آنالیز ترکیبی

اصل ضرب(قوانین شمارش):

هرگاه عملی در K مرحله انجام گیرد و مرحله i ام آن به n_i طریق ممکن باشد آنگاه این عمل به:

$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_k$

طریق می تواند انجام گیرد.

مثال۱:

اگر برای رسیدن از شهر الف به شهر ب دو راه وجود داشته باشد و از شهر ب به شهر پ سه راه وجود داشته باشد به چند طریق میتوان از شهر الف به شهر پ رسید؟

۲×۳= ۶

مثال۲:

الف) چند عدد چهار رقمی داریم؟

فقط رقم صفر در جایگاه هزارگان قرار نمی گیرد.

□ □ □ □

۹×۱۰×۱۰×۱۰= ۹۰۰۰

ب) چند عدد چهار رقمی با ارقام زوج داریم؟

INDEN.IR

□ □ □ □

۴×۵×۵×۵= ۵۰۰

ج) چند عدد چهار رقمی با ارقام یکان و هزارگان یکسان داریم؟

□ □ □ □

۹×۱۰×۱۰×۱= ۹۰۰

د) چند عدد چهار رقمی فقط با ارقام یکان و هزارگان یکسان داریم؟

□ □ □ □

۹×۹×۸×۱= ۶۴۸

و) چند عدد چهار رقمی بدون تکرار ارقام داریم؟

□ □ □ □

۹×۹×۸×۷= ۴۵۳۶

ه) چند عدد چهار رقمی زوج داریم؟

□ □ □ □

۹×۱۰×۱۰×۵= ۴۵۰۰

ی) چند عدد چهار رقمی زوج بدون تکرار ارقام داریم؟

برای حل این مساله باید یک بار اعداد زوجی را که رقم یکان آن صفر می‌باشد حساب کنید و یک بار با ۴ عدد باقیمانده این محاسبه انجام گیرد. سپس حاصا هر دو محاسبه با هم جمع گردد.

□ □ □ □

۹×۸×۷×۱= ۵۰۴

□ □ □ □

۸×۸×۷×۴= ۱۷۹۲

۵۰۴+۱۷۹۲= ۲۲۹۶

تمرین۱:

چند عدد چهار رقمی فرد بدون تکرار ارقام و بزرگتر از ۴۰۱۸ داریم ؟

ترتیب:

تعداد گروههای **r** تایی متمایز و با رعایت ترتیب را که می‌توان از میان **n** شی متمایز انتخاب نمود با P_n^r نشان می دهند و به صورت ذیل حساب می‌کنند.

$$P_n^r = n\,(n-۱)\,(n-۲)\ldots.\,(n-r+۱) = n!\,/\,(n-r)!$$

$$r <= n \quad , \quad r, n \in N \cup \{۰\}$$

INDEN.IR

مثال:

به چند طریق می توان از میان ۱۰ نفر دانشجو برای یک کمیته ۳ نفر رئیس، معاون و منشی برگزید؟

$r= ۳,\ n= ۱۰$

$$P_{10}^3 = n!\,/\,(n-r)! = ۱۰(۹)\,(۸) = ۱۰!\,/۷! = ۷۲۰$$

تذکر مهم:

منظور از مهم بودن ترتیب یا رعایت ترتیب آن است که بتوان حداقل دو گروه با اعضای یکسان تشکیل داد.

به طور مثال اگر سه تیم فوتبال **A,B,C** بخواهند از میان ۱۰ نفر دروازه بان هر کدام یکی انتخاب نمایند ردیف های ۲ و ۳ را ترتیب میگوییم.

ردیف	C	B	A
۱	تقی	علی	حسن
۲	علی	حسن	حسین
۳	حسن	حسین	علی

مثال:

الف) به چند طریق ۱۰ نفر می‌توانند بر روی ۱۰ صندلی در یک ردیف بنشینند؟

$$P_{10}^{10} = ۱۰! / ۰! = ۱۰!$$

ب) در چند حالت ۴ نفر معین از آنها همواره کنار هم هستند؟

$$۴! \times ۷!$$

در واقع مثال بالا یک جایگشت می‌باشد.

جایگشت:

n شی متمایز دارای $n!$ جایگشت هستند.

در مثال بالا در قسمت الف جایگشت ۱۰ نفر به طورت خطی محاسبه شده که برابر است با $۱۰!$

در قسمت ب نیز جایگشت ۶ نفر بعلاوه یک گروه ۴ نفری محاسبه شده که این گروه ۴ نفری نیز درون خـود جایگـشت دارند بنابر این ما باید یک جایگشت ۴ نفری حساب کنیم و یک جایگشت ۷ نفری و با هم ضرب نماییم.

جایگشت تکراری:

مثال:

INDEN.IR

با تمام حروف کلمه **statistics** چند کلمه ۱۰ حرفی با معنی یا بدون معنی می‌توان ساخت؟

جواب

$$\frac{۱۰!}{۳!\,۳!\,۲!\,۱!\,۱!}$$

در واقع مخرج کسر تعداد طرقی است که می‌توان حروف کلمه **statistics** را جابجا نمود به طوریکه تغیر نکند.

حالت کلی:

فرض کنید n شی داریم که به k نوع متمایز دسته بندی شده‌اند. نوع اول شامل $n_۱$ عضو نامتمایز و نوع دوم شـامل $n_۲$ عضو نامتمایز و ..... نوع k ام شامل n_k عضو نامتمایز است به طوری که:

$$n_۱ + n_۲ + \ldots . n_k = n$$

آنگاه تعداد جایگشتهای این n شی می‌شود:

$$\frac{n!}{n_۱!\, n_۲! \ldots n_k!}$$

مثال:

الف) به چند طیق می‌توان ۱۰ کتاب ریاضی نامتمایز و ۵ کتاب فیزیک نامتمایز و ۷ کتاب شیمی متمایز را در کنار هم قرار داد؟

جواب:

دقت کنید کتابهای شیمی متمایز هستند.

$$\frac{۲۲!}{۱۰!\ ۵!}$$

ب) در چند حالت کتابهای ریاضی کنار هم هستند؟

جواب:

کل کتابهای ریاضی را برابر با یک کتاب می گیریم.

$$\frac{۱۳!}{۵!}$$

ج) در چند حالت کتابهای هم نام کنار هم هستند؟

جواب:

۳ دسته کتاب داریم که یک دسته ۷ تایی آن متمایز است.

INDEN.IR

$$۳! \times ۷!$$

جایگشت دوری:

n شی متمایز دارای **(n-۱)!** جایگشت دوری هستند.

مثال:

الف) به چند طریق پنج زوج زن و شوهر (۱۰ نفر) می‌توانند روی ۱۰ صندلی دور یک میز بنشینند؟

$$(n-۱)! = ۹!$$

ب) در چند حالت همه زنها کنار هم هستند؟

جواب:

دسته ۵ نفری زنها را یک نفر درنظر میگیریم که با ۵ نفر مردها جمعاً شش نفر می‌شوند که با احتساب جایگشت دوری **(۶-۱)!** حالت برای آنها در نظر گرفته می شود و اما خود زنها نیز یک جایگشت دارند بنابرین جواب به صورت ذیل محاسبه می‌شود:

$$۵! \times ۵!$$

ج) در چند حالت یک زوج معین کنار هم هستند؟

جواب:

یک زوج را یک نفر در نظر می‌گیریم که با ۸ نفر بعدی جمعاً ۹ نفر می‌شوند که بـا احتـساب جایگـشت دوری $!(۱-۹)$ حالت برای آنها در نظر گرفته می‌شود یعنی $!۸$ ،خود این زوج هم یک جایگشت $!۲$ دارند بنابرین جواب به صورت ذیل محاسبه می‌شود:

$!۸ \times !۲$

د) در چند حالت همه زوجها کنار هم هستند؟

جواب:

هر زوج را یک نفر در نظر می گیریم که کلاً ۵ نفر می‌شوند که با احتساب جایگشت دوری $!(۱-۵)$ حالت برای آنها در نظر گرفته می‌شود یعنی $!۴$ ، خود این زوجها هم هر کدام جایگشت دارند یعنی ۵ تا $!۲$ ، بنابرین جواب به صورت ذیل محاسبه می‌شود:

$!۴ \times (!۲)^۵$

تمرین۲:

در چند حالت هیچ زنی کنار شوهرش نیست؟

INDEN.IR

ترکیب:

تعداد گروههای r تایی متمایز و بدون رعایت ترتیب را که می‌توان از میان n شی متمایز انتخـاب نمـود بـا C^{r}_{n} یـا $\binom{n}{r}$ نشان می دهند و به صورت ذیل حساب می‌کنند.

$$C^{r}_{n} = P^{r}_{n} / r! \qquad \text{یا} \qquad \binom{n}{r} = n! / r!(n-r)!$$

$$r <= n \quad , \quad r, n \in N \cup \{۰\}$$

مثال:

به چند طریق می‌توان از میان ده نفر دانشجو ۳ نماینده برگزید؟

$$\binom{10}{3} = !۱۰ / !۳ \, !۷ = ۱۲۰$$

مثال:

یک مجموعه ۶ عضوی چند مجموعه ۴ عضوی دارد؟

جواب:

دقت کنید مجموعه اعضا ترتیب ندارند $\binom{6}{4}$

تمرین۳:

نشان دهید یک مجموعه ۶ عضوی دارای 2^6 زیر مجموعه است.

مثال:

از بین ده مرد و ۴ زن می‌خواهیم ۴ نماینده انتخاب کنیم:

الف: به چند طریق؟

$\binom{14}{4}$

ب: همه نمایندها از یک جنس باشند چطور؟

$\binom{4}{4} + \binom{10}{4}$

INDEN.IR

ج: دو مرد و دو زن انتخاب شوند؟

$\binom{4}{2} \times \binom{10}{2}$

تمرین۴:

چرا در بند ب مثال بالا از جمع و در بند ج از ضرب استفاده کردیم؟

خواص ترکیب:

A: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = ۱$

B: $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

در واقع $\binom{n}{r}$ تعداد طرق افراز **n** شی است به دو دسته **r** و **n-r** تایی.

مثال:

الف) به چند طریق می‌توان از بین ۱۰ نفر دانشجو ۵ نفر را جهت عضویت در تیم بسکتبال برگزید:

$$\binom{10}{5}$$

ب) به چند طریق می‌توان ۱۰ نفر دانشجو را به دو تیم بسکتبال ۵ نفره تقسیم نمود که با هم بازی کنند.

$$\binom{10}{5} / ۲!$$

نکته مهم:

در واقع در ترکیب بین گروه انتخاب شده و نشده تمایز و ترتیب وجود دارد.

C: $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$

در واقع سمت راست تساوی بالا مربوط به طرق انتخاب شدن و انتخاب نشدن یک فرد معین است.

در صورتی که انتخاب دو نفر را مورد شرط قرار دهیم فرمول زیر هم بدست می‌آید:

$$\binom{n}{r} = \binom{n-2}{r-2} + \binom{n-2}{r} + ۲\binom{n-2}{r-1}$$

INDEN.IR

D: $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^r b^{n-r}$

خاصیت **D** در واقع بسط دو جمله‌ای نیوتن می‌باشد که هم به روش استقراء و هم به روش آنالیز ترکیبی می‌توان آنرا به اثبات رساند.

Result۱: $a=b=۱ \longrightarrow \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = ۲^n$

این تساوی در واقع اثبات این مطلب است که هر مجموعه **n** عضوی دارای ۲^n زیر مجموعه است.

Result۲: $a=-۱ \quad b=۱ \longrightarrow \sum_{r=0}^{n} (-1)^n \binom{n}{r} = ۰$

اگر **n** زوج باشد داریم:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \ldots \binom{n}{n} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \ldots \binom{n}{n-1}$$

تعمیم ترکیب:

فرض کنید می‌خواهیم از میان **n** شی متمایز **k** گروه انتخاب کنیم به طوریکه گروه اول شامل n_1 عضو بدون رعایت ترتیب و گروه دوم شامل n_2 عضو بدون رعایت ترتیب و ... گروه **k** ام شامل n_k عضو بدون رعایت ترتیب باشد آنگاه تعداد طرق ممکن با شرط اینکه $(n_1+n_2+\ldots n_k=n)$ عبارتست از:

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-\sum_{i=1}^{k-1}n_i}{n_k}=\binom{n}{n.n_1\ldots n_k}=\frac{n!}{n_1!.n_2!\ldots n_k!}$$

در فرمول بالا $n-\sum_{i=1}^{k-1}n_i=n_k$ یعنی گروه آخر انتخاب نمی شود.

مثال:

به چند طریق می توان ده نفر را با سه وسیله نقلیه به ظرفیتهای ۲، ۳ ، و ۵ نفر به مسافرت برد؟

INDEN.IR

$$\binom{10}{5.3.2}=\frac{10!}{5!.3!.2!}$$

مثال:

به چند طریق می‌توان ۲۰ نفر را در ده اتاق دو نفره اسکان داد؟

$$\binom{20}{2....2}=\frac{20!}{(2!)^{10}}$$

مثال:

به چند طریق می‌توان ۲۰ نفر را در ده اتاق دو نفره نا متمایز اسکان داد؟

$$\frac{20!}{(2!)^{10}}/10!=\frac{20!}{(2!)^{10}\times 10!}$$

مدل توزیع توپ‌ها در جعبه‌ها:

فرض کنید می‌خواهیم **r** توپ را درون **n** جعبه متمایز به شماره‌های **۱،۲،...n** توزیع کنیم.

ردیف	شرایط	تعداد طرق ممکن
۱	توپ ها متمایز باشند و از نظر تعداد توپها در جعبه‌ها محدودیتی نباشد.	$n^r = n \cdot n \ldots n$
۲	توپ ها متمایز باشند و در هر جعبه حداکثر یک توپ قرار گیرد.	$P_n^r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$
۳	توپ ها نامتمایز باشند و در هر جعبه حداکثر یک توپ قرار گیرد.	$C_n^r = P_n^r / r!$
۴	توپ ها متمایز باشند و از نظر تعداد توپ در جعبه ها محدودیتی نباشد و ترتیب توپ ها درون جعبه مهم باشد.	$\frac{(r+n-1)!}{(n-1)!} = p_{r+n-1}^r$
۵	توپ ها نامتمایز باشند و از نظر تعداد توپ در جعبه ها محدودیتی نباشد و ترتیب توپ ها درون جعبه مهم باشد.	$\binom{r+n-1}{r} = \binom{r+n-1}{n-1} = c_{r+n-1}^r$
۶	توپ ها متمایز باشند و در هر جعبه حداقل یک توپ برود.	$\binom{r-1}{n-1}$

توضیح ردیف ۶:

ما در **n** ظرف ابتدا یک توپ قرار می‌دهیم بنابراین **(r-n)** توپ باقی می‌ماند که نامتمایزند و باید بدون محدودیت در **n** ظرف قرار گیرند و مشابه ردیف ۵ حل می‌شود.

INDEN.IR

$$\frac{[(r-n)+n-1]!}{(r-n)![(r-n)+n-1-(r-n)]!} = \frac{(r-1)!}{(r-n)!(n-1)!} = \binom{r-1}{n-1}$$

تفهیم ردیف ۴:

فرض می کنیم **r= ۵** و **n= ۳**

با توجه به شکل ذیل، در این حالت ۵ توپ متمایز داریم و دو تا علامت نا متمایز | که مرز بین ظرفها را مشخص می‌کند.

O| OO| OO

پس در واقع جواب ، تعداد جایگشتهای ۷ شی است که ۲ تای آنها نامتمایزند:

$$\frac{7!}{2!}$$

نگاه دیگری به ردیف ۵:

معادله **x + y= ۱۰** به شرطی که **x, y ∈ N U {۰}** چند جواب دارد؟

جواب:

تعداد توپها ۱۰ =r

تعداد جعبه‌ها ۲ =n

$$\binom{r+n-1}{n-1} = \binom{10+2-1}{2-1} = \binom{11}{1} = ۱۱$$

نکته:

معادله $x_۱+ x_۲+ \dots x_n= r$ به شرطی که $x_i \in N \cup \{۰\}$ دارای $\binom{r+n-1}{n-1}$ یـا $\binom{r+n-1}{r}$ جـواب(بـردار) می‌باشد.

نکته:

معادله $x_۱+ x_۲+ \dots x_n= r$ به شرطی که $x_i \in N$ دارای $\binom{r-1}{n-1}$ جواب(بردار) می‌باشد.

مثال:

الف) به چند طریق می‌توان ۲۰ تخته سیاه نامتمایز را بین ۴ مدرسه توزیع کرد؟

$x_۱+ x_۲+ x_۳+ x_۴= ۲۰$

INDEN.IR

$$\binom{r+n-1}{n-1} = \binom{20+4-1}{4-1} = \binom{23}{3}$$

ب) در چند حالت به هر مدرسه حداقل یک تخته می‌رسد؟

$x_۱+ x_۲+ x_۳+ x_۴= ۲۰ \qquad x_i> ۰$

$$\binom{r-1}{n-1} = \binom{20-1}{4-1} = \binom{19}{3}$$

ج) در چند حالت به دو مدرسه اول هر کدام ۷ تخته و به دو مدرسه بعدی هر کدام حداقل ۲ تخته می‌رسد؟

جواب:

چون در واقع ۱۸ تخته را قبلاً توزیع کرده‌ایم فقط ۲ تخته می‌ماند که با شرایط صورت مساله فقط بین دو مدرسه تقـسیم می‌شود.

$x_۱+ x_۲ =۲$

$$\binom{r+n-1}{n-1} = \binom{2+2-1}{2-1} = \binom{3}{1} = ۳$$

با تشکر

(ترابی)

This document was created with Win2PDF available at http://www.daneprairie.com.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.