \cos(\pi x^2)\,dy\,dx$

⑫ $I=\int_{0}^{1}\int_{y^2}^{y}\sqrt{\frac{y}{x}}\,dx\,dy$

⑬ $I=\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}|x-y|\,dy\,dx$

⑭ $I=\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy\,dx$

⑮ $I=\int_{0}^{1}\int_{y}^{1} e^{\frac{y}{x}}\,dx\,dy$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

۲- در انتگرال‌های زیر ترتیب انتگرال‌گیری را تغییر دهید

(۱۷) $I=\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\,dy$

(۱۸) $I=\int_{0}^{a}dx\int_{2x}^{\sqrt{2ax-x^2}}f(x,y)\,dy$

(۱۹) $I=\int_{-2}^{2}\int_{\frac{-\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2}}}f(x,y)\,dy\,dx$

(۲۰) $I=\int_{1}^{2}\int_{x}^{2x}f(x,y)\,dy\,dx$

(۲۱) $I=\int_{0}^{2}\int_{2x}^{4-x}f(x,y)\,dy\,dx$

(۲۲) $I=\int_{0}^{1}\int_{0}^{x}f(x,y)\,dy\,dx+\int_{1}^{2}\int_{0}^{2-x}f(x,y)\,dy\,dx$

(۲۳) $I=\int_{0}^{1}\int_{0}^{x^2}f(x,y)\,dy\,dx+\int_{1}^{3}\int_{0}^{\frac{1}{2}(3-x)}f(x,y)\,dy\,dx$

(۲۴) $I=\int_{0}^{1}\int_{0}^{\frac{1}{3}x^2}f(x,y)\,dy\,dx+\int_{1}^{2}\int_{0}^{1-\sqrt{4x-x^2-3}}f(x,y)\,dy\,dx$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران
منبع این کتاب : www.icivil.ir

جواب تمرینات

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\ln\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{-\pi}{16}$

۴) $\frac{33}{140}$ ۵) 0 ۶) -2

۷) $\frac{4}{135}$ ۸) $\frac{8}{3}$ ۹) 0

۱۰) $5-\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ۱۱) $\frac{-\sqrt{2}}{24}$ ۱۲) $\frac{1}{8}$

۱۳) $\frac{1}{3}$ ۱۴) $\frac{1}{2}$ و $\frac{-1}{2}$ ← $f(x,y)$ در $(0,0)$ دارای انتگرال دوگانه نمی باشد زیرا ناپیوسته است

۱۵) $\frac{e-1}{2}$

۱۶) $I=\int_0^1\int_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy\,dx$

۱۷) $I=\int_0^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$

۱۸) $I=\int_0^a\int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{y} f(x,y)\,dx\,dy$

۱۹) $I=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$

۲۰) $I=\int_1^2\int_1^{y} f(x,y)\,dx\,dy+\int_2^4\int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)\,dx\,dy$

۲۱) $I=\int_0^4\int_0^{\frac{y}{2}} f(x,y)\,dx\,dy+\int_4^6\int_0^{6-y} f(x,y)\,dx\,dy$

۲۲) $I=\int_0^1\int_y^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy$

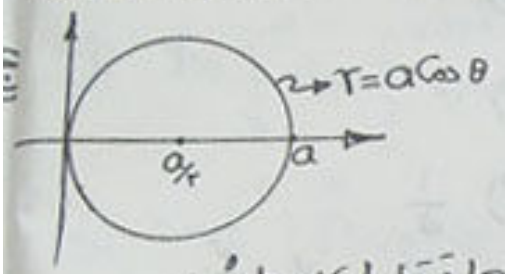
۲۳) $I=\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^{2-2y} f(x,y)\,dx\,dy$

۲۴) $I=\int_0^1\int_{\frac{y}{2}}^{2-\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

در هر یک از مسائل زیر ناحیه R را رسم و با استفاده از مختصات قطبی مقدار انتگرال را محاسبه نمائید.

① مطلوبست محاسبه انتگرال $I=\iint_R \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dA$ ، $R: x^2+y^2\le ax$



ⓒ R: دایره‌ای حول محور x ها

$x^2+y^2-ax=0$

$r^2-ar\cos\theta=0$ ⟹ $r=0$ و $r=a\cos\theta$

$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ ← زیرا محور نسبت به محور x ها قرینه می‌باشد

به این ترتیب خواهیم داشت

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos\theta}\sqrt{a^2-r^2}\cdot r\,dr\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{a\cos\theta} r(a^2-r^2)^{\frac{1}{2}}dr\right]d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^{a\cos\theta}d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{3}\left[(a^2-a^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}-(a^2)^{\frac{3}{2}}\right]d\theta$$

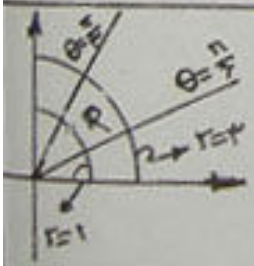
$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{-1}{3}\left(a^3\sin^3\theta-a^3\right)d\theta=\frac{a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\,d\theta$$

$$I=\frac{a^3}{3}\left[\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cdot\sin\theta\cdot d\theta\right]=\frac{a^3}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$$

$u=\cos\theta$

$du=-\sin\theta\cdot d\theta$

② مطلوبست محاسبه $I=\iint_R \operatorname{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right)dA$



$R:\begin{cases}x^2+y^2\ge 1\\ x^2+y^2\le 9\\ y\ge\frac{x}{\sqrt{3}}\\ y\le x\sqrt{3}\end{cases}$

ⓒ می‌توان نوشت: $\begin{cases}y=\frac{1}{\sqrt{3}}x=(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6})x\\ y=\sqrt{3}x=(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3})x\end{cases}$

به این ترتیب $\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{3}$ ، $1\le r\le 3$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\int_1^3\operatorname{Arctg}\left(\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}\right)r\,dr\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left[\int_1^3 r\,dr\right]\theta\cdot d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{r^2}{2}\Big|_1^3\cdot\theta\,d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}(9-1)\theta\,d\theta$$

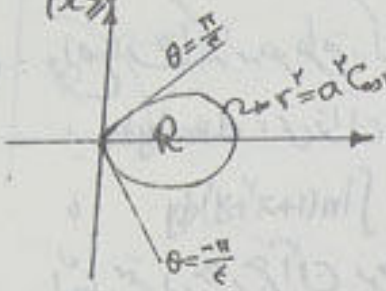
$$I=4\left(\frac{1}{2}\theta^2\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=2\left(\frac{\pi^2}{9}-\frac{\pi^2}{36}\right)=\frac{\pi^2}{6}$$

$\operatorname{Arctg}(\operatorname{tg}\theta)=\theta$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

(۳) مطلوبست محاسبه انتگرال $I=\iint_R \frac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{r^2+a^2}}$

$R:\begin{cases} r^2=a^2\cos 2\theta \\ x\geq 0 \end{cases}$



ⓒ : طبق شکل حدود θ و r بصورت زیری باشند

$-\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}$

$0\leq r\leq a\sqrt{\cos 2\theta}$

$$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}}\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+a^2}}\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(r^2+a^2)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}}d\theta$$

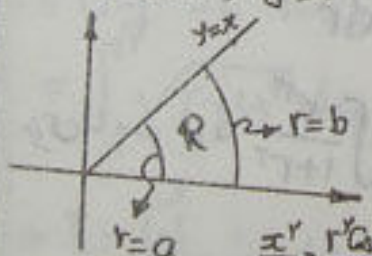
- این ترتیب خواهیم داشت

$$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[\sqrt{a^2\cos 2\theta+a^2}-\sqrt{a^2}\right]d\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}[a\sqrt{2}\cos\theta-a]d\theta=2a-\frac{\pi}{2}a$$

$a^2\cos 2\theta+a^2=a^2(\cos 2\theta+1)=2a^2\cos\theta$

(۴) مطلوبست محاسبه انتگرال $I=\iint_R \frac{y^2}{x^2}dA$

$R:\begin{cases} a^2\leq x^2+y^2\leq b^2 \\ y\leq x \\ x\geq 0\ ,\ y\geq 0 \end{cases}$



ⓒ : طبق شکل R یک قسمت از حلقه‌ای بین خطوط $y=0$ و $y=x$ می باشد. بدین ترتیب بهترین حالت برای محاسبه انتگرال فوق استفاده از مختصات قطبی می باشد.

$\frac{x^2}{y^2}=\frac{r^2\cos^2\theta}{r^2\sin^2\theta}=\tan^2\theta$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_a^b \tan^2\theta\cdot r\,dr\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta\left(\frac{1}{2}r^2\right)\Big|_a^b d\theta=\frac{1}{2}(b^2-a^2)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta\,d\theta$$

$$I=\frac{1}{2}(b^2-a^2)\int_0^{\frac{\pi}{4}}[(1+\tan^2\theta)-1]d\theta=\frac{1}{2}(b^2-a^2)(\tan\theta-\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

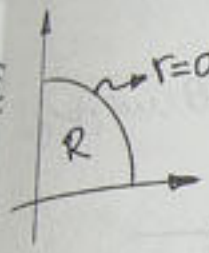
$$I=\frac{2-\pi}{8}(b^2-a^2)$$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

⑤ مطلوبست محاسبه انتگرال $I=\iint_R \ln(1+x^2+y^2)\,dA$

⑥ $x^2+y^2\le a^2$, $x\ge 0, y\ge 0$

⑦ : واضح است که به هر طریقی که dA باشد یعنی $dA=dxdy$ یا $dA=dydx$، نمی‌توان انتگرال $\int \ln(1+x^2+y^2)dx$ یا $\int \ln(1+x^2+y^2)dy$ را محاسبه نمود زیرا مشتق داخل لگاریتم در خارج آن موجود نمی‌باشد ولی ظاهراً به نظر می‌رسد که اگر از مختصات قطبی استفاده نمائیم، این مشکل مرتفع گردد.



طبق شکل حدود r و θ به صورت زیر می‌باشد

$$0\le r\le a$$
$$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

به این ترتیب خواهیم داشت

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a \ln(1+r^2)\cdot r\,dr\,d\theta$$

ابتدا انتگرال $\int \ln(1+r^2)\cdot r\,dr$ را محاسبه می‌نمائیم. با استفاده از روش جزء به جزء می‌توان نوشت

$$u=\ln(1+r^2) \rightarrow du=\frac{2r}{1+r^2}dr$$
$$dv=r\,dr \rightarrow v=\frac{1}{2}r^2$$

$$\rightarrow \int \ln(1+r^2)r\,dr=\frac{1}{2}r^2\ln(1+r^2)-\int\frac{1}{2}\frac{2r^3}{1+r^2}dr$$

برای محاسبه $\int\frac{r^3}{1+r^2}dr$، صورت کسر داخل انتگرال را بر مخرج تقسیم می‌کنیم، لذا خواهیم داشت

$$\int\left(r-\frac{r}{1+r^2}\right)dr=\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{2}\ln(1+r^2)$$

به این ترتیب داریم

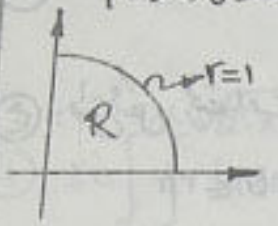
$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}r^2\ln(1+r^2)-\frac{1}{2}r^2+\frac{1}{2}\ln(1+r^2)\right]\Big|_0^a d\theta$$

$$I=\left[\frac{1}{2}a^2\ln(1+a^2)-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}\ln(1+a^2)\right]\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=\frac{\pi}{4}\left[(1+a^2)\ln(1+a^2)-a^2\right]$$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

(۲) خلاصه‌ست محاسبه انتگرال $I=\iint_R \sqrt{\frac{1-x^2y^2}{1+x^2+y^2}}\,dA$

$R:\begin{cases} x^2+y^2\le 1 \\ x\ge 0, y\ge 0 \end{cases}$



(۳) : تابع زیر علامت انتگرال به گونه‌ای است که در مختصات دکارتی نمی‌توان بر حسب x انتگرال گرفت و نه بر حسب y. اما اگر از دستگاه قطبی کمک بگیریم امکان دارد بتوان انتگرال را محاسبه نمود. بالاخره به ناحیه R طبق شکل حدود r و θ بشکل زیر باشند

$0\le r\le a$
$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

به این ترتیب انتگرال بشکل زیر تبدیل میگردد

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\left[\int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\,r\,dr\right]d\theta$$

ابتدا انتگرال $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\,r\,dr$ را محاسبه می‌نمائیم. در این انتگرال تعویض متغیر $u=1+r^2$ را در نظر می‌گیریم لذا خواهیم داشت

$u^2=1+r^2 \to u\,du=r\,dr$

$r=0 \to u=1$

$r=1 \to u=\sqrt{2}$

$r^2=u-1 \to 1-r^2=2-u^2$

$$\to \int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\,r\,dr=\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2-u^2}{u^2}}\cdot u\,du$$

$$=\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2-u^2}\,du=\left[\frac{u}{2}\sqrt{4-u^2}+\arcsin\frac{u}{\sqrt{2}}\right]\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

$$\to I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)d\theta$$

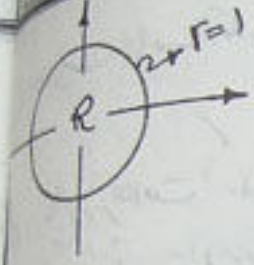
$$I=\left(\frac{\pi-2}{4}\right)\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I=\frac{\pi}{8}(\pi-2)$$

در این انتگرال $u=\sqrt{2}\sin t$ در نظر گرفته شده است، که برای محاسبه جواب را نوشته‌ام.

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

(۷) مطلوب محاسبه انتگرال $I=\iint_{x^2+y^2\le 1}(a-2x-3y)\,dA$



ج: طبق شکل در مختصات قطبی حدود r و θ بشکل زیر است

$$0\le\theta\le 2\pi \quad , \quad 0\le r\le 1$$

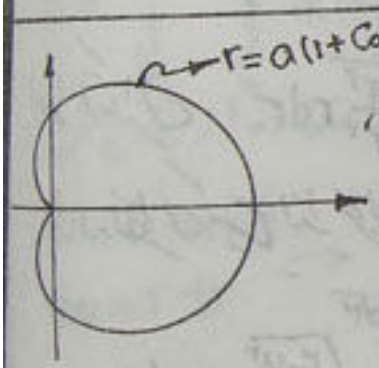
به این ترتیب خواهیم داشت

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^1 (a-2r\cos\theta-3r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

$$I=\int_0^{2\pi}\left[\frac{a}{2}r^2-\frac{1}{3}(2\cos\theta+3\sin\theta)r^3\right]_0^1 d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\frac{a}{2}-\frac{1}{3}(2\cos\theta+3\sin\theta)\right]d\theta$$

$$I=\int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{2}-\frac{2}{3}\cos\theta-\sin\theta\right)d\theta=\left(\frac{a}{2}\theta-\frac{2}{3}\sin\theta+\cos\theta\right)\Big|_0^{2\pi}=\pi a$$

(۸) مطلوبست محاسبه انتگرال $I=\iint_R y^2\,dA$ ، R ناحیه محدود به منحنی $r=a(1+\cos\theta)$ می باشد.



ج: با توجه به ناحیه انتگرالگیری حدود r و θ به صورت زیر می باشد

$$0\le r\le a(1+\cos\theta)$$
$$0\le\theta\le 2\pi$$

در نتیجه داریم

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{a(1+\cos\theta)}(r\sin\theta)^2\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}(\sin^2\theta)\left(\frac{1}{4}r^4\right)\Big|_0^{a(1+\cos\theta)}d\theta$$

$$I=\frac{a^4}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,(1+\cos\theta)^4\,d\theta=\frac{a^4}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cdot(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)^2\,d\theta$$

پس از انتگرالگیری خواهیم داشت

$$I=\frac{21}{\cdots}\pi a^4$$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

تمرینات برای حل

۱- با استفاده از مختصات قطبی انتگرالهای زیر را محاسبه نمائید.

① $I=\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)\,dy\,dx$

② $I=\iint_R \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dA$

③ $I=\iint_R \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dA \quad R: x^2+y^2\le ax$

$R:\begin{cases} x^2+y^2\ge 1 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$

④ $I=\iint_R \operatorname{Arctg}\frac{y}{x}\,dA$

$R:\begin{cases} x^2+y^2\ge 1 \\ x^2+y^2\ge 9 \\ y\ge \frac{1}{\sqrt{3}}x \\ y\le \sqrt{3}x \end{cases}$

⑤ $I=\iint_R \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dA \quad R: (x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ ناحیه داخل حلقه $x\ge 0$

۲- در انتگرالهای زیر حدود را در دستگاه قطبی بنویسید

⑥ $I=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx$

۷ $I=\int_0^2\int_0^x f(\sqrt{x^2+y^2})\,dy$

⑧ $I=\iint_R f(x,y)\,dA$

$R:\begin{cases} x=-2 \\ y=x \\ y=1 \end{cases}$

⑨ $I=\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} f\left(\frac{y}{x}\right)dy\,dx$

⑩ $I=\iint_R f(x,y)\,dA$

$R: x^2+y^2\le ax$ ناحیه محدود به دایره

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

جواب تمرینات

۱) $\frac{\pi}{4}\left[(1+a^2)\ln(1+a^2)-a^2\right]$

۲) $\frac{\pi(\pi-2)}{8}$

۳) $\frac{a^3}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$

۴) $\frac{\pi^2}{9}$

۵) $\left(\frac{\pi}{4}-\frac{12\sqrt{2}-20}{9}\right)\frac{a^3}{2}$

۶) $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\frac{1}{\cos\theta}} r f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,dr\,d\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\frac{1}{\sin\theta}} r f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,dr\,d\theta$

۷) $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\frac{2}{\cos\theta}} f(r)\,r\,dr\,d\theta$

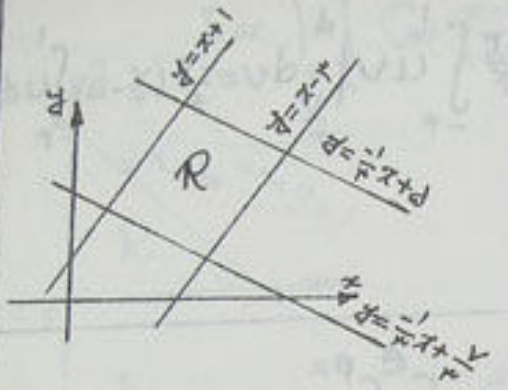
۸) $I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\int_{0}^{\frac{1}{\sin\theta}} r f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,dr\,d\theta$

۹) $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\tg\theta)\,d\theta\int_{0}^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}} r\,dr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\int_{0}^{\frac{1}{\sin\theta}} f(\tg\theta)\,r\,dr\,d\theta+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi}\int_{0}^{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}} f(\tg\theta)\,r\,dr\,d\theta$

۱۰) $I=\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{a\sin\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

با استفاده از تغییر متغیر مناسب انتگرالهای زیر را محاسبه نمائید.



$$R:\begin{cases} y-x=-3 \\ y-x=1 \\ y+\frac{x}{3}=\frac{7}{3} \\ y+\frac{x}{3}=d \end{cases} \qquad I=\iint_R (y-x)\,dA \qquad (1)$$

(2) : اگر بخواهیم این انتگرال را در مختصات دکارتی محاسبه نمائیم با کمی به لحاظ استفاده از بخش‌های بالا و پائین یا چپ و راست، ناحیه R را به سه زیر ناحیه تقسیم نمائیم که در این صورت محاسبه انتگرال طولانی و حجیم می‌شود. لذا ممکن است با استفاده از تغییر متغیر مناسب انتگرال را به روش ساده‌تری محاسبه نمود. در این مساله به نظر می‌آید بهترین تعویض متغیر به شکل زیر باشد

$$u=y-x \quad , \quad v=y+\frac{1}{3}x$$

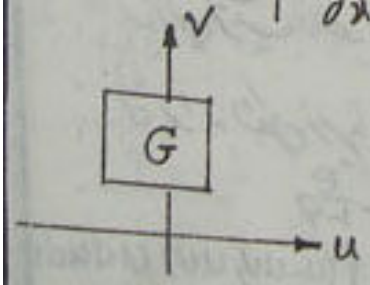
به این ترتیب ژاکوبین تبدیل به صورت زیر محاسبه می‌گردد

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

در اینجا چون x و y برحسب u و v نمی‌باشند، می‌توان از دستور زیر استفاده نمود. البته می‌توان x و y را برحسب u و v محاسبه نمود.

$$J(u,v)=\frac{1}{J(x,y)}$$

$$J(x,y)=\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix}=-1-\frac{1}{3}=-\frac{4}{3} \rightarrow J(u,v)=\frac{-3}{4}$$



با توجه به ناحیه R، ناحیه G در دستگاه u و v به شکل زیر رسم می‌گردد

$$y-x=1 \rightarrow u=1$$
$$y-x=-3 \rightarrow u=-3$$
$$y+\frac{x}{3}=\frac{7}{3} \rightarrow v=\frac{7}{3} \quad \text{و} \quad y+\frac{x}{3}=5 \rightarrow v=5$$

به این ترتیب با توجه به اینکه $y-x=u$ مقدار $\iint_R (y-x)\,dA$ در دستگاه u و v

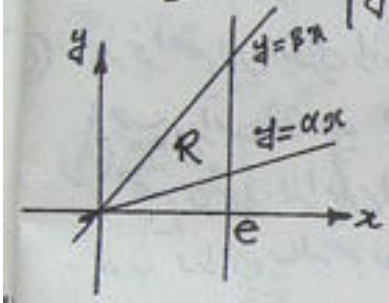
معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

(۳) $I=\iint_G u\,dA_1=\int_{-۳}^{۱}\int_{\frac{v}{۳}}^{۵}u\,du\,dv\,du=\frac{-۳}{۴}\int_{-۳}^{۱}uv\Big|_{\frac{v}{۳}}^{۵}dv=\frac{-۳}{۴}\left(\frac{v}{۴}-۵\right)\int_{-۳}^{۱}u\,du$

$I=-۸$

(ج) $dA_1=J(u,v)\,du\,dv$

(۲) $I=\int_{۰}^{e}\int_{\alpha x}^{\beta x}f(x,y)\,dy\,dx$ ، $۰<\alpha<\beta$ از تغییر متغیر استفاده نمائید. $\begin{cases}x=u-uv\\ y=uv\end{cases}$



(ج) با این تغییر متغیر، ژاکوبین به شکل زیر بدست می آید

$J(u,v)=\begin{vmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}۱-v & -u\\ v & u\end{vmatrix}=u$

با توجه به ناحیه R، حدود ناحیه G در دستگاه u و v شکل زیر خواهد بود

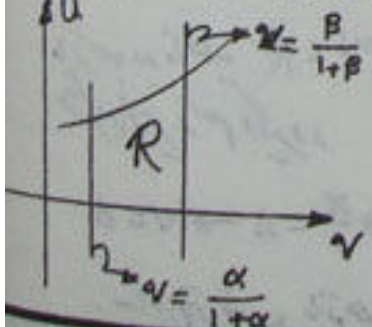
$\begin{matrix}x=u-uv\\ y=uv\end{matrix}\rightarrow x=u-y\rightarrow\begin{cases}y=\alpha x\rightarrow x=u-\alpha x\rightarrow u=(۱+\alpha)x\\ y=\beta x\rightarrow x=u-\beta x\rightarrow u=(۱+\beta)x\end{cases}$

$y=uv\ (x\neq ۰)\rightarrow\begin{cases}y=\alpha x\\ u=(۱+\alpha)x\end{cases}\rightarrow \alpha x=v(۱+\alpha)x\rightarrow v=\frac{\alpha}{۱+\alpha}$

$y=uv\ (x\neq ۰)\rightarrow\begin{cases}y=\beta x\\ u=(۱+\beta)x\end{cases}\rightarrow \beta x=v(۱+\beta)x\rightarrow v=\frac{\beta}{۱+\beta}$

$x=۰, y=۰\rightarrow\begin{cases}u-uv=۰\\ uv=۰\end{cases}\rightarrow u=۰$

$x=e\rightarrow e=u-uv\rightarrow u=\frac{e}{۱-v}$ به این ترتیب ناحیه G



می تواند شکل زیر باشد و مقدار انتگرال به صورت زیر تبدیل میگردد

$I=\int_{۰}^{e}\int_{\alpha x}^{\beta x}f(x,y)\,dy\,dx=\int_{\frac{\alpha}{۱+\alpha}}^{\frac{\beta}{۱+\beta}}\int_{۰}^{\frac{e}{۱-v}}f(u-uv,uv)\,u\,du\,dv$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

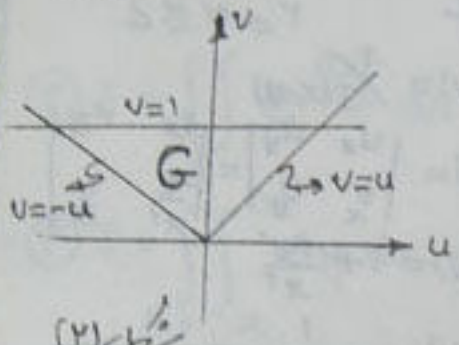
(۳) مطلوبست محاسبه انتگرال

$$I=\int_0^1\int_0^{1-y} \cos\frac{x-y}{x+y}\,dx\,dy$$

(۴) : این انتگرال در دستگاه دکارتی قطعا به صورت صحیح قابل حل می باشد زیرا مشتق زاویه یعنی $\frac{x-y}{x+y}$ نسبت به x و y مرجوری باشد.

اگر از تعویض متغیرهای $\begin{cases}u=x-y\\ v=x+y\end{cases}$ استفاده نمائیم مقدار انتگرال به راحتی بدست می آید. برای این کار به شرح زیر عمل می نمائیم

شکل (۱)



شکل (۲)

$$\iint_R f(x,y)\,dA_1=\iint_G h(u,v)\,|J(u,v)|\,dA_2$$

$dA_1=dy\,dx$, $dA_2=du\,dv$

$$J(u,v)=\frac{1}{J(x,y)}\quad,\quad J(x,y)=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}$$

$$J(x,y)=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2\rightarrow J(u,v)=\frac{1}{2}$$

برای مشخص کردن ناحیه G در دستگاه UV از مرزهای ناحیه R در دستگاه xy استفاده می نمائیم.

$$x+y=1\rightarrow v=1$$

$$y=0\rightarrow\begin{cases}u=x-0\\ v=x+0\end{cases}\rightarrow u=v\quad,\quad x=0\rightarrow\begin{cases}u=0-y\\ v=0+y\end{cases}\rightarrow v=-u$$

بدین ترتیب شکل ۲ ناحیه G در دستگاه UV بدست می آید.

مقدار انتگرال به شرح زیر خواهد بود

$$I=\iint_G \cos\frac{u}{v}\,dA_2=\frac{1}{2}\int_0^1\int_{-v}^{v}\cos\frac{u}{v}\,du\,dv$$

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1 v\left(\sin\frac{u}{v}\right)\Big|_{-v}^{v}\,dv=\frac{1}{2}\int_0^1(2\sin 1)\,v\,dv$$

$$I=\frac{1}{2}\sin(1)$$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

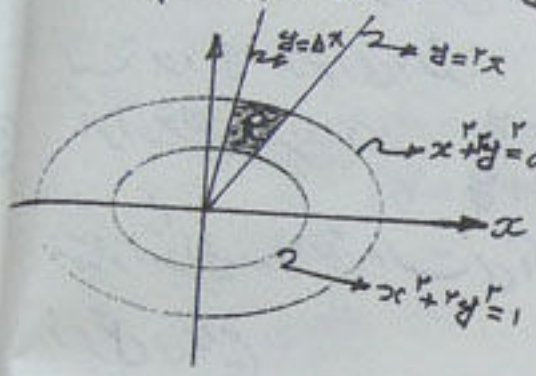
انتگرال دوگانه : محاسبه انتگرال دوگانه با استفاده از تعویض متغیر

$$I=\iint_R dA$$

۱) مطلوبست محاسبه انتگرال

R ناحیه محدود به منحنی های زیر است

$$\begin{cases} x^2+2y^2=1 , & x^2+2y^2=4 \\ y=2x , & y=4x \end{cases}$$



۲) می توان از تغییر متغیرهای زیر استفاده نمود:

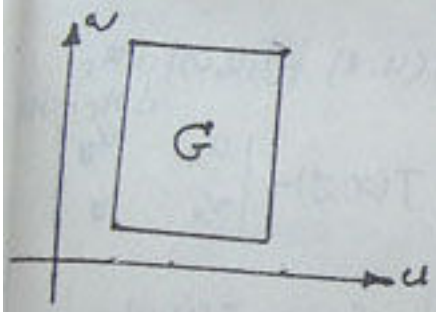
$$u=x^2+2y^2 \rightarrow 1\le u\le 4$$
$$v=\frac{y}{x} \qquad 2\le v\le 4$$

$$J(u,v)=\frac{1}{J(x,y)}$$

$$J(x,y)=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2x & 4y \\ \frac{-y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix}$$

$$J(x,y)=2+\frac{4y^2}{x^2}$$

$$J(u,v)=\frac{1}{2+4\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{1}{2(1+2v^2)}$$



به این ترتیب طبق شکل (۲) می توان نوشت

$$I=\iint_G h(u,v)\,|J(u,v)|\,dA_{uv}=\int_2^4\int_1^4 \frac{du\,dv}{2(1+2v^2)}=\int_2^4 \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\text{Arctg}\sqrt{2}v\Big|_1^4 du$$

$$I=\frac{3}{2\sqrt{2}}\,\text{Arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

تمرینات برای حل

با استفاده از تعویض متغیر انتگرالهای زیر را محاسبه نمائید

① $I=\iint_R \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dA$ $\quad R:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$

② $I=\iint_R dA$ $\quad R:\ \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{h^2}-\frac{y^2}{k^2}$ ناحیه محدود به خم

③ $I=\iint_R e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dA$ $\quad u=y-x$, $v=y+x$ $\quad R:$ مثلثی به رئوس $C|_1^0, B|_0^1, A|_0^0$

④ $I=\int_0^1\int_x^{2x} dy\,dx$ $\quad x=u(1-v)$, $y=uv$

⑤ - اگر $x=u^2-v^2$ و $y=2uv$ و ناحیه R در صفحه uv شکل زیر باشد

$R_{uv}:\ 1\le u\le 2$, $-1\le v\le 1$

مطلوبست محاسبه انتگرال $I=\iint_{R_{xy}} x\,dA$ (R_{xy} ناحیه را نیز رسم کنید).

⑥ - مطلوبست محاسبه انتگرال زیر

$I=\iint_R (x-y)^2\sin^2(x+y)\,dA$ $\quad R:$ متوازی الاضلاعی با رئوس $A|_0^\pi, B|_\pi^{2\pi}, C|_{2\pi}^\pi, D|_\pi^0$

⑦ - مطلوبست محاسبه انتگرال $\iint_R (x^2+y^2)\,dA$، R ناحیه محدود به منحنی‌های زیر می‌باشد

$x^2-y^2=1$, $x^2-y^2=9$, $xy=2$, $xy=4$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

جواب تمرینات

۱) $\frac{۲\pi}{۳}ab$

۲) $ab\left[\left(\frac{a^۲}{h^۲}-\frac{b^۲}{k^۲}\right)\operatorname{Arctg}\frac{ak}{bh}+\frac{ab}{hk}\right]$

۳) $\frac{۱}{۴}(e-e^{-۱})$

۴) $\frac{۱}{۲}$

۵) ۴۸

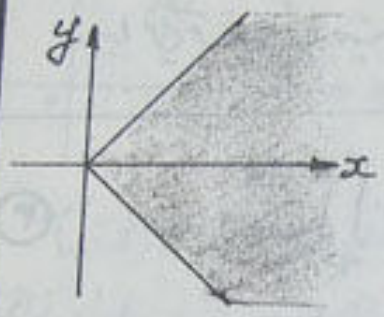
۶) $\frac{\pi^۴}{۳}$

۷) ۸

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

در هریک ازمسائل زیر ابتدا ناحیه R را رسم ،سپس همگرائی یاواگرائی انتگرالهای دوگانه زیر را بررسی نمائید.

① $I=\iint_R e^{-x^2}dA$ $R: -x\le y\le x,\ x\ge 0$



ⓒ: چون e^{-x^2} در انتگرال موجود می باشد، لذا مابتی ابتدا نسبت به y انتگرال گرفته پس نسبت به x. اما باتوجه به شکل حدود y و x به صورت زیر می باشد $-x\le y\le x$ ، $x\ge 0$

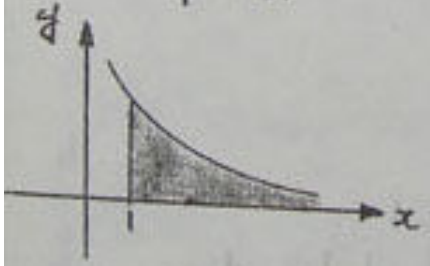
به این ترتیب داریم

$$I=\int_0^{\infty}\int_{-x}^{x} e^{-x^2}dy\,dx=\int_0^{\infty}\left(\int_{-x}^{x}dy\right)e^{-x^2}dx$$

$$I=\int_0^{\infty}(y|_{-x}^{x})e^{-x^2}dx=\int_0^{\infty}(2xe^{-x^2})dx=-e^{-x^2}|_0^{\infty}=-(0-1)=1$$

$$\left(e^{-x^2}|_0^{\infty}=\lim_{b\to+\infty}e^{-x^2}|_0^{b}=\lim_{b\to+\infty}(e^{-b^2}-1)=0-1=-1\right)$$

② همگرائی یا واگرائی انتگرال $I=\iint_R \frac{dA}{x+y}$ ، $R:\begin{cases}y=\frac{1}{x}\\ x\ge 1\end{cases}$



ⓒ: باتوجه به شکل انتگرال به صورت زیر نوشته میشود

$$I=\iint_R \frac{dA}{x+y}=\int_1^{+\infty}dx\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{dy}{x+y}$$

$$I=\int_1^{\infty}\ln(x+y)|_0^{\frac{1}{x}}dx=\int_1^{\infty}\left[\ln(x+\tfrac{1}{x})-\ln x\right]=\int_1^{\infty}\ln(1+\tfrac{1}{x^2})dx$$

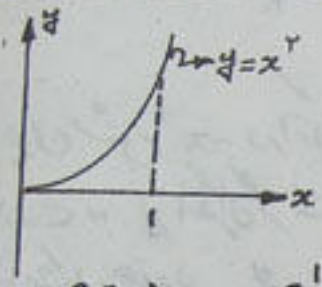
نکته : اگر $u>0$ آنگاه $0<\ln(1+u)<u$ ، به این ترتیب می توان نوشت

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

$$0 < \iint_R \frac{dA}{x+y} = \int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) dx < \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{-1}{x}\Big|_1^{+\infty} = -(0-1) = 1$$

به این ترتیب ثابت شد $0 < I < 1$ ، یعنی مقدار انتگرال همگرا می باشد.

③



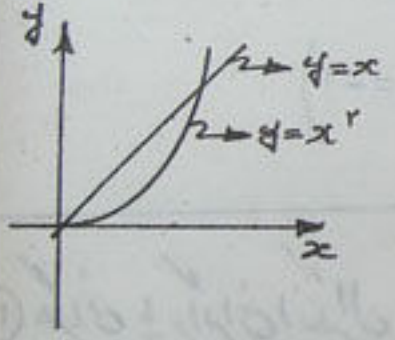
$$R: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x^2 \end{cases} \qquad I = \iint_R \frac{dA}{(x+y)^2}$$

④ : با توجه به شکل داریم

$$I = \iint_R \frac{dA}{(x+y)^2} = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} \frac{dy}{(x+y)^2} \right) dx = \int_0^1 \frac{-1}{(x+y)}\Big|_0^{x^2} dx$$

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+x} \right) dx = \int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \ln(x+1)\Big|_0^1 = \ln 2$$

④



$$R: \begin{cases} y \le x \\ y \ge x^2 \end{cases} \qquad I = \iint_R \frac{dA}{xy}$$

⑤ : با توجه به شکل داریم

$$I = \iint_R \frac{dA}{xy} = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \frac{dy}{xy} \cdot dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\left(\ln y\right)\Big|_{x^2}^{x} \cdot dx$$

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x}\left(\ln x - \ln x^2\right) dx = \int_0^1 \frac{1}{x} \ln\frac{1}{x} \cdot dx = -\int_0^1 \frac{1}{x} \ln x \cdot dx$$

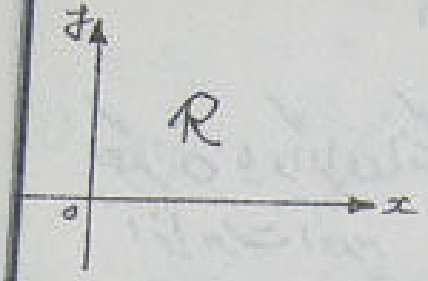
$$u = \ln x \to \begin{cases} x \to 0^+ \\ x = 0 \to u = -\infty \\ x = 1 \to u = 0 \end{cases} \qquad u = \frac{dx}{x}$$

$$\to I = -\int_{-\infty}^{0} u\, du = \frac{-1}{2}u^2\Big|_{-\infty}^{0} = -\infty$$

به این ترتیب مشاهده می شود انتگرال واگرا می باشد.

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

④ $I=\iint_R e^{-(x^2+y^2)}\,dA$ ، $R:\begin{cases}x\geq 0\\ y\geq 0\end{cases}$



⑤ : با توجه به شکل R ، حدود انتگرال به شکل زیر می باشد

$0\leq x<+\infty$ ، $0\leq y<+\infty$

چون مشتق (x^2+y^2) برحسب x یا y در کنار تابع $e^{-(x^2+y^2)}$ وجود ندارد از مختصات قطبی استفاده می نمائیم زیرا ممکن است در این حالت انتگرال ساده تر شود. لذا می توان نوشت

$$I=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dy\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^{+\infty}d\theta$$

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{-1}{2}(0-1)\,d\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$$

---

⑥ $I=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} xy\,e^{-(x^2+y^2)}\,dy\,dx$ (ناحیه R همانند ⑤ می باشد)

⑦ : ناحیه انتگرال گیری ربع اول می باشد. با استفاده از مختصات قطبی می توان نوشت

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty} r^2\cos\theta\sin\theta\,e^{-r^2}\cdot r\,dr\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\left(\int_0^{\infty} r^3e^{-r^2}dr\right)d\theta$$

$$\int r^3e^{-r^2}dr=\int r^2\cdot re^{-r^2}dr\rightarrow\begin{cases}u=r^2\\ dv=re^{-r^2}dr\end{cases}\rightarrow\begin{matrix}du=2rdr\\ v=\frac{-1}{2}e^{-r^2}\end{matrix}$$

$$\int r^3e^{-r^2}dr=\frac{-1}{2}r^2e^{-r^2}+\frac{1}{2}\int 2re^{-r^2}dr=\frac{-1}{2}r^2e^{-r^2}-\frac{1}{2}e^{-r^2}=\frac{-1}{2}(r^2+1)e^{-r^2}$$

$$\int_0^{+\infty} r^3e^{-r^2}dr=\lim_{b\to\infty}\frac{-1}{2}(r^2+1)e^{-r^2}\Big|_0^b=\frac{-1}{2}\lim_{b\to+\infty}(b^2+1)e^{-b^2}-\left(\frac{-1}{2}\right)$$

$$\lim_{b\to\infty}\frac{b^2+1}{e^{b^2}}=0\rightarrow\int_0^{+\infty} r^3e^{-r^2}dr=\frac{1}{2}\rightarrow I=\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,d\theta=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{-1}{2}\cos 2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I=\frac{-1}{8}(-1-1)=\frac{1}{4}$$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

تمرینات برای حل

همگرائی یا واگرائی انتگرالهای زیر را مشخص کنید. در صورت همگرا بودن مقدار آنرا بدست آورید

① $I=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2}$

② $I=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$

③ $I=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{dx\,dy}{(a^2+x^2+y^2)^2}$

④ $I=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x|-|y|}dx\,dy$

⑤ $I=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}(x+y)e^{-(x+y)}dx\,dy$

⑥ $I=\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}xy\,e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$

⑦ $I=\int_{0}^{\infty}\int_{x}^{\infty}e^{-y^2}dy\,dx$

⑧ $I=\int_{0}^{\infty}dx\int_{2x}^{\infty}x\,e^{-y}\frac{\sin y}{y^2}dy$

⑨ $I=\int_{0}^{1}\int_{0}^{y^2}e^{\frac{x}{y}}dx\,dy$

⑩ $I=\iint_{R}\frac{dA}{x^4+y^2}$ $\quad R:\begin{cases}x\geq 1\\ y\geq x^2\end{cases}$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir
منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

جواب تمرینات

۱) دایره‌ا

۲) 2π

۳) $\frac{\pi}{4a^2}$

۴) ۴

۵) ۲

۶) $\frac{1}{4}$

۷) $\frac{1}{2}$

۸) $\frac{1}{6}$

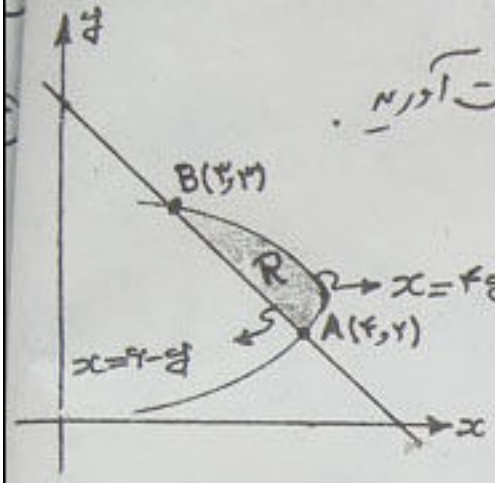
۹) $\frac{1}{2}$

۱۰) $\frac{\pi}{4}$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

① سطح محدود به ناحیه $R: \begin{cases} x=4y-y^2 \\ x+y=6 \end{cases}$ را بدست آورید.

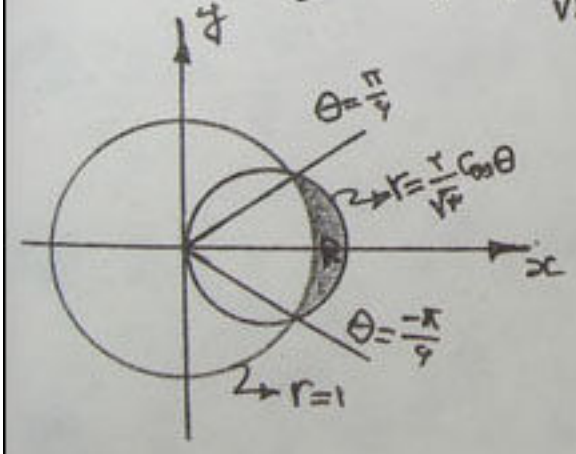
ج : در انتگرال دوگانه $\iint_R f(x,y)\,dA$ ، اگر $f(x,y)=1$ ، آنگاه مقدار انتگرال برابر با سطح ناحیه R خواهد بود. طبق شکل مانیز از این را فعلی استفاده نمود. لذا خواهیم داشت



$$A=\int_2^3\int_{6-y}^{4y-y^2} dx\,dy=\int_2^3 x\Big|_{6-y}^{4y-y^2}\cdot dy=\int_2^3\left[(4y-y^2)-(6-y)\right]dy=\frac{1}{6}$$

② مساحت محدود به خارج $r=1$ و داخل $r=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta$ را بدست آورید.

ج : دو منحنی را قطع میدهیم تا مختصات محل برخورد دو منحنی بدست آید. چون در شکل تقارن مشاهده میشود می توان مساحت در ربع اول را در ۲ ضرب نمائیم.



$$\begin{cases} r=1 \\ r=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta \end{cases} \rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta=1 \quad \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \theta=\frac{\pi}{6},\ \theta=\frac{-\pi}{6}$$

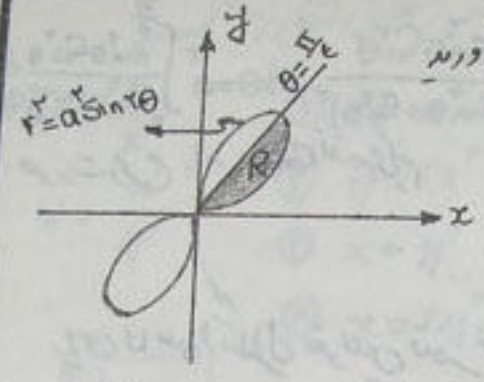
$$A=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta} r\,dr\,d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}r^2\Big|_1^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{4}{3}\cos^2\theta-1\right)d\theta$$

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cos 2\theta-1\right)d\theta=\frac{1}{18}(3\sqrt{3}-\pi)$$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

۲) مساحت محدود به منحنی $(x^2+y^2)^2 = 2a^2xy$ را بدست آورید

ج) : ابتدا از دستگاه قطبی استفاده می نماییم و شکل را رسم می کنیم. زیرا در مختصات دکارتی بدلیل با لا بودن درجه y نمی توان به راحتی آنرا رسم نمود



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \rightarrow r^4 = 2a^2r^2\sin\theta\cos\theta$$

$$r^4 = a^2r^2\sin 2\theta \rightarrow r^2(r^2 - a^2\sin 2\theta) = 0$$

$$r = 0 \quad , \quad r^2 = a^2\sin 2\theta$$

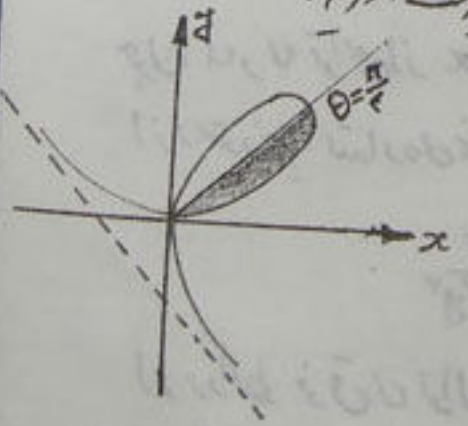
با توجه به شکل می توان مساحت در ناحیه $[0, \frac{\pi}{4}]$ را محاسبه نمود و ۴ برابر نمود.

$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}} r\,dr\,d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}r^2\Big|_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}} d\theta$$

$$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\sin 2\theta\,d\theta = a^2$$

۲) مساحت داخل حلقه $r = \dfrac{a\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta + \cos^3\theta}$ را بدست آورید.

ج) : می توان نشان داد که این منحنی نسبت به خط $\theta = \frac{\pi}{4}$ متقارن می باشد. طبق شکل می توان مساحت را در ناحیه $[0, \frac{\pi}{4}]$ محاسبه نمود و در ۲ ضرب کرد



به این ترتیب مقدار مساحت به صورت زیر محاسبه میگردد

$$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{a\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}} r\,dr\,d\theta$$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

$$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}r^2 \Big|_0^{\frac{a\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin^3\theta+\cos^3\theta)^2} d\theta = a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{\cos^6\theta(1+\tan^3\theta)^2} d\theta$$

صورت و مخرج را بر $\cos^6\theta$ تقسیم می‌کنیم

$$= a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2\theta \frac{1}{\cos^2\theta}}{(1+\tan^3\theta)^2} d\theta$$

برای محاسبه انتگرال تعویض متغیر زیر را در نظر می‌گیریم

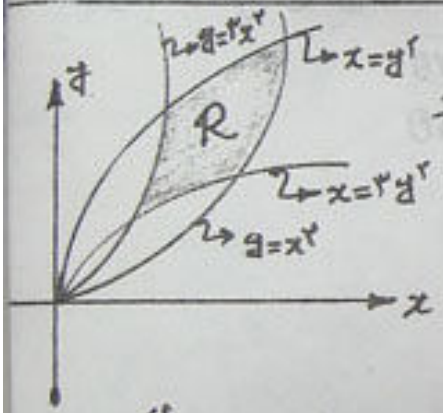
$$u = 1+\tan^3\theta \begin{cases} \theta=0 \to u=1 \\ \theta=\frac{\pi}{4} \to u=2 \end{cases} \qquad du = 3\tan^2\theta \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta$$

$$\to I = \frac{a^2}{3}\int_1^2 \frac{du}{u^2} = \frac{a^2}{6}$$

$$\to A = \frac{1}{6}a^2$$

---

(۵) ساحت محدود به منحنی‌های $\begin{cases} x=y^2 \\ x=3y^2 \end{cases}$ ، $\begin{cases} y=x^2 \\ y=2x^2 \end{cases}$ را بدست آورید



(ج) طبق شکل استفاده از مختصات دکارتی نیاز به محاسبات پیچیده و طولانی دارد. لذا از تعویض متغیر زیر استفاده می‌نماییم:

$$\begin{cases} u=\frac{y}{x^2} \\ v=\frac{x}{y^2} \end{cases} \qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = J(u,v) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

چون u و v توابعی از x و y می‌باشند، لذا برای محاسبه $J(u,v)$ از دستور زیر استفاده می‌نماییم

$$J(u,v) = \frac{1}{J(x,y)}$$

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{-2y}{x^3} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{y^2} & \frac{-2x}{y^3} \end{vmatrix} = \frac{3}{x^2y^2}$$

از روابط فوق می‌توان نوشت

$$uv = \frac{1}{xy} \to \frac{1}{x^2y^2} = u^2v^2$$

در نتیجه

$$J(u,v) = \frac{1}{J(x,y)} = \frac{1}{3u^2v^2}$$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران
منبع این کتاب : www.icivil.ir
www.icivil.ir

با توجه به شکل ناحیه G در صفحه UV دارای مرزهای شکل زیر است

$u=\frac{y}{x^2}$

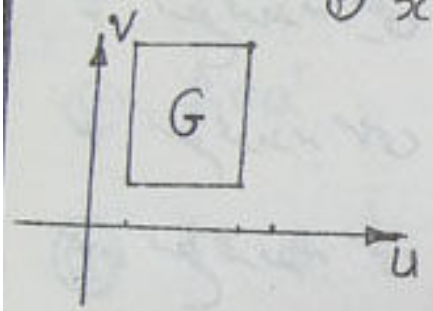
$v=\frac{x}{y^2}$

① $y=x^2 \rightarrow \frac{y}{x^2}=u=1$

② $y=2x^2 \rightarrow \frac{y}{x^2}=2 \rightarrow u=2$

③ $x=y^2 \rightarrow \frac{x}{y^2}=v=1$

④ $x=3y^2 \rightarrow \frac{x}{y^2}=3 \rightarrow v=3$



به این ترتیب مقدار مساحت به شکل زیر محاسبه میگردد

$$A=\iint_R dA=\iint_G J(u,v)\,dv\,du$$

$$A=\int_1^2\int_1^3 \frac{1}{3}\left(\frac{1}{u^2v^2}\right)dv\,du=\frac{1}{3}\int_1^2 \frac{1}{u^2}\left(\frac{-1}{v}\right)\Big|_1^3 du=\frac{1}{4}\int_1^2 \left(1-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{u^2}du$$

$$\rightarrow A=\frac{1}{9}$$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

تمرینات برای حل

مطلوب محاسبه سطح محدود به منحنی های زیر با استفاده از انتگرال دوگانه

۱- سطح محدود به خطوط $y=x$ ، $y=4x$ و $x=1$

۲- سطح محدود به بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

۳- سطح محدود به سهمی $y^2=\frac{b^2}{a}x$ و خط $y=\frac{b}{a}x$.

۴- سطح محدود به منحنی $(x^2+y^2)^3=x^4+y^4$.

۵- سطح محدود به $(x+y)^3=xy$ در ربع اول .

۶- سطح محدود به منحنی های $x^2+y^2=2x$ ، $x^2+y^2=4x$ ، $y=x$ و $y=0$.

۷- ناحیه محدود به منحنی های $r=a(1+\cos\theta)$ و $r=a\cos\theta$ $(a>0)$

۸- ناحیه محدود به منحنی $(x-2y+3)^2+(2x+4y-1)^2=100$.

۹- ناحیه محدود به منحنی های $y^2=ax$ ، $y^2=bx$ ، $xy=\alpha$ و $xy=\beta$.
$(0<a<b \ , \ 0<\alpha<\beta)$ (از تغییر متغیر استفاده نمایید)

۱۰- سطح داخل دایره $x^2+y^2=4$ و خارج سهمی $y^2=4(1-x)$

۱۱- خارج منحنی $r=2(1-\cos\theta)$ و داخل منحنی $r=2$

۱۲- سطح محدود به منحنی های $y=4x-x^2$ و $y=2x^2-8x$.

۱۳- سطح محدود به $(x-a)^2+(y-a)^2\le a^2$ ، $(x^2+y^2)^2=8a^2xy$ $(a>0)$

۱۴- سطح محدود به منحنی های $y=ax^p$ ، $y=bx^p$ ، $y=cx^q$ ، $y=dx^q$
$(0<a<b \ , \ 0<c<d \ ; \ 0<p<q)$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

جواب تمرینات

(۱) ۲ (۲) πab (۳) $\frac{ab}{۶}$

(۴) $\frac{۳\pi}{۴}$ (۵) $\frac{۱}{۶۰}$ (۶) $۳(\frac{\pi}{۴}+\frac{۱}{۲})$

(۷) $\frac{۵}{۲}\pi a^۲$ (۸) ۱۰π (۹) $\frac{۱}{۳}(\beta-\alpha)\ln\frac{a}{b}$

(۱۰) $۲\pi-\frac{۸}{۳}$ (۱۱) $۸-\pi$ (۱۲) $\frac{۲۷}{۲}$

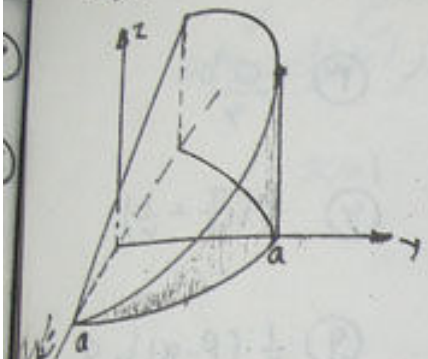
(۱۳) $a^۲(\frac{\sqrt{۷}}{۲}+\text{ArcSin}\frac{\sqrt{۶}}{۸})$

(۱۴) $\frac{q-p}{(p+1)(q+1)}\times\left(b^{\frac{q+1}{q-p}}-a^{\frac{q+1}{q-p}}\right)\left(c^{-\frac{p+1}{q-1}}-d^{-\frac{p+1}{q-1}}\right)$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

ابتدا ناحیه V را رسم ،سپس حجم محدود به آن را با استفاده از انتگرال دوگانه بدست آورید.

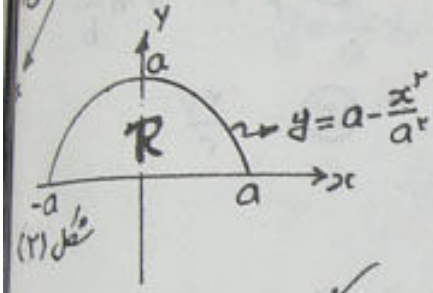
① حجم محدود به رویه های $\begin{cases} y=0 \text{ و } z=0 \\ z=a-x+y \\ y=a-\frac{x^2}{a} \quad (a>0) \end{cases}$ را محاسبه نمائید



شکل ۱

ج : با رسم رویه ها شکل مورد نظر بدست می آید .

ناحیه R در صفحه xoy به شکل زیر رسم شده است .



شکل (۲)

شکل ۱ ، از اطراف به استوانه $y=a-\frac{x^2}{a}$ ، از بالا به صفحه $z=a-x+y$ و از کنار به صفحه $y=0$ و از پائین به صفحه $z=0$ محدود می باشد .

به این ترتیب حدود انتگرال جهت محاسبه حجم به شکل زیر تعیین میگردد

$$V=\int_{-a}^{a}\int_{0}^{a-\frac{x^2}{a}} (a+y-x)\,dy\,dx$$

چون تابع x فرد و R نسبت به محور y ها متقارن می باشد ، لذا مقدار انتگرال برابر خواهد است با $\iint_R x\,dA$. لذا داریم

$$V=\int_{-a}^{a}\int_{0}^{a-\frac{x^2}{a}} (a+y)\,dy\,dx = \int_{-a}^{a} \left(ay+\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^{a-\frac{x^2}{a}} dx$$

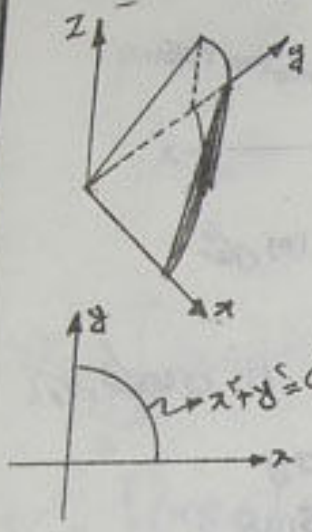
$$V=\int_{-a}^{a}\left[a^2-x^2+\frac{1}{2}\left(a^2-2x^2+\frac{x^4}{a^2}\right)\right]dx$$

پس از محاسبه انتگرال اخیر مقدار حجم شکل زیر خواهد بود

$$V=\frac{28}{15}a^3$$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

۲) حجم محدود به استوانه $x^2+y^2=a^2$ و صفحه $z=y$ را در ناحیه $\frac{1}{8}$ بدست آورید.



ج: چون ناحیه $\frac{1}{8}$ مورد نظر است لذا باید $x\geq 0$، $y\geq 0$ و $z\geq 0$ باشد.
شکل مورد نظر همان طور که مشاهده میشود از اطراف به استوانه $x^2+y^2=a^2$ و صفحه $x=0$ و از بالا به صفحه $z=y$ و از پائین محدود می باشد در شکل (۲) نیز ناحیه R رسم شده است به این ترتیب مقدار حجم V از انتگرال دوگانه زیر محاسبه میگردد

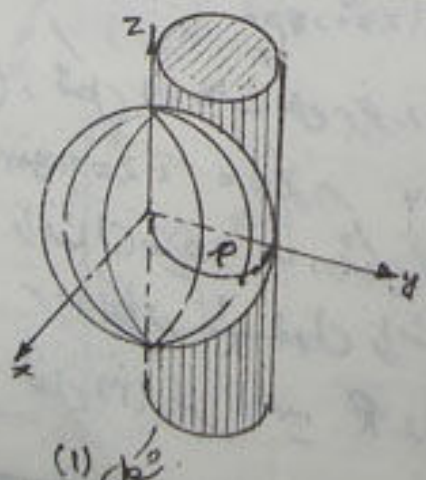
$$V=\int_0^{a\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y\,dA$$

می توان از مختصات قطبی استفاده نمود.
برای این کار می نویسیم $y=r\sin\theta$ در نتیجه $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$, $0\leq r\leq a$
لذا خواهیم داشت

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a}(r\sin\theta)r\,dr\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cdot(\tfrac{1}{3}r^3)\Big|_0^a d\theta$$

$$\rightarrow V=\frac{a^3}{3}$$

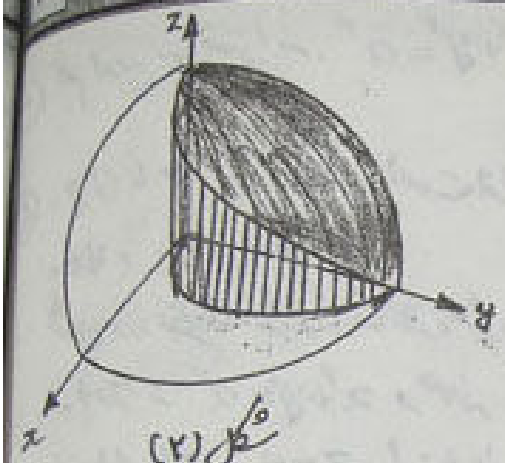
۲) حجم محدود به ناحیه داخل کره $x^2+y^2+z^2=4a^2$ و استوانه $x^2+y^2=2ay$ را بدست آورید



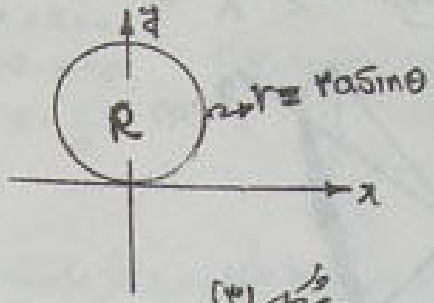
شکل (۱)

ج: با توجه به شکل حجم در ناحیه $\frac{1}{8}$ را در ۴ ضرب می کنیم.
شکل (۱)، شکل کلی می باشد و شکل (۲) ناحیه را در $\frac{1}{8}$ مشخص می کند.

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران



شکل (۲)



شکل (۳)

با توجه شکل‌های (۱)، (۲) و (۳) مقدار حجم از دستور زیر محاسبه می‌گردد

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2a\sin\theta}\sqrt{4a^2-r^2}\,.\,r\,dr\,d\theta$$

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-1}{2}(4a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{2a\sin\theta}\,.\,d\theta$$

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[(4a^2-4a^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}-(4a^2)^{\frac{3}{2}}\right]d\theta$$

$$V=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(8a^3-8a^3\cos^3\theta)\,d\theta=\frac{16}{9}(3\pi-4)a^3$$

$x^2+y^2=2ay$

$r^2=2ar\sin\theta$

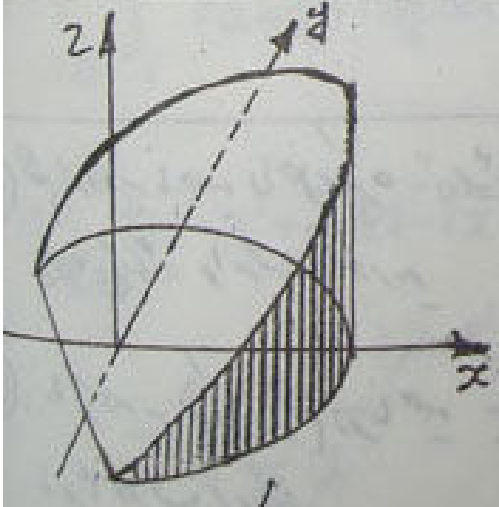
$\longrightarrow r(r-2a\sin\theta)$

$r=0\ ,\ r=2a\sin\theta$

$x^2+y^2+z^2=4a^2$

$z=\sqrt{4a^2-(x^2+y^2)}=\sqrt{4a^2-r^2}$

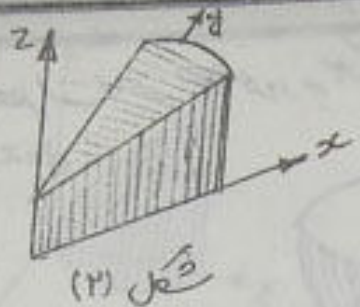
(۴) حجم محدود به رویه‌های $\begin{cases}z=x+y+2\\z=0\\x^2+y^2=16\\x\geq 0\ ,\ y\geq 0\end{cases}$ را بدست آورید.



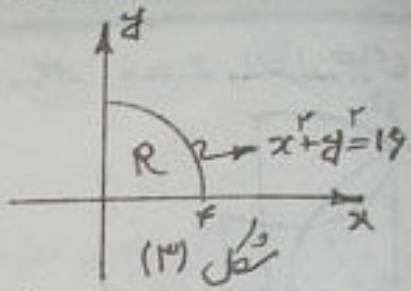
شکل (۱)

(ج) : شکل (۱) حالت کلی برخورد رویه‌های $z=x+y+2$ ، $z=0$ و $x^2+y^2=16$ را نشان می‌دهد. اما در شکل (۲) ناحیه مورد نظر در $\frac{1}{8}$ اول را مشخص می‌کند. شکل (۳) نیز ناحیه R در صفحه xy می‌باشد.

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران



شکل (۲)



شکل (۳)

به این ترتیب حجم مورد نظر (شکل زیر) محاسبه میشود

$$V=\iint_R (x+y+2)\,dA=\int_0^4\int_0^{\sqrt{16-x^2}} (x+y+2)\,dy\,dx$$

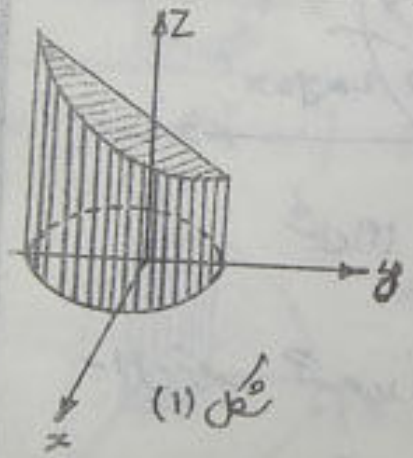
$$V=\int_0^4 \left(xy+\frac{1}{2}y^2+2y\right)\Big|_0^{\sqrt{16-x^2}}\,dx=\int_0^4 \left[x\sqrt{16-x^2}+\frac{1}{2}(16-x^2)+2\sqrt{16-x^2}\right]dx$$

که پس از محاسبه انتگرال خواهیم داشت

$$V=\frac{128}{3}+8\pi$$

---

⑤ حجم محدود به رویه‌های $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y+z=4 \\ z=0 \end{cases}$ را بدست آورید.



شکل (۱)

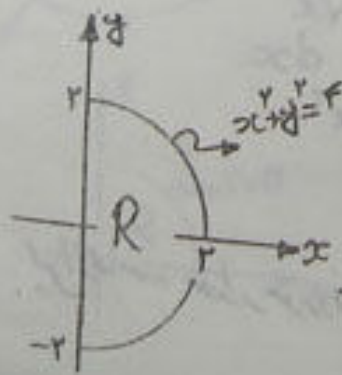
⑥ : شکل (۱) ناحیه مورد نظر را نشان میدهد و شکل (۲) تا حیه R در صفحه yz را مشخص می کند.

بدین ترتیب خواهیم داشت

$$V=\int_{-2}^{2}\int_0^{\sqrt{4-y^2}} (4-y)\,dx\,dy$$

$$y+z=4 \rightarrow z=4-y$$

با استفاده از مختصات قطبی خواهیم داشت



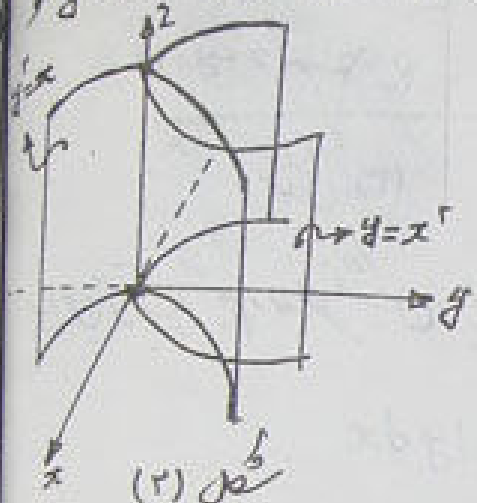
$$V=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^2 (4-r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

$$V=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(12-\frac{1}{3}r^3\sin\theta\right)\Big|_0^2 d\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(8-\frac{8}{3}\sin\theta\right)d\theta$$

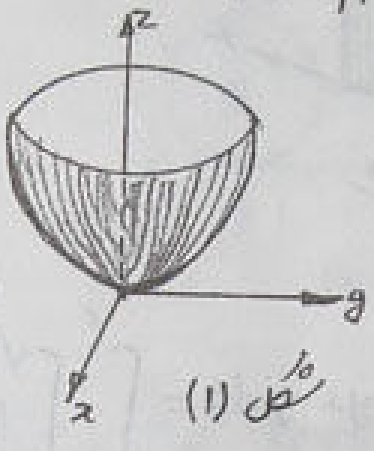
$$V=8\pi$$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

ب) مطلوبست محاسبه حجم محدود به رویه‌های $z=x^2+4y^2$ ، صفحه $z=0$ ، استوانه‌های $y=x^2$ ، $y^2=x$:



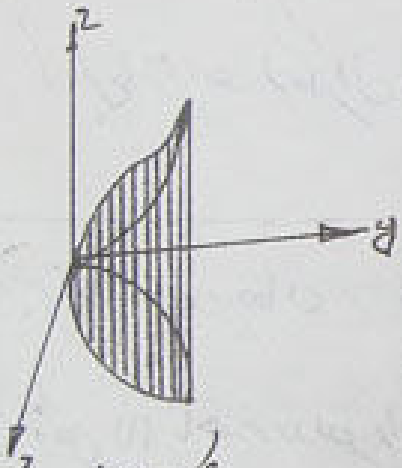
شکل (۲)



شکل (۱)

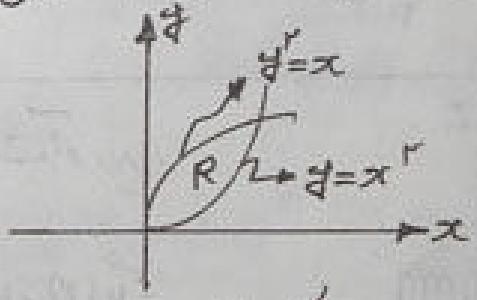
ج) :

ناحیه مورد نظر از محل برخورد دو شکل (۱) و (۲) و صفحه $z=0$ حادث میگردد . شکل (۳) نمای از محل برخورد رویه‌های فوق را نشان میدهد .



شکل (۳)

ناحیه R در صفحه xy در شکل (۴) مشخص شده است .



شکل (۴)

به این ترتیب حجم مورد نظر از دستور زیر محاسبه میگردد

$$V=\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(x^2+4y^2)\,dy\,dx=\int_0^1\left(x^2y+\frac{4}{3}y^3\right)\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}}dx$$

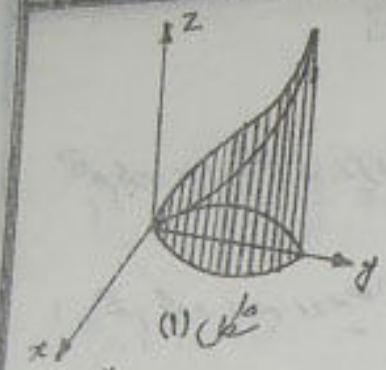
$$V=\int_0^1\left[\left(x^2\sqrt{x}+\frac{4}{3}x\sqrt{x}\right)-\left(x^4+\frac{4}{3}x^6\right)\right]dx$$

پس از محاسبه مقدار مورد نظر شکل زیر بدست می‌آید

$$V=\frac{3}{7}$$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

(۷) مطلوبست محاسبه حجم محدود به رویه های $\begin{cases} x^2+y^2=4z \\ x^2+y^2=8y \\ z=0 \end{cases}$



شکل (۱)

ج : شکل (۱) ناحیه حجمی مورد نظر را نشان میدهد و شکل (۲) ناحیه R را در صفحه xy مشخص می کند. به این ترتیب حجم مورد نظر شکل زیر محاسبه میگردد

$$V=\int_0^{\pi}\int_0^{8\sin\theta} z\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{\pi}\int_0^{8\sin\theta}\frac{1}{4}r^3\,dr\,d\theta$$

$$V=\frac{1}{16}\int_0^{\pi} r^4\Big|_0^{8\sin\theta}d\theta=\frac{1}{16}\int_0^{\pi}8^4\sin^4\theta\,d\theta$$

$$V=99\pi$$

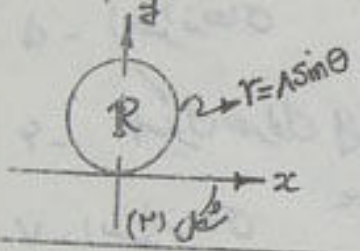
$x^2+8y=0$

$r^2-8r\sin\theta=0$

$r=0\ ,\ r=8\sin\theta$

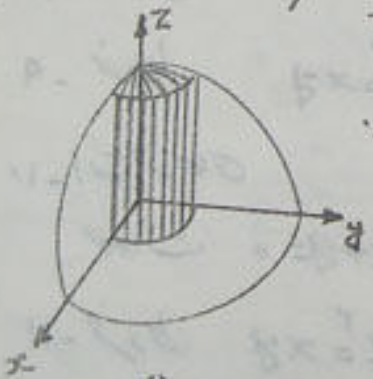
$x^2+y^2=4z$

$z=\frac{1}{4}r^2$



شکل (۲)

(۸) حجم محدود به کره به شعاع $2a$ و استوانه $r^2=a^2$ را بدست آورید. ($x^2+y^2+z^2=4a^2$ کره)



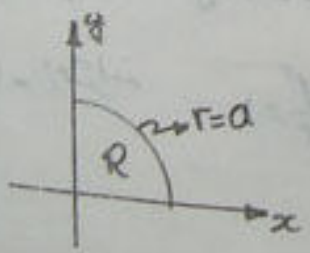
ج : ناحیه های V و R به ترتیب در شکل های (۱) و (۲) رسم شده اند. لذا حجم مورد نظر شکل زیر محاسبه میگردد.

$$V=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a}\sqrt{4a^2-r^2}\,r\,dr\,d\theta$$

حجم ناحیه $\frac{1}{8}$ را در ۸ ضرب می کنیم

$$V=\frac{-8}{(\frac{3}{2})2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{a}d\theta=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(8a^3-3\sqrt{3}a^3)d\theta$$

$$V=\frac{4}{3}(8-3\sqrt{3})a^3\pi$$



معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران
منبع این کتاب : www.icivil.ir

تمرینات برای حل

حجم محدود به رویه‌های زیر را با استفاده از انتگرال دوگانه به دست آورید.

۱- حجم محدود به رویه‌های $z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}$ ، $x=a$ ، $y=b$ در اول $\frac{1}{8}$

۲- حجم محدود به صفحات $z=0$ ، $y=0$ ، $3x+y=6$ ، $3x+2y=12$ و $x+y+z=6$

۳- حجم محدود به استوانه‌های $y=\sqrt{x}$ ، $y=2\sqrt{x}$ و صفحات $z=0$ و $x+z=6$.

۴- استوانه $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ و صفحات $z=12-3x-4y$ و $z=1$.

۵- استوانه‌های $z=4-y^2$ ، $y=\frac{1}{2}x^2$ و صفحه $z=0$.

۶- سهمیوئید هذلولی $z=xy$ ، استوانه $y=\sqrt{x}$ و صفحات $x+y=2$ ، $y=0$

۷- استوانه‌های $y=e^x$ ، $y=e^{-x}$ ، $z=e^2-y^2$ و صفحه $z=0$.

۸- استوانه‌های $y=\ln x$ ، $y=\ln^2 x$ و صفحات $z=0$ و $y+z=1$.

۹- مخروط $z^2=xy$ ، استوانه $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ و صفحه $z=0$.

۱۰- استوانه‌های $x^2+y^2=x$ ، $x^2+y^2=2x$ ، سهمیوئید $z=x^2+y$ و صفحات $x+y=0$ ، $x-y=0$ و $z=0$.

۱۱- مخروط $z^2=xy$ و استوانه $(x^2+y^2)^2=2xy$ در اول $\frac{1}{8}$.

۱۲- استوانه $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ و صفحات $y=0$ ، $z=\frac{x}{2}$ و $z=x$.

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir
منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

جواب تمرینات

۱ $\frac{ab}{۶}\left(\frac{a^۲}{۴}+\frac{b^۲}{۹}\right)$

۲ ۱۲

۳ $\frac{۴۸}{۵}\sqrt{۶}$

۴ ۲۲π

۵ $\frac{۲۵۶}{۲۱}$

۶ $\frac{۳}{۸}$

۷ $۲\left(e^۲-\frac{۲e^۳+۱}{۹}\right)$

۸ $۳e-۸$

۹ $\frac{۱}{۴۵}$

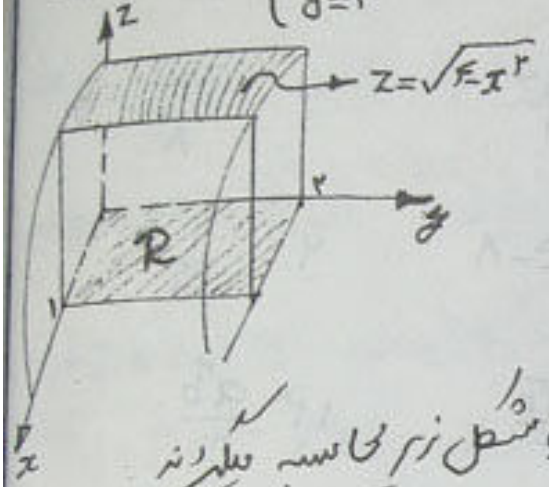
۱۰ $\frac{۱۵}{۸}\left(\frac{۳\pi}{۸}+۱\right)$

۱۱ $\frac{\pi\sqrt{۲}}{۲۴}$

۱۲ $\frac{a^۲b}{۳}$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

① مساحت آن قسمت از سطح $z=\sqrt{4-x^2}$ که توسط صفحات $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ x=1 \\ y=2 \end{cases}$ در اول $\frac{1}{8}$ قطع شده است، بدست آورید.



ج: سطح مورد نظر از دستور $S=\iint_{\sigma} d\sigma$ که در آن $d\sigma=\frac{|\vec{\nabla}f|}{|\vec{\nabla}f\cdot\vec{p}|}dA$ بدست می‌آید، $\vec{\nabla}f$ قرار داریم سطح مورد نظر، $\vec{p}$ بردار عمود در صفحه تصویر رویه می‌باشد. در این مساله موارد مذکور به شکل زیر محاسبه میگردند

$$f=z-\sqrt{4-x^2} \rightarrow \vec{\nabla}f=\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\vec{i}+\vec{k}$$

سطح مورد نظر برای تو ان در صفحه xy تصویر نمود که به این ترتیب $\vec{p}=\vec{k}$ در اینصورت $d\sigma$ بشکل زیر بدست می‌آید

$$|\vec{\nabla}f|=\sqrt{\frac{x^2}{4-x^2}+1}=\frac{2}{\sqrt{4-x^2}} \quad , \quad \vec{\nabla}f\cdot\vec{k}=1$$

$$d\sigma=\frac{|\vec{\nabla}f|}{|\vec{\nabla}f\cdot\vec{k}|}dA=\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}dA$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$S=\iint_{\sigma} d\sigma=\iint_{R}\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}dA$$

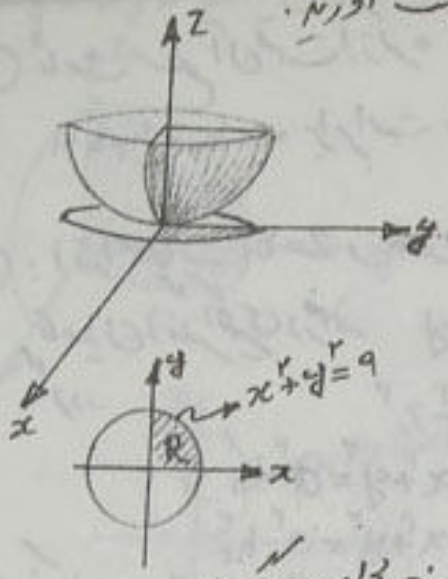
طبق ناحیه R داریم

$$S=\int_0^1\int_0^2\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}dy\,dx=\int_0^1\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}(y)\Big|_0^2 dx=4\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}=4\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^1$$

$$S=\frac{2\pi}{3}$$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

۲) سطح $z=x^2+y^2$ را که زیر صفحه $z=9$ می باشد، بدست آورید.



۳) برای محاسبه $d\sigma = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \vec{P}|} dA$، قطعه زیر عمل می نمائیم

$f = x^2+y^2-z \rightarrow \nabla f = (2x)\vec{i}+(2y)\vec{j}-\vec{k}$

$|\nabla f| = \sqrt{4x^2+4y^2+1}$

$\vec{P}=\vec{k} \rightarrow \nabla f \cdot \vec{P} = -1 \rightarrow |\nabla f \cdot \vec{k}| = 1$

به این ترتیب داریم $d\sigma = \sqrt{4(x^2+y^2)+1}\, dA$

در نتیجه مقدار سطح از دستور $S = \iint_{\sigma} d\sigma$ بدست می آید

$$S = \iint_{\sigma} d\sigma = \iint_{R} \sqrt{4(x^2+y^2)+1}\, dA$$

برای مشخص کردن ناحیه R، رویه $z=x^2+y^2$ را با صفحه $z=9$ قطع میدهیم

$$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ z=9 \end{cases} \rightarrow x^2+y^2=9$$

چون ناحیه R متقارن و رویه $z=x^2+y^2$ نیز نسبت به صفحات $x=0$ و $y=0$ متقارن است. لذا می توان مساحت محدود به $\frac{1}{8}$ را محاسبه و سپس ۴ برابر نمود.

به این ترتیب می توان نوشت (از مختصات قطبی استفاده می نمائیم)

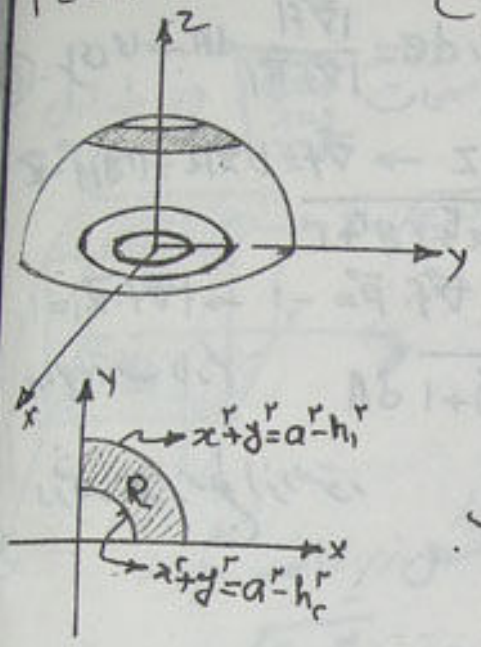
$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{3} \sqrt{4r^2+1}\cdot r\, dr\, d\theta$$

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8}\times\frac{2}{3}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3 d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{12}(37\sqrt{37}-1)\, d\theta$$

$$S = \frac{\pi}{6}(37\sqrt{37}-1)$$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

(۳) ثابت سطح آن قسمت از کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ قطع شده توسط صفحات $\begin{cases} z=h_1 \\ z=h_2 \end{cases}$ برابر است با $S=2\pi a(h_2-h_1)$. $0<h_1<h_2\le a$



ابتدا صفحات $z=h_1$ و $z=h_2$ را با کره قطع میدهیم تا میدان انتگرالگیری در صفحه xy (یعنی R) مشخص گردد

$$x^2+y^2=a^2-z^2$$
$$z=h_1 \rightarrow x^2+y^2=a^2-h_1^2$$
$$z=h_2 \rightarrow x^2+y^2=a^2-h_2^2$$

فرض کنید $c^2=a^2-h_1^2$, $d^2=a^2-h_2^2$ به این ترتیب ناحیه R سطح یک حلقه طبق شکل می باشد که در ربع اول صفحه xy واقع می باشد.

برای محاسبه سطح مراحل زیر را انجام میدهیم

ضریب ۴ در محاسبه S بدلیل محاسبه کل سطح می باشد

$$S=4\iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f\cdot \vec{k}|}\,dA$$

$$f=x^2+y^2+z^2-a^2$$
$$\vec{\nabla} f=2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k} \rightarrow |\vec{\nabla} f|=\sqrt{4(x^2+y^2+z^2)}$$

*: چون نقاط روی سطح کره مورد نظر می باشند لذا می توان بجای $x^2+y^2+z^2$ مقدار a^2 را قرار داد ولی اگر داخل کره مورد نظر باشد نمی توان a^2 قرار داد.

به این ترتیب داریم

$$|\vec{\nabla} f|=2a \quad , \quad |\vec{\nabla} f\cdot\vec{k}|=|2z|=2z \rightarrow z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

در این صورت می توان نوشت

$$S=4\iint_R \frac{2a}{2\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}\,dA$$

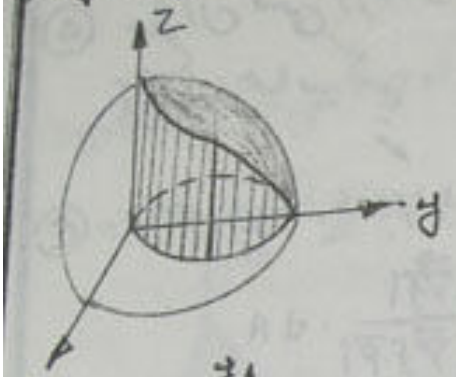
طبق شکل R با استفاده از مختصات قطبی می توان نوشت

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_d^c \frac{2a}{2\sqrt{a^2-r^2}}\,r\,dr\,d\theta = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\sqrt{a^2-r^2}\right)\Big|_d^c d\theta = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{a^2-c^2}-\sqrt{a^2-y^2}\right)d\theta$$

$$S=2a(h_2-h_1)\pi$$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

④ مطلوبست محاسبه آن قسمت از کره $x^2+y^2+z^2=4a^2$ که درون استوانه $x^2+y^2=2ay$ قرار دارد.



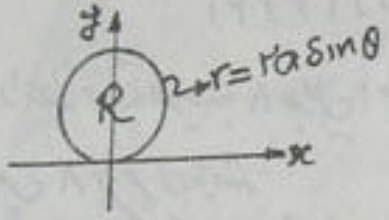
ⓒ: طبق شکل یک قسمت از سطح را محاسبه و دو برابر می‌کنیم
مراحل زیر را انجام می‌دهیم

$$S=2\iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f\cdot\vec{k}|}\,dA$$

$$f=x^2+y^2+z^2-4a^2 \qquad \nabla f=\begin{bmatrix}2x\\2y\\2z\end{bmatrix}$$

$$|\nabla f|=2\sqrt{x^2+y^2+z^2}=4a$$

$$|\nabla f\cdot\vec{k}|=|2z|=2\sqrt{4a^2-(x^2+y^2)}$$



$x^2+y^2=2ay \Rightarrow r^2-2ar\sin\theta=0$

$$S=2\iint_R \frac{4a}{2\sqrt{4a^2-(x^2+y^2)}}\,dA=4a\int_0^{\pi}\int_0^{2a\sin\theta}(4a^2-r^2)^{-\frac{1}{2}}r\,dr\,d\theta$$

$$S=4a\int_0^{\pi}\left[-(4a^2-r^2)^{\frac{1}{2}}\right]\Big|_0^{2a\sin\theta}d\theta=4a\int_0^{\pi}\left[4a-\sqrt{4a^2-4a^2\sin^2\theta}\right]d\theta$$

$$S=8a\int_0^{\pi}(1-\sqrt{\cos^2\theta})\,d\theta$$

اما برای $\sqrt{\cos^2\theta}$ با توجه به فاصله $[0,\pi]$ باید توجه

$$\sqrt{\cos^2\theta}=\begin{cases}\cos\theta & 0<\theta\le\frac{\pi}{2}\\ -\cos\theta & \frac{\pi}{2}<\theta<\pi\end{cases}$$

در نتیجه داریم

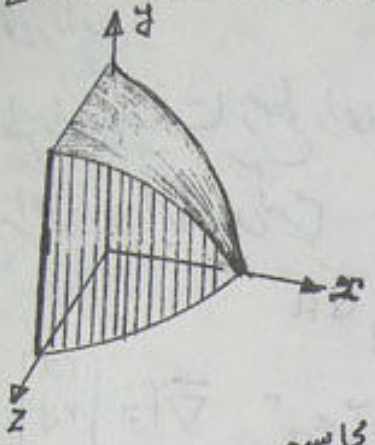
$$S=8a\left[\int_0^{\pi/2}(1-\cos\theta)\,d\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1+\cos\theta)\,d\theta\right]$$

$$S=8a^2(\pi-2)$$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

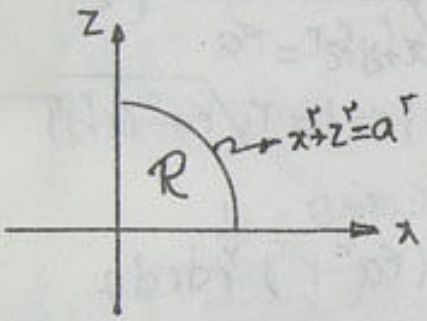
⑤ سطح آن قسمی از استوانه $x^2+z^2=a^2$ را که درون استوانه $x^2+y^2=a^2$ قرار دارد حساب کنید.

ح : مراحل زیر را به انجام برسانید



$$S = 8\iint_R \frac{|\vec{\nabla} f|}{|\vec{\nabla} f \cdot \vec{P}|}\, dA$$

در رابطه فوق ضریب ۸ بدلیل اینست که سطح در $\frac{1}{8}$ محاسبه شده پس ۸ برابر آن باشد.



R تصویر انتگرالگیری در صفحه xz می باشد.

$\vec{P}=\vec{j}$ زیرا تابع بر صفحه xz می باشد

$$f = x^2+y^2-a^2 \rightarrow \vec{\nabla} f = 2x\vec{i}+2y\vec{j}$$

$$|\vec{\nabla} f| = \sqrt{4(x^2+y^2)} = 2a \rightarrow (x^2+y^2=a^2)$$

$$\vec{\nabla} f \cdot \vec{P} = \vec{\nabla} f \cdot \vec{j} = 2y \rightarrow |\vec{\nabla} f \cdot \vec{j}| = |2y|$$

$$|\vec{\nabla} f \cdot \vec{j}| = 2\sqrt{a^2-x^2}$$

$$S = 8\iint_R \frac{2a}{2\sqrt{a^2-x^2}}\, dA \qquad dA = dz\,dx$$

$$S = 8\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{dz\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = 8a\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}(z)\Big|_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot dx$$

$$S = 8a^2$$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

انتگرال دو ... سطح رویه و انتگرال رویه ای

(۶) مطلوبست محاسبه انتگرال رویه‌ای $\iint_G (xy+z)\,d\sigma$ که G قسمتی از صفحه $2x-y+z=3$ می باشد که توسط صفحات $x=1$ ، $y=0$ و $y=x$ قطع شده است.

(ج): سطح مورد نظر و ناحیه انتگرالگیری در شکل هاشور خورده می شوند

برای محاسبه انتگرال مورد نظر از فرمول زیر عمل می نمائیم

$$d\sigma = \frac{|\vec{\nabla} f|}{|\vec{\nabla} f \cdot \vec{P}|}\,dA \quad , \quad \vec{P} = \vec{k}$$

$$f = 2x - y + z - 3 \rightarrow \vec{\nabla} f = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

$$|\vec{\nabla} f| = \sqrt{6} \quad , \quad |\vec{\nabla} f \cdot \vec{k}| = 1$$

به این ترتیب می توان نوشت

$$z = 3 - 2x + y$$

$$I = \iint_G (xy + z)\,d\sigma = \iint_R [xy + (3 - 2x + y)]\frac{\sqrt{6}}{1}\,dA$$

$$I = \sqrt{6} \int_0^1 \int_0^x (xy + 3 - 2x + y)\,dy\,dx = \sqrt{6} \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} + 3y - 2xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^x dx$$

$$I = \frac{9\sqrt{6}}{8}$$

(۷) مطلوبست محاسبه $\iint_G xyz\,d\sigma$ ، که G آن قسمت از سطح مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ بریده شده توسط صفحات $z=1$ و $z=4$ می باشد.

(ج): مراحل محاسبه انتگرال فوق مشابه زیر عمل می نمائیم

$$f = x^2 + y^2 - z^2 \rightarrow \vec{\nabla} f = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} - 2z\vec{k}$$

$$|\vec{\nabla} f| = \sqrt{4(x^2 + y^2 + z^2)} = 2\sqrt{x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)}$$

$$|\vec{\nabla} f| = 2\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|\vec{\nabla} f \cdot \vec{k}| = 2z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

$$d\sigma = \frac{|\vec{\nabla} f|}{|\vec{\nabla} f \cdot \vec{k}|} dA = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}}{2\sqrt{x^2+y^2}} dA = \sqrt{2}\, dA$$

به این ترتیب مقدار انتگرال داخل زیر محاسبه میگردد

$$I = \iint_R xyz(\sqrt{2}\,dA) = \int_R \int xy\sqrt{x^2+y^2}(\sqrt{2}\,dA)$$

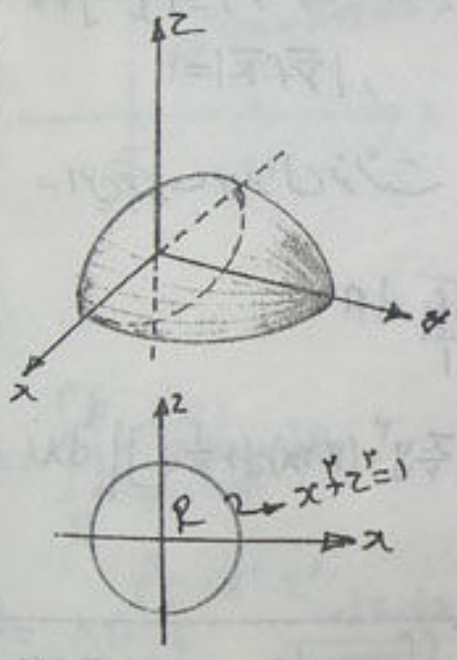
با استفاده از مختصات قطبی می توان نوشت

$$I = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_1^2 r^2\sin\theta\cos\theta \cdot r\,(r\,dr\,d\theta) = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\left(\frac{1}{4}r^4\right)\Big|_1^2 d\theta$$

$$\rightarrow I = 0$$

---

(۸) مطلوبست محاسبه $\iint_G (x^2+z^2)\,d\sigma$ ، G آن قسمت از سهمیگون $y = 1-x^2-z^2$ قطع شده توسط صفحه $y=0$ می باشد.



(ج) :

$$f = x^2+y+z^2-1 \qquad \vec{F} = \vec{g}$$

$$\vec{\nabla} f = 2x\vec{i}+\vec{j}+2z\vec{k} \qquad |\vec{\nabla} f \cdot \vec{F}| = 1$$

$$|\vec{\nabla} f| = \sqrt{4(x^2+z^2)+1}$$

$$I = \iint_G (x^2+z^2)\,d\sigma = \iint_R (x^2+z^2)\frac{\sqrt{4(x^2+z^2)+1}}{1} dA \qquad dA = dz\,dx$$

در اینجا $R : x^2+z^2 \le 1$ ، زیرا آثر سهمیگون $y = 1-x^2-z^2$ را با صفحه $y=0$ قطع داخل مرز ناحیه R مشخص می کند

به این ترتیب می توان نوشت

$$x^2+z^2 = 1 \qquad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ z = r\sin\theta \end{cases}$$

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\sqrt{4r^2+1}\cdot r\,dr\,d\theta$$

در این انتگرال از تغییر متغیر $u^2 = 4r^2+1$ برای محاسبه $\int_0^1 r^3\sqrt{4r^2+1}\,dr$ استفاده می نماییم

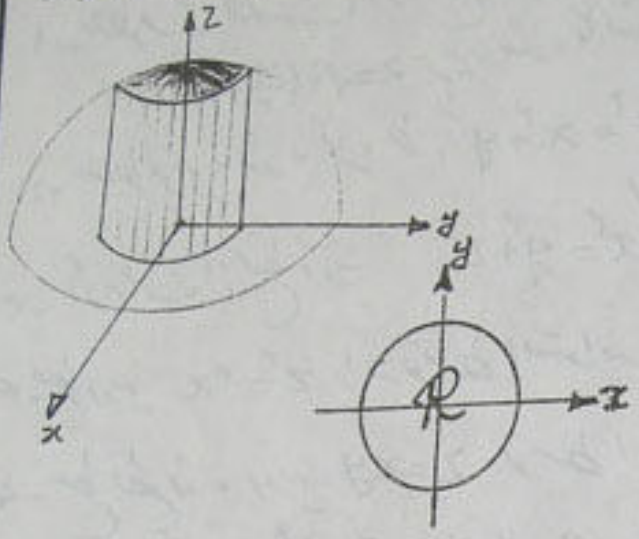
$$u^2 = 4r^2+1 \rightarrow 2u\,du = 8r\,dr \rightarrow r\,dr = \frac{1}{4}u\,du$$

$$r^2 = \frac{1}{4}(u^2-1) \rightarrow \begin{matrix} r=0 \\ u=1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} r=1 \\ u=\sqrt{5} \end{matrix}$$

$$\rightarrow I = \frac{1}{16}\int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{5}}(u^2-1)u^2\,du\,d\theta = \frac{1}{16}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{5}u^5-\frac{1}{3}u^3\right)\Big|_1^{\sqrt{5}} d\theta \rightarrow I = \frac{20\sqrt{5}+1}{60}\pi$$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران
منبع این کتاب : www.icivil.ir

۹) مطلوبست محاسبه $\iint_G z\,dG$ که G سطح قطع شده توسط $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ استوانه $x^2+y^2=4$ می باشد



ج) جهت محاسبه انتگرال داخل زیر را انجام میدهیم

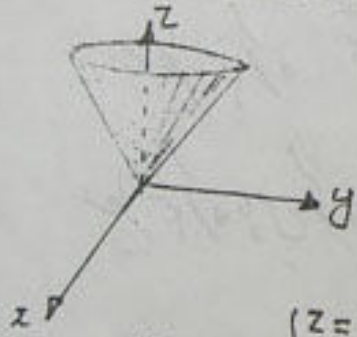
$$f=x^2+y^2+z^2-9$$
$$\vec{\nabla}f=2x\vec{i}+2y\vec{j}+2z\vec{k}$$
$$|\vec{\nabla}f|=\sqrt{4(x^2+y^2+z^2)}=6$$
$$|\vec{\nabla}f\cdot\vec{k}|=2|z| \quad 2z$$
$$dG=\frac{|\vec{\nabla}f|}{|\vec{\nabla}f\cdot\vec{n}|}dA=\frac{6}{2z}dA$$

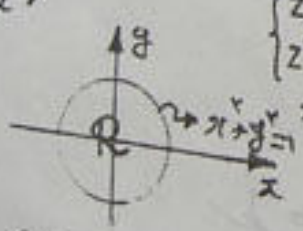
$$I=\iint_G z\,dG=\iint_R z\left(\frac{6}{2z}dA\right)=3\iint_R dA$$

اما مقدار $\iint dA$ که $R: x^2+y^2\le 4$ برابر مقدار مساحت ناحیه R یعنی مساحت دایره $x^2+y^2=4$ می شود، لذا داریم

$$I=3(4\pi)=12\pi$$

۱۰) مطلوبست محاسبه انتگرال $I=\iint_G (x^2+y^2)\,dG$ که G سطح مخروط $z^2=x^2+y^2$ قطع شده توسط صفحات $z=0$ و $z=1$ می باشد.





ج) $f=x^2+y^2-z^2=0 \rightarrow \vec{\nabla}f=2x\vec{i}+2y\vec{j}-2z\vec{k}$

$$|\vec{\nabla}f|=2\sqrt{x^2+y^2+z^2}=2\sqrt{2z^2}=2\sqrt{2}z$$
$$|\vec{\nabla}f\cdot\vec{k}|=2|z|=2z \quad z>0$$
$$dG=\frac{|\vec{\nabla}f|}{|\vec{\nabla}f\cdot\vec{k}|}dA=\frac{2\sqrt{2}z}{2z}dA=\sqrt{2}\,dA$$

$$I=\iint_G (x^2+y^2)\,dG=\iint_R (x^2+y^2)\sqrt{2}\,dA=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cdot r\,dr\,d\theta=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^1 d\theta$$

$$I=\frac{\pi}{2}\sqrt{2}$$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
www.icivil.ir منبع این کتاب : www.icivil.ir
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران

تمرینات برای حل

۱- مطلوبست انالقسمت از سطح مخروط $z^2=x^2+y^2$ در بالای صفحه xy که توسط صفحه $z=\sqrt{2}(\frac{x}{2}+1)$ بریده شده باشد.

۲- سطح بریده شده مخروط $z^2=x^2+y^2$ توسط استوانه $z^2=2y$ را بدست آورید.

۳- آن قسمت از سطح رویه $x^2=y^2+z^2$ که داخل استوانه $x^2+y^2=a^2$ می باشد بدست آورید.

۴- سطح رویه $z^2=4x$ را که توسط استوانه $y^2=4x$ و صفحه $x=1$ قطع شده، بدست آورید.

۵- سطح قطع شده رویه $z=xy$ توسط استوانه $x^2+y^2=a^2$ را بدست آورید.

۶- سطح آن قسمت از کره $x^2+y^2+z^2=a^2$ قطع شده توسط استوانه زیر را بدست آورید.

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$$

در مسائل زیر انتگرال روی سطوح داده شده را بدست آورید

۷. $\iint_G (z+2x+\frac{4}{3}y)\,dG$ G: سطح صفحه $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ در $\frac{1}{8}$

۸ $\iint_G y\,dG$ G: سطح نیم کره $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

۹ $\iint_G x^2y^2z\,dx\,dy$ G: سطح نیم کره پائین $x^2+y^2+z^2=a^2$

۱۰ $\iint_G xz\,dx\,dy + xy\,dy\,dz + yz\,dz\,dx$

G: سطح هرم متشکل از صفحات $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$

معرفی و دانلود رایگان : جزوات درسی . کتابها . نرم افزار های مهندسی . و ارائه بهترین مقالات روز علم عمران
مرجع دانشجویان و مهندسین عمران
منبع این کتاب : www.icivil.ir
www.icivil.ir

جواب تمرینات

۱) ۱π

۲) $۲\sqrt{۲}\pi p^۲$

۳) $۲\pi a^۲$

۴) $\frac{۱۶}{۳}(\sqrt{۸}-۱)$

۵) $\frac{۲\pi}{۳}\left[(۱+a^۲)^{\frac{۳}{۲}}-۱\right]$

۶) $۲a^۲(\pi+۴-۴\sqrt{۲})$

۷) $۴\sqrt{۶۱}$

۸) ۰

۹) $\frac{۳\pi a^۷}{۱۰۵}$

۱۰) $\frac{۱}{۸}$