به نام هستی بخش

توپولوژی بدون اشک[1]

سیدنی ا. موریس



مترجم: آصف نظری گنجه‌لو
دانشگاه بالارات_استرالیا

ترجمه ۳ فصل اول کتاب بر اساس نسخه ۱۴ اکتبر ۲۰۰۷[2]

مشاور ترجمه: دکتر میرکمال میرنیا
دانشگاه تبریز_ایران

[1] ©حفظ حق مولف ۲۰۰۷_۱۹۸۵. هیچ بخشی از این کتاب بدون اجازه کتبی مولف قابل بازنویسی، ترجمه و نشر نمی‌باشد. در صورت تمایل به داشتن نسخه چاپی این کتاب، نامه الکترونیکی شامل نام، نشانی و تعهدتان نسبت به حفظ حق مولف (بدین معنی که رمز عبور، نسخه چاپی یا الکترونیکی را در اختیار دیگران نخواهید گذاشت) را به مولف s.morris@ballarat.edu.au بفرستید.

[2] این کتاب به صورت مستمر در حال گسترش و به‌روز شدن است؛ پیش‌بینی می‌شود که این کتاب در نهایت شامل ۱۵ فصل شود. لطفا در صورت مشاهده هرگونه خطا یا وجود پیشنهاد بهبود، با نویسنده به آدرس الکترونیکی s.morris@ballarat.edu.au تماس حاصل نمایید.

تشکر و قدردانی

هنگامی که اولین بار کتاب «توپولوژی بدون اشک» را دیدم از سادگی و جذابیت نحوه ارایه مطالب لذت بردم و با خواندن نظرات خوانندگان اعتقاد راسخ پیدا کردم که این کتاب منبع بسیار عالی برای یادگیری توپولوژی بصورت مطالعه انفرادی و کلاسی است. از همان ابتدا فکر ترجمه کتاب به فارسی از ذهنم خطور کرد و الان بسیار خرسندم که در حال ترجمه این اثر بدیع هستم و بر این اساس باید از پروفسور سیدنی موریس بخاطر دادن این فرصت و حمایت‌های دانشکده فناوری اطلاعات و علوم ریاضی دانشگاه بالارات تشکر کنم.

این ترجمه بدون کمک و راهنمایی‌های آقای دکتر میرنیا امکانپذیر نبود. دقت، حوصله و پشتکار ایشان ستودنی است و زبان من قاصر از ایفای تشکر.

ترجمه فارسی این کتاب با استفاده از نرم‌افزار رایگان فارسی‌تِک حروف‌چینی شده است. نرم‌افزار مذکور نسخه فارسی نرم‌افزار لَتِک است و چون هنوز نسخه نهایی فارسی‌تِک طراحی نشده است مشکلات خاص خود را دارد. جا دارد از زحمات دوستان، بخصوص آقای وحید قاسمی در وب‌لاگ www.farsitex.blogfa.com و آقای شایان پویا در وب‌لاگ http://texfusion.blogfa.com بدلیل رفع برخی از مشکلات تشکر کنم.

از آنجاییکه همواره امکان بهبود وجود دارد، یقینا این ترجمه خالی از اشکال و ایراد نیست. خواهشمند است در صورت مشاهده هر گونه خطا یا وجود پیشنهاد بهبود ترجمه، با مترجم به نشانی الکترونیکی a.nazari@ballarat.edu.au تماس حاصل نمایید.

کتاب اصلی در حال تکمیل و بروز شدن می‌باشد و ترجمه بر اساس نسخه ۱۴ اکتبر ۲۰۰۷ از آن انجام شده است. ترجمه کتاب بصورت فایل الکترونیکی و در فرمت PDF در اختیار علاقمندان قرار می‌گیرد. هیچ بخشی از ترجمه این کتاب بدون اجازه کتبی مولف و مترجم قابل بازنویسی، ترجمه و نشر نمی‌باشد.

آصف نظری گنجه‌لو
دانشگاه بالارات
۳ مارچ ۲۰۰۸

فهرست مطالب

۰	مقدمه	۵
۱	فضاهای توپولوژیک	۱۳
۲	توپولوژی اقلیدسی	۳۱
۳	نقاط حدی	۵۱
	کتاب نامه	۶۳
	نمایه	۶۴

فصل ۰

مقدمه

توپولوژی یک مبحث مهم و جالب در ریاضی است، که علاوه بر پرداختن به مفاهیم و قضیه‌های جدید، موارد قدیمی‌تر مثل توابع پیوسته را نیز شامل می‌شود. هرچند این تعریف جامعی از توپولوژی نیست، و اکتفا به آن تمام حقیقت توپولوژی را آشکار نمی‌کند و سبب نادیده گرفتن اهمیت آن می‌شود چراکه توپولوژی آنچنان اساسی است که تاثیر آن تقریبا در تمامی شاخه‌های دیگر ریاضیات ملموس است. به این دلیل، مطالعه آن به همه افرادی که دوست دارند ریاضیدان شوند توصیه می‌شود؛ اگر چه زمینه مورد علاقه آنها جبر، آنالیز، نظریهٔ دسته‌بندی، آشفتگی، مکانیک پیوستار، دینامیک، هندسه، ریاضیات صنعتی، ریاضی برای زیست شناسی، ریاضی برای علوم مالی، قالب‌سازی ریاضی، ریاضی برای فیزیک، ریاضی برای ارتباطات، نظریه اعداد، ریاضیات محاسباتی، تحقیق در عملیات یا آمار باشد یا خواهد بود. (کتاب‌نامه جامع در انتهای کتاب برای نشان دادن این ارتباط بین توپولوژی و سایر شاخه‌ها ضمیمه شده است.) مفاهیم توپولوژیک مثل فشردگی، همبندی و چگال بودن آنچنان برای ریاضیات امروز مهم است که مجموعه‌ها و توابع برای ریاضیات قرن گذشته حایز اهمیت بوده‌اند.

توپولوژی دارای چند زیرشاخه نظیر توپولوژی عمومی (گاهی توپولوژی نقطه‌ـمجموعه نیز نامیده می‌شود)، توپولوژی جبری، توپولوژی دیفرانسیل و جبر توپولوژیک است ـ که زیر شاخه اول یعنی توپولوژی عمومی پیش‌نیاز مطالعه سایر زیرشاخه‌ها است. هدف من در این کتاب ارائه کامل اساس توپولوژی عمومی است. افرادی که مشتاقانه ۱۰ فصل اول کتاب را دنبال کنند و حداقل نصف مساله‌ها را حل کنند، یقینا چنین پایه‌ای را کسب خواهند کرد.

برای خوانندگانی که تا بحال شاخه‌های اصول موضوعه‌ای ریاضیات مثل جبر مجرد را مطالعه نکرده‌اند، یادگیری نوشتن اثبات‌ها کار سختی خواهد بود. برای کمک به حل این مشکل کادرهایی را مکررا در فصل‌های آغازین کتاب قرار داده‌ام که اگرچه بخشی از اثبات نیست اما بیانگر چهارچوب فکری هستند که به اثبات منتهی می‌شود.

کادرها به صورت زیر مشخص شده اند:

به منظور نوشتن اثبات، این روند فکری بررسی شده است، که بهتر است «مکاشفه» یا «مرحله تجربی» نامیده شود.
در هر صورت، خواننده متوجه خواهد شد که اگرچه مکاشفه یا تجربه مهم است ولی هیچ چیز جای اثبات را نمی‌گیرد.

کتاب تعداد زیادی مساله برای حل کردن ارائه داده که تنها با کار کردن روی تعداد قابل قبولی از آنها می‌توانید بر این درس تسلط پیدا کنید. جواب مساله‌ها در کتاب گنجانده نشده است و تصمیم به انجام این کار نیز وجود ندارد. به نظر من مثال و اثبات به اندازه کافی در خود متن وجود دارد که لزومی به ارائه جواب مساله‌ها نباشد ـ در حقیقت انجام این کار خوشایند نیز نمی‌باشد. اغلب مفاهیم جدید در مساله‌ها گنجانده شده است؛ البته مفاهیمی که مهمتر هستند دوباره در متن کتاب معرفی خواهند شد. در ضمن، مساله‌های سخت با علامت * مشخص شده‌اند.

خوانندگانِ علاقمندی که بخواهند در مورد مشکلاتشان و پاسخ تمرین‌ها باهم ارتباط برقرار کنند، یا پیشنهادهایی در مورد کتاب و مطالعه بیشتر ارایه دهند، می‌توانند به گروهی که بدین منظور تحت عنوان "Topology Without Tears Readers" در "Facebook" ایجاد شده است، مراجعه کنند. برای عضویت در گروه، درخواست خود را به نویسنده کتاب (s.morris@ballarat.ed.au) ارسال نمایید.

در آخر، لازم است اشاره کنم که پیشرفت‌های ریاضی در بستر تاریخی آن بهتر فهمیده می‌شود. در حال حاضر به یادداشت‌های در باب شخصیت‌های توپولوژی در ضمیمه‌ی ۲ خود را قانع کرده‌ام که این یادداشت‌ها بطور وسیع از آرشیو تاریخ ریاضی مک تیوتور [۲] استخراج شده‌اند. به خواننده توصیه می‌شود به آرشیو تاریخ ریاضی مک تیوتور [۲] مراجعه کنند و مقالات کامل همچنین مقالات مربوط به شخصیت‌های کلیدی دیگر را مطالعه کنند. البته اطلاعات تاریخی خوب صرفا با مطالعه یک منبع بدست نمی‌آید.

از نقطه نظر تاریخی، بسیاری از مطالب توپولوژی که در این کتاب شرح داده می‌شود در نیمه‌ی اول قرن بیستم کشف شده‌اند و می‌توان گفت که مرکز گرانش این دوره از یافته‌ها، کشور لهستان است (البته مرزها تا حد زیادی تغییر یافته است). منصفانه است بگوییم که جنگ جهانی اول برای همیشه مرکز گرانش را تغییر داد. برای فهمیدن این نقد رازگونه به پیوست ۲ مراجعه کنید.

۱.۰ تشکر و قدردانی

بخش‌هایی از نسخه‌های اولیه طی ۳۰ سال گذشته در دانشگاه‌های لاتروب، نیوانگلند، ولونگانگ، کوئینزلند، ساوث استرالیا، سیتی کالج نیویورک و بالارات مورد استفاده قرار گرفته است. لازم است از تمام دانشجویانی که نسخه‌های قبلی را مورد بحث قرار داده و اشتباه‌ها را متذکر شده‌اند تشکر کنم. از دبورا کینگ و آلیسون پلنت به خاطر تشخیص تعداد زیادی از خطاها و نقاط ضعف در نحوه ارائه مطالب کتاب تشکر می‌کنم. همچنین از برخی همکاران شامل کارولین مک‌فیل، رالف کوپرمان، کارل هینیریش هافمن، رودنی نیلسن، پیتر پلیزانتس، جفری پرینس، بوان تامپسون و ایوان بارکر که نسخه‌های مختلف را خوانده و پیشنهادهایی برای بهبود داشته‌اند

تشکر می‌کنم. ضمنا از جک گری بخاطر جزوه‌های درسی نظریه مجموعه‌ها و محاسبات ترامتناهی، که در سال ۱۹۷۰ در دانشگاه نیوساوث ولز تهیه کرده بود، که تاثیر بسزایی در پیوست مربوط به نظریه مجموعه‌های نامتناهی داشت تشکر ویژه دارم.

در قسمت‌های مختلف این کتاب، بخصوص در پیوست ۲، یادداشت های تاریخی برگرفته شده از دو منبع عالی بورباکی [۱] و آرشیو تاریخ ریاضی مک تیوتور [۲] آمده است.

۲.۰ خوانندگان ـ کشور و تخصص

این کتاب توسط متخصصان بیمه، شیمی، علوم کامپیوتر، اقتصادسنجی، اقتصاد، هوانوردی، مکانیک، الکترونیک، نرم‌افزار، مهندسان علوم فضا و ارتباطات از راه دور، دانشجویان امور مالی، ریاضیات محض و کاربردی، تجارت آزاد، فلسفه، فیزیک، روانشناسی، طراحان نرم‌افزار و آمار در الجزایر، آرژانتین، استرالیا، اتریش، بنگلادش، بولیوی، بلاروس، بلژیک، بلیز، برزیل، بلغارستان، کامبوج، کامرون، کانادا، شیلی، چین، کلمبیا، کاستاریکا، کرواسی، جمهوری چک، دانمارک، مصر، استونی، اتیوپی، فیجی، فنلاند، فرانسه، غزه، آلمان، غنا، یونان، مجارستان، ایسلند، هند، اندونزی، ایران، عراق، ایتالیا، جامائیکا، ژاپن، کنیا، کره، کویت، لیتوانی، لوکزامبورگ، مالزی، مالت، موریتانی، مکزیک، نیکاراگوا، نیجریه، نروژ، پاکستان، پاراگوا، پرو، لهستان، پرتغال، قطر، رومانی، روسیه، صربستان و مونته نگرو، سیرالئون، سنگاپور، اسلونی، آفریقای جنوبی، اسپانیا، سودان، سوئد، سوئیس، تایوان، تایلند، هلند، فیلیپین، ترینیداد و توباگو، تونس، ترکیه، انگلستان، اوکراین، امارات متحده عربی، ایالات متحد آمریکا، اروگوئه، ازبکستان، ونزوئلا و ویتنام مورد استفاده قرار گرفته است.

این کتاب در http://www.econphd.net/notes.htm ـ پایگاه اطلاعاتی طراحی شده برای مطالب درسی در سطح کارشناسی به بالا در همه‌ی رشته‌ها (بخصوص برای دانشجویان اقتصاد) و در اطلس توپولوژی با آدرس http://at.yorku.ca/topology/educ.htm بعنوان مرجع ارائه شده است.

۳.۰ نظرات خوانندگان

ت. لسلی[1]، ایالات متحده آمریکا: کاری دلپسند که به زیبایی نوشته شده است؛
ای. فرر[2]، استرالیا: جزوات شما بسیار عالی است؛
ای. یوان[3]، آلمان: این کتاب برای شروع کنندگان توپولوژی واقعا عالی است؛
س. کومار[4]، هند: بدلیل ارائه ساده موضوع مجذوب شدم چرا که بدون اطلاعات خاص از ریاضی، مطالب کتاب به راحتی قابل تعقیب است؛
پاوین سیریپراپانوکول[5]، تایلند: من خودم را برای دوره دکترا آماده می‌کنم. کتاب شما کمک بسیار خوبی برای فهمیدن مطالب پیچیده توپولوژی در اقتصاد است.

[1] T. Lessley
[2] E. Ferrer
[3] E. Yuan
[4] S. Kumar
[5] Pawin Siriprapanukul

هانس ریجنر[1]، سوئد: کتاب بسیار خوبی است؛
ج. گری[2]، ایالات متحده آمریکا: کتاب بسیار خوبی است؛
دیپاک بانیک[3]، هند: کتاب زیبایی است؛
ب. پراگاف ج.[4]، ایالات متحده آمریکا: این کتاب، توپولوژی را به خوبی برای دانشجویان کارشناسی توضیح می‌دهد؛
تاپاس کومار بوس[5]، هند: مجموعه بسیار خوبی از اطلاعات است؛
استر سزرنای[6]، مجارستان: من دانشجوی کارشناسی ریاضی اقتصادی هستم... مطمئنا قبلا خیلی‌ها به شما گفته‌اند، با این وجود دوست دارم دوباره تکرار کنم که این کتاب بسیار عالی است.
کریستوفر رو[7]، استرالیا: در ابتدا از شما به خاطر نوشتن کتاب تشکر می‌کنم. اگر چه مطالب کتاب برای شما مقدماتی است ولی مطالعه آن برای من تجربه‌ای عالی بود؛
جینین دورمینی[8]، ایالات متحده آمریکا: در حال حاضر درس توپولوژی را می‌گذرانم و با مشکلات عظیمی در کلاس درس مواجه هستم. کتاب شما را بصورت مستقیم از شبکه رایانه‌ای خواندم که بسیار مفید بود؛
تارک فئودا[9]، ایالات متحده آمریکا: در حال مطالعه ریاضیات عمومی پیشرفته در انستیتوی صنعتی استیونز برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد علوم در شاخه مهندسی اقتصادی هستم. این اولین باری است که با موضوع توپولوژی مواجه می‌شوم. چندین کتاب خریدم ولی کتاب شما تنها کتابی است که مطالب را به شیوه جالبی ارائه کرده است. به این دلیل دوست دارم کتاب شما را داشته باشم تا در قطار یا انستیتو بخوانم.
پروفسور لوییس ج. آلیاس[10]، گروه ریاضی دانشگاه مورسیا، اسپانیا، اخیرا متوجه کتاب گرانقدر شما شدم. این ترم درس توپولوژی عمومی را تدریس خواهم کرد (البته تدریس فردا صبح شروع می‌شود). سال پیش همین درس را با استفاده از کتاب مانکرز (توپولوژی، نسخه دوم) و با در نظر گرفتن فصل‌های ۲، ۳، بخشی از فصل‌های ۴، ۵ و بخشی از فصل ۹ تدریس کردم. کتاب شما را خواندم و واقعا لذت بردم. کتاب شما واقعا دوست داشتنی است مخصوصا روشی که مطالب جدید را معرفی می‌کنید همچنین راهنمایی‌ها و ملاحظاتی که به خوانندگان می‌دهید.
گابریل اِ. م. بیلا[11]، رییس بخش تحقیقات انیستستو زیست‌نگاری مولکولی و فیزیولوژی، شورای ملی تحقیقات، ایتالیا: من نئروفیزیولوژیست هستم و سعی دارم تشریح نئرودینامیک از فرایند حسگری را با استفاده از توپولوژی بدست آورم. به این خاطر کتاب ارزشمند شما را شروع کردم.
گابریل لوکولی[12]، ایتالیا: اگرچه یک دانشجوی تازه کار هستم، ولی نحوه ارائه مطالب بخصوص تعداد زیاد مثال‌ها، برایم جالب بود؛
ک. اور[13]، ایالات متحده آمریکا: این کتاب بسیار عالی است؛

---

[1] Hannes Reijner
[2] G. Gray
[3] Dipak Banik
[4] B. Pragoff Jr
[5] Tapas Kumar Bose
[6] Eszter Csernai
[7] Christofer Roe
[8] Jeanine Dorminey
[9] Tarek Fouda
[10] Luis J. Alias
[11] Gabriele E.M. Biella
[12] Gabriele Luculli
[13] K. Orr

پروفسور احمد اولد[1]، کلمبیا: می‌خواهم به شما به خاطر نحوه ارائه، سادگی و روشنی مطالب تبریک بگویم؛
پل آنستد[2]، ایالات متحده آمریکا: کتاب شما را به این دلیل دوست دارم که مثال‌های بسیار خوبی دارد و فرض نمی‌کند که خواننده متخصص ریاضی است؛
آلبرتو گارسا رابوسو[3]، اسپانیا: کتاب شما را به شدت دوست دارم؛
جوزپ کورجی[4]، مدیر تحقیقات فیزیک نظری، موسسسه ملی فیزیک نظری، پیسا: کتابی خوب و درخشان در توپولوژی ؛
م. رینالدی[5]، ایالات متحده آمریکا: این بهترین و واضح‌ترین کتاب توپولوژی است که تا بحال دیده‌ام... وقتی کتاب شما را مطالعه کردم مفاهیم بهمدیگر مرتبط شدند. مثال‌هایتان عالی است؛
ژئولت پوبلت[6]، پروفسور اقتصاد، دانشگاه کاتولیک شیلی: اخیرا مطالعه کتاب شما را تمام کردم و آن را واقعا دوست دارم. کتاب بسیار واضح و مثال‌ها بسیار روشنگر هستند؛
الکساندر لیدن[7]، سوئد: از مطالعه کتاب شما بر روی صفحه نمایش رایانه لذت بردم و دوست دارم نسخه چاپی آن را داشته باشم؛
فرانکوا نویل[8]، ایالات متحده آمریکا: من دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی فضا در دانشگاه ماین (ایالات متحده آمریکا) هستم، استاد ما مشتاقانه کتاب شما را برای درس توپولوژی معرفی کرد؛
هسین-هان شن[9]، ایالات متحده آمریکا: من دانشجوی دکترای امور مالی در دانشگاه ایالتی نیویورک در بوفالو هستم. مطالب مربوط به توپولوژی در پایگاه اطلاعاتی شما جامع و قابل فهم است و برای درس آشنایی با توپولوژی برای دانشجویی که متخصص ریاضی نیست، بسیار مطلوب است؛
دگین کای[10]، ایالات متحده آمریکا: کتاب شما فوق‌العاده است؛
اریک یوان[11]، دارمستات، آلمان: من دانشجوی ریاضی در دانشگاه صنعتی دارمستات، در حال یادگیری توپولوژی هستم. استاد ما پروفسور ک. ه. هافمن، کتاب توپولوژی بدون اشک شما را به شدت توصیه کرده‌اند؛
مارتین وو[12]، دانشگاه اکسفورد: من دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی در اکسفورد هستم. از آنجایی که سعی دارم به مفاهیم مجرد ریاضی عادت کنم، از این رو عنوان کتاب توپولوژی بدون اشک، جذابیت طبیعی دارد؛
احمد اردم[13] ، ترکیه: من از خواندن کتاب خیلی لذت بردم؛
وولفگانگ موئنس[14]، بلژیک: من دانشجوی کارشناسی دانشگاه کاتولیک لوون هستم. ناخودآگاه متوجه شدم که در عرض چند ساعت قسمت زیادی از بخش اول را خوانده‌ام. قبل از ادامه باید شما را بخاطر سادگی در نوشتن و ساختار عالی کتاب ستایش کنم(مطمئنا مورد توجه قرار خواهد گرفت)؛

---

[1] Ahmed Ould
[2] Paul Unstead
[3] Alberto Garca Raboso
[4] Guiseppe Curci
[5] M. Rinaldo
[6] Joaquin Poblete
[7] Alexander Liden
[8] Francois Neville
[9] Hsin-Han Shen
[10] Degin Cai
[11] Eric Yuan
[12] Martin Vu
[13] Ahmet Erdem
[14] Wolfgange Moens

دونکان چن[1]، ایالات متحده آمریکا: حتما به کرات نامه‌های الکترونیکی مشابه این دریافت کرده‌اید، با این وجود همچنان دوست دارم تشکر خود را در رابطه با کتاب ابراز کنم. من یک طراح نرم افزار حرفه‌ای هستم و از مطالعه ریاضی لذت می برم؛

ماگایسواری سلاکوماران[2]، سنگاپور: من در آینده نزدیک برای دکترای اقتصاد به آمریکا خواهم رفت. کتاب شما در توپولوژی بسیار خوب است؛

تام هانت[3]، ایالات متحده آمریکا: بابت قرار دادن کتاب در اینترنت متشکرم؛

فاستو ساپوریتو[4]، ایتالیا: من در حال خواندن کتاب شما هستم که بهترین کتاب در مورد توپولوژی است که تا بحال دیده‌ام؛

تاکایوکی اوساگومی[5]، ایالات متحده آمریکا: خواندن کتاب شما را بصورت مستقیم از شبکه رایانه‌ای شروع کرده‌ام. به نظر من مطالب بسیار خوبی برای یادگیری توپولوژی و مفاهیم عمومی ریاضی دارد؛

رومن نول[6]، آلمان: به خاطر اجازه برای مطالعه کتاب از شما ممنونم. کتاب توپولوژی بدون اشک خیلی به من کمک کرد و دوباره مرا با ریاضی آشتی داد، چراکه بدلیل تدریس‌های نامنظم و مطالب غیرضروری به طور موقت علاقه خودم را از دست داده بودم؛

یوال یاتسکین[7]، ایالات متحده آمریکا: نگاهی به کتاب داشتم، به نظرم کتاب فوق‌العاده‌ای است؛

ن.س. ماوروگیانیس[8]، یونان: کتاب خیلی خوبی است؛

سمیح تومن[9]، ترکیه: می‌دانم که دکترای اقتصاد به معلومات ریاضی نیاز دارد. کتاب شما هنگام مطالعه موضوعات ضروری بسیار مفید بود؛

پیونگ هو کیم[10]، ایالات متحده آمریکا: من در حال حاضر دانشجوی دکترا هستم که در حال یادگیری جغرافیای اقتصادی می‌باشم. کتاب شما برای مفاهیم اساسی توپولوژی بسیار خوب است؛

خاویر هرناندز[11]، ترکیه: صمیمانه تشکر می‌کنم از افرادی نظیر شما که تمام تلاششان را بکار گرفته‌اند و دانششان را بدون فکر کردن به منافعی که می‌توانند بدست آورند، با دیگران سهیم می‌شوند؛ نه مانند افرادی که شمع را در زیر میز پنهان می‌کنند و برای تشخیص نور پول می‌گیرند.

ج. چاند[12]، استرالیا: بخاطر نوشتن کتاب توپولوژی بدون اشک ممنونم. کتاب شما بسیار عالی است.

ریچارد واند ولد[13]، ایالات متحده آمریکا: دو سال پیش با شما برای پیاده کردن یک نسخه از کتاب توپولوژی بدون اشک تماس گرفتم. در آن زمان درس توپولوژی را برای ترکیبی از دانشجویان کارشناسی و بالاتر تدریس می‌کردم. نشانی اینترنتی کتاب را برای دسترسی مستقیم بر روی شبکه رایانه‌ای به آنها دادم. اگر چه ترتیب و توسعه مطالب برای تدریس با ترتیب کتاب شما فرق داشت، یکی از دانشجویان خوب کلاس توصیه کرد که از کتاب شما تبعیت کنم و این کتاب تنها مرجع تدریس باشد. فکر می‌کنم پیشنهاد جالبی بود. بالاخره، تاریخ

---

[1] Duncan Chen

[2] Maghaisvarei Sellakumaran

[3] Tom Hunt

[4] Fausto Saporito

[5] Takayuki Osogami

[6] Roman Knoll

[7] Yuval Yatskan

[8] N.S. Mavrogiannis

[9] Semih Tumen

[10] Pyung Ho Kim

[11] Javier Hernandez

[12] J. Chand

[13] Richard Vande Velde

دوباره تکرار می‌شود، و بعد از دو سال می‌خواهم همان درس را برای دانشجویان مشابه تدریس کنم. بنابراین، می خواهم نسخه کامل کتاب را پیاده کنم.

پروفسور شا ژین وی[۱]، علوم کامپیوتر و هنرهای زیبا، دانشگاه کونکوردیا، کانادا: تبریکات مرا بخاطر نوشتن کتابی خوانا در توپولوژی بپذیرید. می‌خواهم از کتاب شما برای تدریس «ریاضیات در زندگی» به دانشجویان علاقمند و هنرمندان استفاده کنم. همیشه مایه خوشوقتی است هنگامی که آثار خوبی مثل کتاب شما پیدا می‌شود که طیف وسیعی از افراد بدون دردسر زیاد قادر به خواندن آن هستند.

استادیار دکتر رهانا باری[۲]، بنگلادش: من مدرس درس توپولوژی برای دانشجویان کارشناسی ارشد در دانشکده ریاضی دانشگاه داکا هستم. می‌توانم یک نسخه از کتاب فوق‌العاده توپولوژی بدون درد را داشته باشم؟

رائول نیلاکانتان[۳]، دانشجوی دکترا، دانشکده اقتصاد دانشگاه کالیفرنیای جنوبی، آمریکا، من دانشجوی دکترای دانشکده اقتصاد دانشگاه کالیفرنیای جنوبی، لاس‌وگاس هستم. می‌خواهم در زمینه تعادل عمومی با بازارهای ناقص کار کنم. این زمینه به دانش خوب از مفاهیم توپولوژیک نیاز دارد. یکی از همکارانم (آقای رامو گوپالان) از دانشگاه کانزاس، کتاب شما را به من معرفی کرد. بعد از مطالعه بخشی از کتاب، به این نتیجه رسیدم که این کتابی است که می‌خواهم با آن توپولوژی را یاد بگیرم.

لانگ نگوین[۴]، ایالات متحده آمریکا: تابحال کتابی چنین واضح از مطلبی چنان سخت ندیده‌ام.

رناتو ارلانا[۵]، شیلی: بخاطر این کتاب عالی به شما تبریک می‌گویم. چند فصل اول کتاب را خواندم و خیلی لذت بردم. قبلا فکر می‌کردم یادگیری توپولوژی برای من غیرممکن است ولی باید اعلام کنم که اکنون به طور مثبت در این باره فکر می‌کنم.

سیسای رگاساسنبتا[۶]، معاون رییس دانشکده بازرگانی و اقتصاد دانشگاه آدیس آبابا، اتیوپی: تصمیم دارم دکترای اقتصاد را شروع کنم و در حال حاضر در دانشکده بازرگانی و اقتصاد دانشگاه آدیس آبابا، اتیوپی، آفریقای شرقی تدریس می‌کنم. آیا می‌توانم تسخه قابل چاپ کتاب شما را داشته باشم؟

نیکانور م. توان[۷]، کالج ایالتی علوم و تکنولوژی داواو اورینتال، فیلیپین: تبریک! می‌خواهم صمیمانه از به اشتراک گذاشتن منابع آموزشی تشکر کنم. شما لطف بزرگی به من و دانشجویانم در فهم مفاهیم توپولوژیک کردید. تشکر و خسته نباشید.

ارنیتا ر. کالایاگ[۸]، فیلیپین: من خانم ارنیتا ر. کالایاگ از فیلیپین، دانشجوی دکترای ریاضی در دانشگاه دلا سالا هستم. تعریف‌های خوبی از کتاب توپولوژی شما شنیدم و بعنوان دانشجو نمی‌توانم از درخواست یک نسخه از کتاب و لذت بردن از آن اجتناب کنم. امیدوارم بعد از تایید درخواست من، شروع به مطالعه توپولوژی کنم که بسیار برای ما اساسی است.

نیکولا ماتجیک[۹]، صربستان: کتاب شما بسیار منحصربفرد و باارزش است و طیف وسیعی از خوانندگان را دربر می‌گیرد. این یک هدیه عالی از طرف شماست که در همه جای جهان مورد تقدیر قرار گرفته است. فکر می‌کنم هر کس که بخواهد اطلاعات مناسبی در توپولوژی پیدا کند می‌تواند از کتاب شما مستفید شود.

---

[1] Sha Xin Wei

[2] Rehana Bari

[3] Rahul Nilakantan

[4] Long Nguyen

[5] Renato Orellana

[6] sisay Regasa Senbeta

[7] Nicanor M. Tuan

[8] Ernita R. Calayag

[9] Nikola Matejic

ایرج داودآبادی[1]، ایران: (ابتدا بخاطر کلمات نامناسب مرا ببخشید) من یک مهندس مکانیک هستم که به شدت به ریاضیات بخصوص آنالیز علاقمند هستم. من بدون معلم به مطالعه ریاضی می‌پردازم. بعضی مطالب (مثلا توپولوژی و آنالیز مجرد) برای من سخت است چون تجربه زیادی در ریاضی محض ندارم. با استفاده از کتاب شما توانستم مطالب مجرد زیادی را یاد بگیرم. کتاب شما با بقیه کتاب‌ها فرق دارد.
م. ا. ر. خان[2]، کراچی: تشکر به خاطر ذکر نام یک دانشجوی جهان سومی.

©حفظ حق مولف ۲۰۰۷-۱۹۸۵. هیچ بخشی از این کتاب بدون اجازه کتبی مولف قابل بازنویسی نمی‌باشد.

[1] Iraj Davoodabadi
[2] M.A.R. Khan

فصل ۱

فضاهای توپولوژیک

مقدمه

ممکن است تنیس، فوتبال، بیسبال و هاکی بسیار مهیج باشند ولی برای بازی کردن باید (برخی از) قواعد بازی را یاد بگیرید. ریاضیات از این اصل مستثنی نیست. بنابراین با یادگیری قواعد توپولوژی شروع می‌کنیم.

این فصل با تعریف توپولوژی شروع می‌شود و سپس به چند مثال می‌پردازد: فضاهای توپولوژیک متناهی، فضاهای گسسته، فضاهای ناگسسته، و فضاهای با توپولوژی محدود-بسته.

توپولوژی شبیه سایر شاخه‌های ریاضی محض همانند نظریه گروه، اصل موضوعه‌ای است. ما با یک دسته از این اصول موضوعه شروع می‌کنیم و سپس از آنها در اثبات قضیه‌ها و گزاره‌ها استفاده می‌کنیم. بالا بردن مهارت در نوشتن اثبات‌ها بسیار حایز اهمیت است.

چرا اثبات‌ها اینقدر مهم هستند؟ فرض کنید وظیفه ما ساختن یک خانه باشد. طبیعتا باید از پی خانه شروع کنیم. در مطالعه توپولوژی، اصول موضوعه و تعاریف پی ساختمان هستند – هر چیز دیگر بر اساس آنها ساخته می‌شود. هر قضیه یا گزاره سطح جدیدی از دانش را ارائه می‌دهد و باید به سطوح قبلی متصل شود. اتصال سطوح جدید به سطوح قبلی از طریق اثبات صورت می‌گیرد. به این دلیل قضیه‌ها و گزاره‌ها بلندی‌های جدیدی هستند که ما فتح می‌کنیم در حالیکه اثبات‌ها مثل رابط‌هایی هستند که آنها را به سطوح پایینی وصل می‌کنند. بدون اثبات‌ها ساختار دوام نخواهد داشت.

حال به نظر شما اثبات ریاضی چیست؟

اثبات ریاضی [1] یک بحث دقیق است که با اطلاعات داده شده شروع می‌شود با استدلال منطقی ادامه پیدا می‌کند و به چیزی که از شما خواسته شده است که ثابت کنید، منتهی می‌شود.

شما باید اثبات را با نوشتن اطلاعات داده شده شروع کنید و سپس باید بتوانید نتیجه‌ای را که می‌خواهید به آن برسید، بدست آورید. اگر اطلاعات داده شده به شما، یا آن چیزی که باید ثابت کنید دارای اصطلاحات تخصصی باشد، باید تعریف این اصطلاحات تخصصی را بنویسید.

در نوشتن اثبات باید از جملات کامل استفاده کنید. هر یک از این جملات باید نتیجهٔ (i) چیزی که قبلا بیان شده یا (ii) یک قضیه، گزاره یا لم که قبلا ثابت شده است، باشد.

در این کتاب، اثبات‌های زیادی را خواهید دید ولی توجه داشته باشید که ریاضیات ورزشی برای تماشا نیست. باید خودتان در بازی شرکت کنید. تنها راه برای یادگیری نوشتن اثبات این است که سعی کنید آنها را

[1] Mathematical proof

خودتان بنویسید.

۱.۱ توپولوژی

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. گردایه τ از زیرمجموعه‌های X را یک **توپولوژی**[1] بر روی X می‌نامند اگر

(i) τ شامل مجموعه تهی ($\emptyset$) و X باشد،

(ii) τ شامل اجتماع هر تعداد (متناهی یا نامتناهی) از مجموعه‌های موجود در آن باشد، و

(iii) اشتراک هر دو عضو τ به τ تعلق داشته باشد.

زوج (X,τ) را یک **فضای توپولوژیک**[2] می‌نامند.

مثال ۲.۱.۱ فرض کنید $X = \{a,b,c,d,e,f\}$ و

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e,f\}\}.$$

در این صورت τ_1 یک توپولوژی بر روی X است چون شرط‌های *(i)*، *(ii)* و *(iii)* از تعریف ۱.۱.۱ برقرارند. ■

مثال ۳.۱.۱ فرض کنید $X = \{a,b,c,d,e\}$ و

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,e\}, \{b,c,d\}\}.$$

در این صورت τ_2 یک توپولوژی بر روی X نیست چون اجتماع

$$\{c,d\} \cup \{a,c,e\} = \{a,c,d,e\}$$

از دو عضو τ_2 متعلق به τ_2 نیست؛ یعنی، τ_2 در شرط *(ii)* از تعریف ۱.۱.۱ صدق نمی‌کند. ■

مثال ۴.۱.۱ فرض کنید $X = \{a,b,c,d,e,f\}$ و

$$\tau_3 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{f\}, \{a,f\}, \{a,c,f\}, \{b,c,d,e,f\}\}.$$

در این صورت τ_3 یک توپولوژی بر روی X نیست چون اشتراک دو عضو τ_3

$$\{a,c,f\} \cap \{b,c,d,e,f\} = \{c,f\}$$

متعلق به τ_3 نیست؛ یعنی، τ_3 در شرط *(iii)* از تعریف ۱.۱.۱ صدق نمی‌کند. ■

[1] Topology

[2] Topological space

مثال ۵.۱.۱ فرض کنید $\mathbb{N}$ مجموعه اعداد طبیعی (یعنی مجموعه اعداد صحیح مثبت) و τ_4 شامل $\mathbb{N}$، $\emptyset$ و تمام زیرمجموعه های متناهی $\mathbb{N}$ باشد. در این صورت τ_4 یک توپولوژی بر روی $\mathbb{N}$ نیست چون اجتماع نامتناهی

$$\{2\} \cup \{3\} \cup \ldots \{n\} \cup \ldots = \{2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

از اعضای τ_4 متعلق به τ_4 نیست؛ یعنی، τ_4 در شرط *(ii)* از تعریف ۱.۱.۱ صدق نمی کند. ■

تعریف ۶.۱.۱ فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و τ گردایه تمام زیرمجموعه‌های X باشد. در این صورت τ را **توپولوژی گسسته**[1] بر روی X می‌نامند. فضای توپولوژیک (X,τ) را یک **فضای گسسته**[2] می‌نامند.

توجه داریم که τ در تعریف ۶.۱.۱ در شرایط تعریف ۱.۱.۱ صدق می‌کند و بنابراین واقعا یک توپولوژی است.

مشاهده می‌کنید که X در تعریف ۶.۱.۱ می تواند هر مجموعه ناتهی باشد. بنابراین تعداد نامتناهی فضای گسسته ـبرای هر مجموعه‌ی X یک فضاـ وجود دارد.

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد و $\tau = \{X, \emptyset\}$. در این صورت τ را **توپولوژی ناگسسته**[3] و (X,τ) را **فضای ناگسسته**[4] می‌نامند.

یکبار دیگر باید بررسی کنیم که τ در شرایط تعریف ۱.۱.۱ صدق می‌کند و لذا در واقع یک توپولوژی است.
دوباره مشاهده می‌کنید که X در تعریف ۷.۱.۱ می‌تواند هر مجموعه ناتهی باشد. بنابراین تعداد نامتناهی فضای ناگسسته ـبرای هر X یک فضاـ وجود دارد.

در مقدمه این فصل، اهمیت اثبات‌ها و موارد مشمول در آنها را بحث کردیم. تجربه اول ما در اثبات‌ها مثال ۸.۱.۱ و گزاره ۹.۱.۱ خواهد بود. شما باید این اثبات‌ها را به دقت بخوانید.

[1] Discrete topology
[2] Discrete space
[3] Indiscrete topology
[4] Indiscrete space

مثال ۸.۱.۱ اگر $X = \{a, b, c\}$ و $\mathcal{T}$ یک توپولوژی بر روی X با ویژگی $\{a\} \in \mathcal{T}$، $\{b\} \in \mathcal{T}$ و $\{c\} \in \mathcal{T}$ باشد، ثابت کنید $\mathcal{T}$ یک توپولوژی گسسته است.

برهان.

می‌دانیم که $\mathcal{T}$ یک توپولوژی شامل $\{a\}$، $\{b\}$ و $\{c\}$ است.
می خواهیم ثابت کنیم که $\mathcal{T}$ یک توپولوژی گسسته است؛ یعنی اینکه، باید (طبق تعریف ۶.۱.۱) ثابت کنیم که $\mathcal{T}$ شامل همه زیرمجموعه‌های X است. بخاطر داشته باشید که $\mathcal{T}$ یک توپولوژی است و در شرایط (i)، (ii) و (iii) از تعریف ۱.۱.۱ صدق می‌کند.
بنابراین اثبات خود را با نوشتن زیرمجموعه‌های X شروع می‌کنیم.

مجموعه X دارای ۳ عضو است و بنابراین دارای 2^3 زیرمجموعه‌ی متمایز است که عبارتند از $S_1 = \emptyset$, $S_2 = \{a\}$, $S_3 = \{b\}$, $S_4 = \{c\}$, $S_5 = \{a, b\}$, $S_6 = \{a, c\}$, $S_7 = \{b, c\}$, $S_8 = \{a, b, c\} = X$.
می‌خواهیم ثابت کنیم که هر یک از این زیرمجموعه‌ها مشمول در $\mathcal{T}$ است. از آنجاییکه $\mathcal{T}$ یک توپولوژی است، از تعریف ۱.۱.۱ (i) نتیجه می‌شود که X و $\emptyset$ در $\mathcal{T}$ هستند؛ یعنی، $S_1 \in \mathcal{T}$ و $S_8 \in \mathcal{T}$.
بنابر فرض داریم که $\{a\} \in \mathcal{T}$، $\{b\} \in \mathcal{T}$ و $\{c\} \in \mathcal{T}$؛ یعنی، $S_2 \in \mathcal{T}$، $S_3 \in \mathcal{T}$ و $S_4 \in \mathcal{T}$.
برای تکمیل اثبات لازم است نشان دهیم $S_5 \in \mathcal{T}$، $S_6 \in \mathcal{T}$ و $S_7 \in \mathcal{T}$. داریم $S_5 = \{a, b\} = \{a\} \cup \{b\}$. چون $\{a\}$ و $\{b\}$ در $\mathcal{T}$ هستند، از تعریف ۱.۱.۱ (ii) نتیجه می‌شود اجتماع آنها نیز در $\mathcal{T}$ باشد؛ یعنی، $S_5 = \{a, b\} \in \mathcal{T}$.
به همین طریق نتیجه می‌شود، $S_6 = \{a, c\} \in \mathcal{T}$ و $S_7 = \{b, c\} \in \mathcal{T}$. ■

در مقدمه این بخش اشاره کردیم که ریاضیات ورزشی برای تماشا کردن نیست. بلکه شما باید یک شرکت کننده فعال باشید. البته اشتراک شما شامل انجام برخی از تمرین‌ها نیز می‌باشد. اما انتظار بیشتری از شما می‌رود. شما باید در مورد مطالبی که به شما ارائه می‌شود فکر کنید.

یکی از وظایف شما مشاهده نتایج اثبات شده و پرسیدن سوالات مرتبط است. برای مثال، نشان دادیم که اگر همه مجموعه‌های تک‌عضوی $\{a\}$، $\{b\}$ و $\{c\}$ در $\mathcal{T}$ باشد و $X = \{a, b, c\}$، آنگاه $\mathcal{T}$ توپولوژی گسسته است. شما باید از خودتان بپرسید آیا این نتیجه برای مثال کلی‌تر نیز درست است؟ یعنی اگر $(X, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد بصورتی که $\mathcal{T}$ شامل همه مجموعه‌های تک‌عضوی باشد، آیا $\mathcal{T}$ لزوما یک توپولوژی گسسته است؟ جواب مثبت است و در گزاره ۹.۱.۱ ثابت شده است.

گزاره ۹.۱.۱ اگر $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد بطوری که به ازای هر $x \in X$، مجموعه تک‌عضوی $\{x\}$ در $\mathcal{T}$ باشد، آنگاه $\mathcal{T}$ یک توپولوژی گسسته است.

برهان.

این نتیجه تعمیم مثال ۸.۱.۱ است. بنابراین ممکن است انتظار داشته باشید که اثباتی مشابه آن داشته باشد. ولی، ما نمی‌توانیم فهرست همه زیرمجموعه‌های X را ذکر کنیم چرا که ممکن است X نامتناهی باشد. در هر صورت، باید ثابت کنیم که همه زیرمجموعه‌های X در $\mathcal{T}$ است.

اکنون ممکن است شما وسوسه شوید که نتیجه را برای حالت‌های خاص مثلا اینکه X شامل ۴، ۵ یا حتی ۱۰۰ عضو باشد، ثابت کنید. ولی این روش محکوم به شکست است. اگر ملاحظات مربوط به اثبات‌های ریاضی در ابتدای این فصل را بخاطر آورید که معلوم شد که اثبات ریاضی یک بحث دقیق است. ما نمی‌توانیم با در نظر گرفتن تعدادی مثال خاص (حتی تعداد زیاد آن) یک استدلال محکم و خلل‌ناپذیر بسازیم. یک بحث دقیق باید همه حالت‌های خاص را دربر بگیرد. بنابراین ما حالت کلی یک مجموعه ناتهی و دلخواه X را در نظر می‌گیریم. باید ثابت کنیم که هر زیر مجموعه X در $\mathcal{T}$ است.

با نگاهی به مثال ۸.۱.۱ متوجه می‌شویم که نکته کلیدی اثبات این است که هر زیرمجموعه X اجتماع زیرمجموعه‌های تک‌عضوی X است و ما میدانیم که همه زیرمجموعه‌های تک‌عضوی در $\mathcal{T}$ وجود دارد. این برای حالت کلی هم درست است.

اثبات را با ثبت این واقعیت که هر مجموعه‌ای اجتماع تمام زیرمجموعه‌های تک‌عضوی خود است شروع می‌کنیم. فرض کنید S یک زیرمجموعه X باشد. پس داریم

$$S = \bigcup_{x \in S} \{x\}.$$

از آنجاییکه می‌دانیم هر $\{x\}$ در $\mathcal{T}$ است، از تعریف ۱.۱.۱ (ii) و تساوی بالا برمی‌آید که $S \in \mathcal{T}$. چون S یک زیرمجموعه دلخواه X بود، پس نتیجه می‌گیریم که $\mathcal{T}$ یک توپولوژی گسسته است. ■

اینکه هر مجموعه S اجتماع زیرمجموعه‌های تک‌عضوی آن است نتیجه‌ای است که گاهی در قسمت‌های مختلف کتاب از آن استفاده می‌کنیم. توجه کنید که این نتیجه حتی برای حالت $S = \emptyset$ نیز درست است و براین اساس مفهوم اجتماع تهی[1] بوجود می‌آید که نتیجه آن $\emptyset$ است.

[1] Empty union

تمرین‌های ۱.۱

۱. مجموعه $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ را در نظر بگیرید. تعیین کنید کدامیک از گردایه‌های زیر از زیرمجموعه‌های X یک توپولوژی بر روی X است:

(الف) $\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, f\}, \{b, f\}, \{a, b, f\}\}$،

(ب) $\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{a, b, f\}, \{a, b, d\}, \{a, b, d, f\}\}$،

(ج) $\mathcal{T}_3 = \{X, \emptyset, \{f\}, \{e, f\}, \{a, f\}\}$.

۲. مجموعه $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ را در نظر بگیرید. کدامیک از گردایه‌های زیر از زیرمجموعه‌های X یک توپولوژی بر روی X است؟ (جواب‌های خود را توجیه کنید.)

(الف) $\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{c\}, \{b, d, e\}, \{b, c, d, e\}, \{b\}\}$،

(ب) $\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, d, e\}, \{a, b, d\}, \{a, b, d, e\}\}$،

(ج) $\mathcal{T}_3 = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, b, c\}, \{d, e, f\}, \{b, d, e, f\}\}$.

۳. اگر $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ و $\mathcal{T}$ توپولوژی گسسته بر روی X باشد، کدامیک از عبارت‌های زیر درست است؟

(الف) $X \in \mathcal{T}$ ؛ (ب) $\{X\} \in \mathcal{T}$ ؛ (ج) $\{\emptyset\} \in \mathcal{T}$ ؛ (د) $\emptyset \in \mathcal{T}$ ؛

(ه) $\emptyset \in X$ ؛ (و) $\{\emptyset\} \in X$ ؛ (ز) $\{a\} \in \mathcal{T}$ ؛ (ح) $a \in \mathcal{T}$ ؛

(ط) $\emptyset \subseteq X$ ؛ (ی) $\{a\} \in X$ ؛ (ک) $\{\emptyset\} \subseteq X$ ؛ (ل) $a \in X$ ؛

(م) $X \subseteq \mathcal{T}$ ؛ (ن) $\{a\} \subseteq \mathcal{T}$ ؛ (س) $\{X\} \subseteq \mathcal{T}$ ؛ (ع) $a \subseteq \mathcal{T}$ ؛

[راهنمایی. دقیقا ۶ مورد از موارد بالا درست است.]

۴. فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد. ثابت کنید اشتراک تعداد متناهی از اعضای $\mathcal{T}$ نیز عضوی از $\mathcal{T}$ است. [راهنمایی. برای بدست آوردن نتیجه از «استقرای ریاضی» استفاده کنید.]

۵. فرض کنید $\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی باشد. ثابت کنید که هرکدام از گردایه‌های زیر از زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ یک توپولوژی است.

(i) $\mathcal{T}_1$ شامل $\mathbb{R}$، $\emptyset$ و هر بازه $(-n, n)$، به ازای هر عدد صحیح مثبت n است،

(ii) $\mathcal{T}_2$ شامل $\mathbb{R}$، $\emptyset$ و هر بازه $[-n, n]$، به ازای هر عدد صحیح مثبت n است،

(iii) $\mathcal{T}_3$ شامل $\mathbb{R}$، $\emptyset$ و هر بازه $[-n, \infty)$، به ازای هر عدد صحیح مثبت n است.

۶. فرض کنید $\mathbb{N}$ مجموعه اعداد صحیح مثبت باشد. ثابت کنید که هرکدام از گردایه های زیر از زیرمجموعه‌های $\mathbb{N}$ یک توپولوژی است.

(i) τ_1 شامل $\mathbb{N}$، $\emptyset$ و هر مجموعه $\{1, 2, \ldots, n\}$، به ازای هر عدد صحیح مثبت n است. (این توپولوژی را **توپولوژی قطعه آغازین**[1] می‌نامند.)

(ii) τ_2 شامل $\mathbb{N}$، $\emptyset$ و هر مجموعه $\{n, n+1, \ldots\}$، به ازای هر عدد صحیح مثبت n است. (این توپولوژی را **توپولوژی قطعه پایانی**[2] می‌نامند.)

۷. تمام توپولوژی‌های ممکن بر روی مجموعه‌های زیر را بنویسید:

(الف) $X = \{a, b\}$،

(ب) $Y = \{a, b, c\}$.

۸. مجموعه نامتناهی X و توپولوژی τ بر روی آن را در نظر بگیرید. اگر هر زیرمجموعه نامتناهی X در τ باشد، ثابت کنید که τ یک توپولوژی گسسته است.

۹.* فرض کنید $\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی باشد. دقیقا سه مورد از ده گردایه زیر از زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ توپولوژی است. آنها را مشخص و پاسخ خود را توجیه کنید.

(i) τ_1 شامل $\mathbb{R}$، $\emptyset$ و هر بازه (a, b)، به ازای هر دو عدد حقیقی a و b ، $a < b$ است،

(ii) τ_2 شامل $\mathbb{R}$، $\emptyset$ و هر بازه $(-r, r)$، به ازای هر عدد حقیقی مثبت r است،

(iii) τ_3 شامل $\mathbb{R}$، $\emptyset$ و هر بازه $(-r, r)$، به ازای هر عدد گویای مثبت r است،

(iv) τ_4 شامل $\mathbb{R}$، $\emptyset$ و هر بازه $[-r, r]$، به ازای هر عدد گویای مثبت r است،

(v) τ_5 شامل $\mathbb{R}$، $\emptyset$ و هر بازه $(-r, r)$، به ازای هر عدد گنگ مثبت r است،

(vi) τ_6 شامل $\mathbb{R}$، $\emptyset$ و هر بازه $[-r, r]$، به ازای هر عدد گنگ مثبت r است،

(vii) τ_7 شامل $\mathbb{R}$، $\emptyset$ و هر بازه $[-r, r)$، به ازای هر عدد حقیقی مثبت r است،

(viii) τ_8 شامل $\mathbb{R}$، $\emptyset$ و هر بازه $(-r, r]$، به ازای هر عدد حقیقی مثبت r است،

(ix) τ_9 شامل $\mathbb{R}$، $\emptyset$ و هر بازه $(-r, r)$، و هر بازه $[-r, r]$ به ازای هر عدد حقیقی مثبت r است،

(x) τ_{10} شامل $\mathbb{R}$، $\emptyset$ و هر بازه $[-n, n]$، و هر بازه $(-r, r)$ به ازای هر عدد صحیح مثبت n و هر عدد حقیقی مثبت r است.

۲.۱ مجموعه‌های باز، مجموعه‌های بسته و مجموعه‌های بازبسته

بجای اشاره مکرر به «عضوی از τ»، راحت‌تر است که اسمی برای این مجموعه‌ها در نظر بگیریم. بر این اساس، آنها را «مجموعه‌های باز» می‌نامیم. همچنین متمم مجموعه‌های باز را «مجموعه‌های بسته» می‌نامیم. این نامگذاری مطلوب نیست، ولی از «بازه‌های باز» و «بازه‌های بسته» روی خط اعداد حقیقی استخراج شده است. در این مورد در فصل دو بیشتر صحبت خواهیم کرد.

[1] Initial segment topology

[2] Final segment topology

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد. اعضای $\mathcal{T}$ را مجموعه‌های باز[1] می‌نامند.

گزاره ۲.۲.۱ اگر $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد، آنگاه

(i) X و $\emptyset$ مجموعه‌های باز هستند،

(ii) اجتماع هر تعداد (متناهی یانامتناهی) از مجموعه‌های باز یک مجموعه باز است و

(iii) اشتراک هر تعداد متناهی از مجموعه‌های باز یک مجموعه باز است.

برهان. موارد (i) و (ii) نتیجه بدیهی تعریف‌های ۱.۲.۱ و ۱.۱.۱ است. (iii) از تعریف ۱.۲.۱ و تمرین شماره ۴ از بخش ۱.۱ نتیجه می‌شود. ■

در هنگام خواندن گزاره ۲.۲.۱، یک سوال باید به ذهن شما خطور کند: در حالیکه اجتماع هر تعداد متناهی و نامتناهی از مجموعه‌های باز، باز است تنها اشتراک متناهی از مجموعه‌های باز، باز است. آیا اشتراک نامتناهی از مجموعه‌های باز همیشه باز است؟ مثال بعد نشان می‌دهد که جواب منفی است.

مثال ۳.۲.۱ فرض کنید $\mathbb{N}$ مجموعه اعداد صحیح مثبت و $\mathcal{T}$ شامل $\emptyset$ و هر زیرمجموعه S از $\mathbb{N}$ باشد که مکمل S در $\mathbb{N}$ (یعنی $\mathbb{N}\backslash S$) یک مجموعه متناهی است. به راحتی قابل اثبات است که $\mathcal{T}$ در شرایط تعریف ۱.۱.۱ صدق می‌کند و بنابراین یک توپولوژی بر روی $\mathbb{N}$ است. (در بخش بعد بیشتر در مورد این توپولوژی تحت عنوان توپولوژی محدود-بسته صحبت خواهیم کرد.) برای هر عدد طبیعی n، مجموعه S_n را بصورت زیر تعریف کنید:

$$S_n = \{1\} \cup \{n+1\} \cup \{n+2\} \cup \{n+3\} \cup \ldots = \{1\} \cup \bigcup_{m=n+1}^{\infty} \{m\}.$$

بطور واضح چون مکمل هر S_n متناهی است پس یک مجموعه باز در توپولوژی $\mathcal{T}$ خواهد بود. بهرحال،

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \{1\} \qquad .(1)$$

چون مکمل مجموعه $\{1\}$ مجموعه متناهی یا $\mathbb{N}$ نیست، مجموعه باز نخواهد بود. بنابراین (۱) نشان می‌دهد که اشتراک مجموعه‌های باز S_n یک مجموعه باز نیست. ■

ممکن است که بپرسید: چگونه مثال ۳.۲.۱ را پیدا کرده‌اید؟ پاسخ این سوال زیاد جالب نیست! نتیجه سعی و خطا است.

اگر به عنوان مثال یک توپولوژی گسسته را در نظر می‌گرفتیم، ممکن بود به این نتیجه برسیم که اشتراک هر تعداد از مجموعه‌های باز، یک مجموعه باز است. عین همین نتیجه برای توپولوژی‌های ناگسسته هم درست است. بنابراین، کاری که باید انجام بدهیم حدس زدن هوشمندانه است.

بخاطر بیاورید که برای اثبات اینکه اشتراک مجموعه‌های باز لزوما باز نیست، کافی است تنها یک مثال نقض پیدا کنید!

[1] Open sets

تعریف ۴.۲.۱ فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد. به زیرمجموعه S از X یک مجموعه بسته[1] در $(X,\mathcal{T})$ گفته می‌شود اگر مکمل آن در X یعنی $X\backslash S$، یک مجموعه باز در $(X,\mathcal{T})$ باشد.

در مثال ۲.۱.۱ مجموعه‌های بسته عبارتند از

$$\emptyset, X, \{b,c,d,e,f\}, \{a,b,e,f\}, \{b,e,f\} \text{ و } \{a\}.$$

اگر $(X,\mathcal{T})$ یک فضای گسسته باشد، بدیهی است که هر زیرمجموعه X یک مجموعه بسته است. در حالیکه در یک فضای ناگسستهٔ $(X,\mathcal{T})$ فقط مجموعه‌های X و $\emptyset$ بسته هستند.

گزاره ۵.۲.۱ اگر $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد، آنگاه

(i) X و $\emptyset$ مجموعه‌های بسته هستند،

(ii) اشتراک هر تعداد (متناهی یا نامتناهی) از مجموعه‌های بسته یک مجموعه بسته است و

(iii) اجتماع هر تعداد متناهی از مجموعه‌های بسته یک مجموعه بسته است.

برهان. (i) مستقیماً نتیجه گزاره ۲.۲.۱(i) و تعریف ۴.۲.۱ است چون مکمل X مجموعه $\emptyset$ است و برعکس.

برای اثبات (iii)، فرض کنید مجموعه‌های $S_1, S_2, \ldots, S_n$ مجموعه‌های بسته باشند. می‌خواهیم ثابت کنیم $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$ یک مجموعه بسته است. بر اساس تعریف ۴.۲.۱ کافی است نشان دهیم $X\backslash(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n)$ یک مجموعه باز است.

چون مجموعه‌های $S_1, S_2, \ldots, S_n$ بسته هستند پس مکمل آنها $X\backslash S_1, X\backslash S_2, \ldots, X\backslash S_n$ مجموعه‌های باز هستند و لذا داریم

$$X\backslash(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n) = (X\backslash S_1) \cap (X\backslash S_2) \cap \ldots \cap (X\backslash S_n). \qquad (1)$$

با در نظر گرفتن اینکه طرف راست (۱) اشتراک تعداد متناهی از مجموعه‌های باز است پس طرف چپ هم یک مجموعه باز خواهد بود. بنابراین $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$ یک مجموعه بسته است.

اثبات (ii) شبیه اثبات (iii) است. [بهرحال، باید هشدار مثال ۹.۳.۱ را در نظر بگیرید.] ■

هشدار. اغلب نام‌های «باز» و «بسته» باعث اشتباه افراد تازه وارد به دنیای توپولوژی می‌شود. علیرغم اسامی، بعضی مجموعه‌های باز، بسته نیز هستند. بعلاوه، بعضی از مجموعه‌ها نه باز هستند و نه بسته! در حقیقت، اگر مثال ۲.۱.۱ را در نظر بگیریم، خواهیم دید

(i) مجموعه $\{a\}$ هم باز است و هم بسته؛

(ii) مجموعه $\{b,c\}$ نه باز است و نه بسته؛

(iii) مجموعه $\{c,d\}$ باز است ولی بسته نیست؛

(iv) مجموعه $\{a,b,e,f\}$ بسته است ولی باز نیست.

در یک فضای گسسته هر مجموعه هم باز است و هم بسته، در حالیکه در فضای ناگسسته $(X,\mathcal{T})$ همه زیرمجموعه‌های X بجز X و $\emptyset$ نه باز هستند و نه بسته.■

برای بخاطر سپردن اینکه مجموعه‌ها می‌توانند همزمان باز و بسته باشند، تعریف زیر ارائه می‌شود.

[1] Closed set

تعریف ۶.۲.۱ زیرمجموعه S از فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ مجموعه **باز-بسته**[۱] گفته می‌شود اگر در این فضا، همزمان باز و بسته باشد.[۲]

در هر فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ مجموعه‌های X و $\emptyset$ باز-بسته هستند.
در فضای گسسته همه زیرمجموعه‌های X باز-بسته هستند.
در فضای ناگسسته فقط مجموعه‌های X و $\emptyset$ بازبسته هستند.

تمرین‌های ۲.۱

۱. تمام زیرمجموعه‌های ممکن مجموعه X در مثال ۲.۱.۱ را بنویسید. برای هر کدام تعیین کنید که کدامیک از حالات (i) باز-بسته؛ (ii) نه باز نه بسته؛ (iii) باز است ولی بسته نیست؛ (iv) بسته است ولی باز نیست، درست است.

۲. فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد با این خاصیت که هر زیرمجموعه آن یک مجموعه بسته است. ثابت کنید که $(X,\mathcal{T})$ یک فضای گسسته است.

۳. مشاهده کنید که اگر $(X,\mathcal{T})$ یک فضای گسسته یا ناگسسته باشد، هر مجموعه باز یک مجموعه باز-بسته است. برای مجموعه $X=\{a,b,c,d\}$ یک توپولوژی پیدا کنید که نه گسسته باشد و نه ناگسسته، ولی این خاصیت را داشته باشد که هر مجموعه باز یک مجموعه باز-بسته باشد.

۴. فرض کنید مجموعه X نامتناهی باشد. اگر $\mathcal{T}$ یک توپولوژی بر روی X باشد بطوریکه هر زیرمجموعه نامتناهی X بسته باشد، ثابت کنید $\mathcal{T}$ یک توپولوژی گسسته است.

۵. فرض کنید X یک مجموعه نامتناهی و $\mathcal{T}$ یک توپولوژی بر روی آن باشد بطوری که تنها زیرمجموعهٔ نامتناهی X خود X است. آیا $(X,\mathcal{T})$ لزوماً یک فضای ناگسسته است؟

۶. (i) فرض کنید $\mathcal{T}$ یک توپولوژی بر روی مجموعه X باشد بطوریکه $\mathcal{T}$ شامل دقیقاً ۴ مجموعه است؛ $\mathcal{T}=\{X,\emptyset,A,B\}$ که A و B زیرمجموعه‌های ناتهی واقعی[۳] و مجزا از X هستند. [A یک زیرمجموعه واقعی از X است اگر $A\subseteq X$ و $A\neq X$. این مفهوم با نماد $A\subset X$ نشان داده می‌شود.] ثابت کنید A و B باید دقیقاً در یکی از شرایط زیر صدق می کنند:

$$(a)\ \ B=X\subset A;\quad (b)\ \ A\subset B;\quad (c)\ \ B\subset A.$$

[راهنمایی: ابتدا نشان دهید که A و B باید حداقل در یکی از شرایط a، b و c صدق کنند و سپس نشان دهید نمی‌توانند در بیش از یکی از آنها صدق کنند.]

(ii) با استفاده از (i) تمام توپولوژی‌های ممکن روی $X=\{۱,۲,۳,۴\}$ را بنویسید که دقیقاً دارای ۴ عضو باشند.

---

[1] Clopen

[۲] می‌پذیریم که واژه «باز-بسته» یک واژه زیبا نیست، اما استفاده از آن فراگیر شده است.

[3] proper

۳.۱ توپولوژی بسته-متناهی

یک توپولوژی بر روی یک مجموعه معمولا با تعیین مجموعه‌های باز تعریف می‌شود. البته گاهی برای شرح توپولوژی طبیعی‌تر این است که بگوییم کدام مجموعه‌ها بسته هستند. تعریف بعدی مثالی از این نوع را ارائه می‌دهد.

تعریف ۱.۳.۱ فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. توپولوژی τ روی X را **توپولوژی بسته-متناهی**[1] یا **توپولوژی هم‌متناهی**[2] می‌نامند اگر زیرمجموعه‌های بسته X شامل X و تمام زیرمجموعه‌های متناهی X باشد؛ یعنی، مجموعه‌های باز عبارتند از $\emptyset$ و تمام زیرمجموعه‌های X که مکمل آنها متناهی است.

لازم است یکبار دیگر، توپولوژی بودن τ در تعریف ۱.۳.۱ بررسی شود؛ یعنی، τ در شرایط تعریف ۱.۱.۱ صدق می‌کند.

توجه کنید که تعریف ۱.۳.۱ بیان نمی‌کند که هر توپولوژی با دارا بودن خاصیت بسته بودن X و زیرمجموعه‌های متناهی X، توپولوژی بسته-متناهی است. این زیرمجموعه‌ها باید تنها مجموعه‌های بسته باشند. [البته، در توپولوژی گسسته روی هر مجموعه X ، خود X و تمام زیرمجموعه‌های متناهی X بسته هستند، اما سایر زیرمجموعه‌های X هم بسته است.]

در توپولوژی بسته-متناهی همه مجموعه‌های متناهی بسته هستند. مثال بعدی نشان می‌دهد که لزومی ندارد زیرمجموعه‌های نامتناهی باز باشند.

مثال ۲.۳.۱ اگر $\mathbb{N}$ مجموعه تمام اعداد صحیح مثبت باشد، آنگاه مجموعه‌های $\{۱\}$، $\{۵,۶,۷\}$، $\{۲,۴,۶,۸\}$ متناهی و لذا در توپولوژی بسته-متناهی بسته هستند. بنابراین مکمل آنها

$$\{۲,۳,۴,۵,\ldots\},\{۱,۲,۳,۴,۸,۹,۱۰,\ldots\},\{۱,۳,۵,۷,۹,۱۰,۱۱,\ldots\}$$

در توپولوژی بسته-متناهی مجموعه‌های باز هستند. از طرف دیگر، مجموعه اعداد صحیح مثبت زوج بسته نیست چون متناهی نیست، و بنابراین مکمل آن -مجموعه اعداد صحیح مثبت فرد- در توپولوژی بسته-متناهی باز نیست.

بنابراین تمام مجموعه‌های متناهی بسته هستند، ولی همه مجموعه‌های نامتناهی باز نیستند. ■

[1] Finite-closed topology

[2] Cofinite topology

مثال ۳.۳.۱ فرض کنید τ یک توپولوژی متناهی‌ـبسته بر روی مجموعه X باشد. اگر X دارای حداقل سه زیرمجموعه متمایز بازـبسته باشد، ثابت کنید که X متناهی است.

برهان.

می‌دانیم که τ توپولوژی بسته‌ـمتناهی است و سه زیرمجموعه بازـبسته متمایز داریم.
می‌خواهیم ثابت کنیم که X یک مجموعه متناهی است.
بخاطر بیاورید که توپولوژی بسته‌ـمتناهی بدین معنی است که گردایه مجموعه‌های بسته شامل X و تمام زیرمجموعه‌های متناهی X است. همچنین، مجموعه بازـبسته مجموعه‌ای است که هم باز باشد و هم بسته.
می‌دانیم که در هر فضای توپولوژیک حداقل دو مجموعه بازـبسته X و $\emptyset$ وجود دارد. (توضیح ارائه شده بعد از تعریف ۶.۲.۱ را ملاحظه کنید.) ولی فرض شده است که در فضای $(X,\mathcal{T})$ حداقل سه زیرمجموعه بازـبسته وجود دارد. از این فرض نتیجه می‌شود که باید یک مجموعه بازبسته غیر از X و $\emptyset$ وجود داشته باشد. بنابراین نگاه دقیقی به این مجموعه باز بسته سوم خواهیم داشت.

از آنجاییکه توپولوژی $(X,\mathcal{T})$ مذکور دارای سه زیرمجموعه بازـبسته متمایز است، پس یک زیرمجموعه بازـبسته S از X وجود دارد به طوری که $S \neq X$ و $S \neq \emptyset$. چون مجموعه S در توپولوژی $(X,\mathcal{T})$ باز است، از تعریف ۴.۲.۱ نتیجه می‌شود که مکمل آن $X\backslash S$ یک مجموعه بسته است.
بنابراین S و $X\backslash S$ مجموعه‌های بسته‌ای در توپولوژی بسته‌ـمتناهی $\mathcal{T}$ هستند. در نتیجه چون S و $X\backslash S$ برابر X نیستند پس مجموعه‌های متناهی خواهند بود. اما، $X = S \cup (X\backslash S)$؛ یعنی، X اجتماع دو مجموعه متناهی است. در نتیجه X متناهی است. ■

در حال حاضر، سه نوع (اگرچه تعداد زیادی وجود دارد) توپولوژی متمایز می‌شناسیم که می‌توانیم آنها را روی مجموعه‌های نامتناهی تعریف کنیم. این سه نوعِ توپولوژی عبارتند از توپولوژی گسسته، توپولوژی ناگسسته و توپولوژی محدودـبسته. بنابراین همیشه باید در مشخص کردن یک توپولوژی بر روی یک مجموعه دقیق باشیم.
به عنوان مثال، مجموعهٔ $\{n : n \geq ۱۰\}$ در توپولوژی بسته‌ـمتناهی بر روی مجموعه اعداد طبیعی باز است ولی در توپولوژی ناگسسته باز نیست. مجموعه اعداد طبیعی فرد در توپولوژی گسسته بر روی مجموعه اعداد طبیعی باز است اما در توپولوژی بسته‌ـمتناهی باز نیست.
در اینجا چند تعریف ارائه می‌گردد که ممکن است قبلًا دیده باشید.

تعریف ۴.۳.۱ تابع f از مجموعه X به توی مجموعه Y را در نظر بگیرید.

(i) به تابع f **یک به یک**[1] گفته می‌شود اگر برای هر $x_۱, x_۲ \in X$، از $f(x_۱) = f(x_۲)$ نتیجه شود که $x_۱ = x_۲$؛

(ii) به تابع f **پوشا**[2] گفته می‌شود اگر به ازای هر $y \in Y$ یک عضو $x \in X$ وجود داشته باشد که $f(x) = y$؛

(iii) به تابع f **دوسویه**[3] گفته می‌شود اگر یک به یک و پوشا باشد.

[1] One-to-one (injective)
[2] Onto (surjective)
[3] Bijective

تعریف ۵.۳.۱ فرض کنید f تابعی از مجموعه X به توی مجموعه Y باشد. گفته می‌شود تابع f وارون‌پذیر[1] است اگر تابعی مثل g از Y به توی X موجود باشد بطوری که به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم $g(f(x)) = x$ و به ازای هر $y \in Y$، $f(g(y)) = y$. تابع g وارون[2] تابع f نامیده می‌شود.

اثبات گزارهٔ زیر به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

گزاره ۶.۳.۱ تابع f از مجموعه X به توی مجموعه Y را در نظر بگیرید.

(i) تابع f وارون‌پذیر است اگر و فقط اگر دوسویه باشد.

(ii) فرض کنید g_1 و g_2 توابعی از Y به توی X باشد. اگر g_1 و g_2 هر دو وارون تابع f باشند، آنگاه $g_1 = g_2$؛ یعنی، به ازای هر $y \in Y$ داریم $g_1(y) = g_2(y)$.

(iii) فرض کنید g یک تابع از Y به توی X باشد. تابع g وارون تابع f است اگر و فقط اگر f واورن تابع g باشد.

هشدار. اغلب این اشتباه پیش می‌آید که دانشجویان فکر می کنند تابعی یک به یک است که اگر آن تابع یک نقطه را به یک نقطه بنگارد.
تمام توابع یک نقطه را به یک نقطه می‌نگارند. در حقیقت این بخشی از تعریف تابع است.
تابع یک به یک تابعی است که نقاط مختلف را به نقاط مختلف می‌نگارد. ■
حال به یک نماد مهم می‌پردازیم که ممکن است قبلًا آن را ندیده باشید.

تعریف ۷.۳.۱ فرض کنید f تابعی از مجموعه X به توی مجموعه Y باشد. اگر S زیرمجموعه‌ای از Y باشد، مجموعه $f^{-1}(S)$ بصورت زیر تعریف می‌شود

$$f^{-1}(S) = \{x : x \in X \text{ و } f(x) \in S\}.$$

زیرمجموعه $f^{-1}(S)$ از X تصویر وارون[3] S نامیده می‌شود.

توجه داشته باشید وارون تابع $f : X \to Y$ موجود است اگر و فقط اگر f دوسویه باشد. اما تصویر وارون هر زیرمجموعه از Y موجود است حتی اگر f یک به یک یا پوشا نباشد. این موضوع در مثال بعد روشن می‌شود.

مثال ۸.۳.۱ فرض کنید f تابعی از مجموعه اعداد صحیح به خودش با ضابطهٔ $f(z) = |z|$، $z \in Z$ باشد.
تابع f یک به یک نیست، زیرا $f(1) = f(-1)$.
همچنین پوشا نیست، زیرا یک عدد صحیح مانند z وجود ندارد که $f(z) = -1$. بنابراین مطمئناً f دوسویه نیست. پس، براساس گزاره ۶.۳.۱ (i)، f وارون‌پذیر نیست. با این حال، تصویر وارون همواره موجود است. به عنوان مثال،

$$f^{-1}(\{1, 2, 3\}) = \{-1, -2, -3, 1, 2, 3\}$$

$$f^{-1}(\{-5, 3, 5, 7, 9\}) = \{-3, -5, -7, -9, 3, 5, 7, 9\}. \blacksquare$$

[1] Invertible
[2] Inverse function
[3] Inverse image

این بخش را با مثال جالبی به پایان می‌بریم.

مثال ۹.۳.۱ فرض کنید $(Y,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک و X یک مجموعه ناتهی باشد. بعلاوه، تابع f را از مجموعه X به توی مجموعه Y در نظر بگیرید. اگر $\mathcal{T}_1 = \{f^{-1}(S) : S \in \mathcal{T}\}$، ثابت کنید $\mathcal{T}_1$ یک توپولوژی بر روی X است.

برهان.

هدف ما این است که نشان دهیم گردایهٔ مجموعه‌ها، $\mathcal{T}_1$ ، یک توپولوژی بر روی X است؛ یعنی، باید نشان دهیم $\mathcal{T}_1$ در شرط‌های (i)، (ii) و (iii) تعریف ۱.۱.۱ صدق می‌کند.

چون $X = f^{-1}(Y)$ و $Y \in \mathcal{T}$ پس $X \in \mathcal{T}_1$.
چون $\emptyset = f^{-1}(\emptyset)$ و $\emptyset \in \mathcal{T}$ پس $\emptyset \in \mathcal{T}_1$.
بنابراین $\mathcal{T}_1$ در شرط (i) از تعریف ۱.۱.۱ صدق می‌کند.

برای بررسی شرط (ii) از تعریف ۱.۱.۱، فرض کنید $\{A_j : j \in J\}$ گردایهٔ اعضای $\mathcal{T}_1$ با در نظر گرفتن مجموعه اندیس J باشد. باید نشان دهیم که $\bigcup_{j\in J} A_j \in \mathcal{T}_1$. چون $A_j \in \mathcal{T}_1$، از تعریف $\mathcal{T}_1$ نتیجه می‌شود که برای $B_j \in \mathcal{T}$ داریم $A_j = f^{-1}(B_j)$. همچنین $\bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j) = f^{-1}(\bigcup_{j\in J} B_j)$. [تمرین شماره ۱ از بخش ۳.۱ را ببینید.]

حال، چون به ازای هر $j \in J$ داریم $B_j \in \mathcal{T}$ ، و بدلیل توپولوژی بودن $\mathcal{T}$ بر روی Y خواهیم داشت $\bigcup_{j\in J} B_j \in \mathcal{T}$. با استفاده از تعریف $\mathcal{T}_1$ نتیجه می‌گیریم $f^{-1}(\bigcup_{j\in J} B_j) \in \mathcal{T}_1$ ؛ یعنی $\bigcup_{j\in J} A_j \in \mathcal{T}_1$.
بنابراین، $\mathcal{T}_1$ در شرط (ii) از تعریف ۱.۱.۱ صدق می‌کند.

[هشدار. خاطرنشان می‌شود که همهٔ مجموعه‌ها شمارا نیستند. (برای اطلاعات بیشتر در مورد مجموعه‌های شمارا ضمیمهٔ ۱ را ببینید.) بنابراین در اثبات فوق، با فرض اینکه مجموعه‌های $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ در $\mathcal{T}_1$ هستند و نشان دادن اینکه اجتماع آنها $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$ در $\mathcal{T}_1$ است، کافی نیست. در حقیقت، این استدلال فقطنشان می‌دهد که اجتماع تعداد شمارا از مجموعه‌های موجود در $\mathcal{T}_1$ نیز مشمول در آن است، ولی نشان نمی‌دهد که $\mathcal{T}_1$ در شرط (ii) از تعریف ۱.۱.۱ صدق می‌کند. توجه کنید که برای اثبات شرط (ii) باید نشان دهیم که همهٔ اجتماع‌ها اعم از شمارا و ناشمارا از مجموعه‌های $\mathcal{T}_1$ مشمول در آن است.]

در مرحلهٔ آخر، فرض کنید A_1 و A_2 مشمول در $\mathcal{T}_1$ باشند. باید نشان دهیم که $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}_1$.
چون $A_1, A_2 \in \mathcal{T}_1$، پس برای اعضایی مانند $B_1, B_2 \in \mathcal{T}_1$ خواهیم داشت: $A_1 = f^{-1}(B_1)$ و $A_2 = f^{-1}(B_2)$.
$A_1 \cap A_2 = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cap B_2)$. [تمرین شماره ۱ از بخش ۳.۱ را ببینید.]
چون $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}$، داریم $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \in \mathcal{T}_1$. بنابراین $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}_1$ که نشان می‌دهد $\mathcal{T}_1$ در شرط (iii) از تعریف ۱.۱.۱ صدق می‌کند.
لذا در واقع $\mathcal{T}_1$ یک توپولوژی بر روی X است. ■

تمرین‌های ۳.۱

۱. فرض کنید f یک تابع از X به توی Y باشد. در مثال ۹.۳.۱ بیان کردیم که برای هر زیرمجموعه B_j از Y و هر مجموعه اندیس J داریم

$$f^{-1}(\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j) \qquad (1)$$

و

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2). \qquad (2)$$

(الف) ثابت کنید که (۱) درست است.

[راهنمایی. اثبات خود را با در نظر گرفتن یک عضو دلخواه مانند x از مجموعه سمت چپ و نشان دادن اینکه در مجموعه سمت راست است شروع کنید. سپس عکس این را انجام دهید.]

(ب) ثابت کنید (۲) درست است.

(ج) مجموعه‌های معین A_1، A_2، X ، Y و تابع $f : X \to Y$ را پیدا کنید به صورتی که $A_1 \subseteq X$ و $A_2 \subseteq X$ ولی $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$.

۲. آیا توپولوژی ارائه شده در (ii) تمرین شماره ۶ از بخش ۱.۱ توپولوژی بسته-متناهی است؟ (پاسخ خود را توجیه کنید.)

۳. فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ را T_1-فضا می‌گویند اگر هر مجموعه تک‌عضوی $\{x\}$ یک مجموعه بسته در $(X,\mathcal{T})$ باشد. نشان دهید که تنها دو مورد از نه فضای توپولوژیک به شرح زیر یک T_1-فضا هستند. (پاسخ خود را توجیه کنید.)

(i) یک فضای گسسته؛

(ii) یک فضای ناگسسته با حداقل دو نقطه؛

(iii) یک مجموعه نامتناهی با یک توپولوژی محدود-بسته؛

(iv) مثال ۲.۱.۱؛

(v) تمرین شماره ۵ (i) از بخش ۱.۱؛

(vi) تمرین شماره ۵ (ii) از بخش ۱.۱؛

(vii) تمرین شماره ۵ (iii) از بخش ۱.۱؛

(viii) تمرین شماره ۶ (i) از بخش ۱.۱؛

(ix) تمرین شماره ۶ (ii) از بخش ۱.۱.

۴. فرض کنید $\mathcal{T}$ یک توپولوژی بسته-متناهی بر روی مجموعه X باشد. اگر $\mathcal{T}$ همزمان توپولوژی گسسته باشد ثابت کنید که مجموعه X نامتناهی است.

۵. فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ را T_0-فضا می‌گویند اگر به ازای هر دو عضو متمایز a و b در X، مجموعه بازی شامل a ولی نه b، یا مجموعه بازی شامل b ولی نه a وجود داشته باشد.

(i) ثابت کنید که هر T_1ـفضا یک T_0ـفضا است.

(ii) کدامیک از (i)ـ(vi) در تمرین ۳ بالا T_0ـفضا هستند؟(جواب خود را توجیه کنید.)

(iii) یک توپولوژی $\mathcal{T}$ بر روی $X = \{0, 1\}$ را پیدا کنید که $(X,\mathcal{T})$ یک T_0ـفضا باشد ولی T_1ـفضا نباشد. [فضای توپولوژیکی که پیدا می‌کنید **فضای سیرپینسکی**[1] نامیده می‌شود.]

(iv) ثابت کنید که هر یک از فضاهای توپولوژیک ارائه شده در تمرین شماره ۶ از بخش ۱.۱، یک T_0ـفضا است. (توجه کنید که در تمرین ۳ بالا دیدیم که هیچکدام از آنها T_1ـفضا نیستند.)

۶. فرض کنید X یک مجموعه نامتناهی باشد. یک توپولوژی را **توپولوژی شمارا-بسته**[2] می‌گویند هرگاه مجموعه‌های بسته آن عبارت باشند از X و تمام زیرمجموعه‌های شمارای X. ثابت کنید که در حقیقت این یک توپولوژی است.

۷. فرض کنید τ_1 و τ_2 دو توپولوژی بر روی X باشند. گزاره‌های زیر را ثابت کنید.

(i) اگر توپولوژی τ_3 به صورت $\tau_3 = \tau_1 \cup \tau_2$ تعریف شود، آنگاه τ_3 لزوماً یک توپولوژی بر روی X نیست. (جواب خود را با یک مثال معین توجیه کنید.)

(ii) اگر τ_4 بصورت $\tau_4 = \tau_1 \cap \tau_2$ تعریف شود، آنگاه τ_4 یک توپولوژی بر روی X است. (τ_4 را **اشتراک** توپولوژی‌های τ_1 و τ_2 می‌نامند.)

(iii) اگر (X, τ_1) و (X, τ_2) T_1ـفضا باشند، آنگاه (X, τ_4) نیز یک T_1ـفضا است.

(iv) اگر (X, τ_1) و (X, τ_2) T_0ـفضا باشند، آنگاه (X, τ_4) لزوما یک T_oـفضا نیست. (پاسخ خود را با یافتن یک مثال معین توجیه کنید.)

(v) اگر τ_1 ، τ_2 ، ... ، τ_n توپولوژی بر روی X باشند، آنگاه $\tau = \bigcap_{i=1}^{n} \tau_i$ یک توپولوژی بر روی X است.

(vi) اگر برای مجموعه اندیس I، τ_i ، $i \in I$ یک توپولوژی بر روی X باشد، آنگاه ثابت کنید که $\tau = \bigcap_{i\in I} \tau_i$ یک توپولوژی بر روی X است.

۴.۱ خلاصه

در این فصل مفهوم اساسی فضای توپولوژیک معرفی شد. بصورت مثال فضاهای متناهی مختلفی مثل فضاهای گسسته، فضاهای ناگسسته و فضاهای با توپولوژی بسته-متناهی را دیدیم. با در نظر گرفتن کاربرد آنها، هیچکدام از این فضاها اهمیت خاصی ندارند. بهرحال، در تمرین شماره ۸ از بخش ۳.۴ اشاره شده است که هر فضای توپولوژیک نامتناهی «شامل» یک فضای توپولوژیک نامتناهی از این پنج گروه است: توپولوژی ناگسسته، توپولوژی گسسته، توپولوژی محدود-بسته، توپولوژی قسمت ابتدایی یا توپولوژی قسمت پایانی از تمرین شماره ۶ از بخش ۱.۱ است. در فصل بعد، توپولوژی بسیار مهم اقلیدسی معرفی خواهد شد.

تاکنون با اصطلاح‌های «مجموعه‌های باز» و «مجموعه‌های بسته» آشنا شدیم و گفتیم که ممکن است این اسامی گمراه کننده باشند. مجموعه‌ها می‌توانند هم باز و هم بسته، نه باز نه بسته، باز ولی نه بسته، یا بسته ولی

[1] Sierpinski space

[2] Countable-closed topology

نه باز باشند. مهم است که به خاطر بسپارید نمی‌توانید با اثبات اینکه یک مجموعه بسته نیست ثابت کنید آن مجموعه باز است.

در کنار ارایه‌ی تعریف‌های توپولوژی، فضای توپولوژیک، مجموعه باز، و مجموعه بسته، مهمترین موضوعی که پوشش داده شد نحوهٔ نوشتن اثبات‌ها بود.

در آغاز این فصل به اهمیت یادگیری نوشتن اثبات‌ها اشاره شد. در مثال ۸.۱.۱، گزارهٔ ۹.۱.۱ و مثال ۳.۳.۱ دیدیم که چگونه در طول اثبات فکر کنیم. بهتر است مهارت خود را در نوشتن اثبات‌ها بالا ببرید. مساله‌های خوب برای این منظور عبارتند از: تمرین شماره ۸ از بخش ۱.۱، تمرین شماره ۲ و ۴ از بخش ۲.۱ و تمرین شماره ۱ و ۴ از بخش ۳.۱.

برای بعضی از دانشجویان، مفهوم توپولوژی به عنوان « مجموعه‌ای از مجموعه‌ها» گیج کننده است. برای امتحان درک خود تمرین شماره ۳ از بخش ۱.۱ را انجام دهید.

برخی تمرین‌ها شامل مفهوم‌های T_0ـفضا و T_1ـفضا بودند که بعداً به طور رسمی تعریف خواهند شد. به اینها **خواص جدایی**[1] می‌گویند.

سرانجام اهمیت تصویرهای وارون تاکید شدند. این تصویرها را در مثال ۹.۳.۱ و تمرین شماره ۱ بخش ۳.۱ مورد بحث قرار گرفتند. تعریف نگاشت پیوسته بر تصویرهای وارون استوار است.

[1] Separation properties

فصل ۲

توپولوژی اقلیدسی

مقدمه

معمولا در یک فیلم یا رمان چند شخصیت اصلی وجود دارد که موضوع اصلی حول آنها می‌چرخد. در داستان توپولوژی، توپولوژی اقلیدسی روی مجموعه اعداد حقیقی چنین شخصیت محوری را دارد. در حقیقت این موضوع چنان مثال خوبی است که بارها برای الهام گرفتن و بررسی بیشتر بدان مراجعه خواهیم کرد.

فرض کنید $\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی باشد. درفصل ۱ سه نوع مختلف توپولوژی عبارت از توپولوژی گسسته، توپولوژی ناگسسته و توپولوژی بسته-متناهی ارایه شد که می‌توان روی هر مجموعه تعریف کرد. بنابراین می‌توان این توپولوژی‌ها را روی $\mathbb{R}$ نیز تعریف کرد. شش توپولوژی دیگر در تمرین های شماره ۵ و ۹ از بخش ۱.۱ تعریف شدند. در این فصل، یک توپولوژی مهم‌تر و جالب‌تر بنام توپولوژی اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}$ تعریف خواهد شد.

تجزیه و تحلیل توپولوژی اقلیدسی ما را به مفهوم «پایهٔ یک توپولوژی» می‌کشاند. در جبر خطی یاد گرفتیم که هر فضای برداری پایه‌ای دارد و هر بردار در آن به صورت یک ترکیب خطی از اعضای این پایه است. به همین طریق، در هر فضای توپولوژیک می‌توان هر مجموعه باز را به صورت یک اجتماع از اعضای پایه بیان کرد. در حقیقت، یک مجموعه باز است اگر و فقط اگر بتوان آن را بصورت یک اجتماع از اعضای پایه نوشت.

۱.۲ توپولوژی اقلیدسی بر روی اعداد حقیقی

تعریف ۱.۱.۲ زیرمجموعه S از $\mathbb{R}$ در **توپولوژی اقلیدسی**[1] روی $\mathbb{R}$ باز است اگر در شرط زیر صدق کند:
(*) به ازای هر $x \in S$، اعضایی مانند a, b، $a < b$ در $\mathbb{R}$ وجود داشته باشند بطوری که $x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}$.

نمادگذاری. هرگاه به فضای توپولوژیک $\mathbb{R}$ بدون مشخص کردن توپولوژی ارجاع دهیم، منظور ما $\mathbb{R}$ با توپولوژی اقلیدسی است.

[1] Euclidean topology

ملاحظه ۲.۱.۲ (i) «توپولوژی اقلیدسی» τ یک توپولوژی است.

برهان.

هدف این است که نشان دهیم τ در شرایط (i)، (ii) و (iii) از تعریف ۱.۱.۱ صدق می‌کند.
تنها اطلاعات ما این است که مجموعه‌ای در τ است اگر و فقط اگر دارای خاصیت (*) باشد.

در ابتدا باید نشان دهیم $\mathbb{R} \in \tau$. فرض کنید $x \in \mathbb{R}$. اگر قرار دهیم $a = x - ۱$ و $b = x + ۱$، آنگاه $x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}$؛ یعنی، $\mathbb{R}$ دارای خاصیت (*) است پس $\mathbb{R} \in \tau$. ثانیا، $\emptyset \in \tau$ چون بنابر فرض، $\emptyset$ دارای خاصیت (*) است.

اینک فرض کنید $\{A_j : j \in J\}$ به ازای یک مجموعه اندیس‌گذار J، یک خانواده از اعضای τ باشد. باید نشان دهیم که $\bigcup_{j\in J} A_j \in \tau$؛ یعنی، باید نشان دهیم که $\bigcup_{j\in J} A_j$ دارای خاصیت (*) است. فرض کنید $x \in \bigcup_{j\in J} A_j$. پس به ازای برخی $k \in J$ داریم $x \in A_k$. چون $A_k \in \tau$، اعدادی مانند a و b، $a < b$ در $\mathbb{R}$ وجود دارد که $x \in (a, b) \subseteq A_k$. چون $A_k \subseteq \bigcup_{j\in J} A_j$، $k \in J$، و بنابراین $x \in (a, b) \subseteq \bigcup_{j\in J} A_j$. پس $\bigcup_{j\in J} A_j$ در خاصیت (*) صدق می کند و بنابراین عضو τ است.

سرانجام، فرض کنید $A_۱$ و $A_۲$ در τ باشند. باید ثابت کنیم که $A_۱ \cap A_۲ \in \tau$. بنابراین فرض کنید $y \in A_۱ \cap A_۲$. پس $y \in A_۱$. چون $A_۱ \in \tau$، پس اعدادی مانند a و b، $a < b$ در $\mathbb{R}$ وجود دارد بطوری که $y \in (a, b) \subseteq A_۱$. همین طور $y \in A_۲ \in \tau$، پس اعدادی مانند c و d، $c < d$ در $\mathbb{R}$ وجود دارد بطوری که $y \in (c, d) \subseteq A_۱$. فرض کنید $e = \max\{a, c\}$ و $f = \min\{b, d\}$. بسادگی نتیجه می‌شود که $e < y < f$، و لذا $y \in (e, f)$. چون $(e, f) \subseteq (a, b) \subseteq A_۱$ و $(e, f) \subseteq (c, d) \subseteq A_۲$، نتیجه می‌گیریم که $y \in (e, f) \subseteq A_۱ \cap A_۲$. بنابراین $A_۱ \cap A_۲$ در خاصیت (*) صدق می‌کند و در نتیجه در τ قرار دارد.

بدین ترتیب، در واقع τ یک توپولوژی بر روی $\mathbb{R}$ است. ■

اینک به شرح مجموعه‌های باز و مجموعه‌های بسته در توپولوژی اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}$ می‌پردازیم. بخصوص، خواهیم دید که بازه‌های باز در این توپولوژی واقعا مجموعه‌های باز، و بازه‌های بسته، مجموعه‌های بسته هستند.

(ii) فرض کنید $r, s \in \mathbb{R}$ که $r < s$. در توپولوژی اقلیدسی τ روی $\mathbb{R}$، بازه باز (r, s) واقعا عضو τ و بنابراین مجموعه باز است.

برهان.

بازه (r, s) داده شده است.
باید نشان دهیم که (r, s) در توپولوژی اقلیدسی یک مجموعه باز است؛ یعنی، باید نشان دهیم (r, s) در خاصیت (*) از تعریف ۱.۱.۲ صدق می‌کند.
بنابراین با فرض $x \in (r, s)$ شروع می‌کنیم. می‌خواهیم اعداد a و b، $a < b$ را در $\mathbb{R}$ پیدا کنیم که $x \in (a, b) \subseteq (r, s)$.

فرض کنید $x \in (r, s)$. قرار دهید $a = r$ و $b = s$. پس به روشنی داریم

$$x \in (a, b) \subseteq (r, s).$$

در نتیجه (r, s) یک مجموعه باز در توپولوژی اقلیدسی است. ■

(iii) به ازای هر عدد حقیقی r بازه‌های باز (r,∞) و $(-\infty,r)$ ، مجموعه‌های باز در $\mathbb{R}$ هستند.

برهان.

نخست نشان می‌دهیم که (r,∞) یک مجموعه باز است؛ یعنی، این مجموعه دارای خاصیت $(*)$ است.

برای نشان دادن درستی این حکم، فرض کنید $x \in (r,\infty)$ و $a,b \in \mathbb{R}$ را چنان پیدا کنید که

$$x \in (a,b) \subseteq (r,\infty).$$

فرض کنید $x \in (r,\infty)$. قرار دهید $a = r$ و $b = x + ۱$. در اینصورت، $x \in (a,b) \subseteq (r,\infty)$ که در نتیجه $(r,\infty) \in \mathcal{T}$. با استدلال مشابه نشان داده می‌شود که $(-\infty,r)$ یک مجموعه باز در $\mathbb{R}$ است. ■

(iv) توجه داشتن به این نکته مهم است که در عین حال که هر بازه باز یک مجموعه باز در $\mathbb{R}$ است ولی عکس آن درست نیست. همه مجموعه‌های باز در $\mathbb{R}$ بازه نیستند. بعنوان مثال، مجموعه $(۱,۳) \cup (۵,۶)$ یک مجموعه باز در $\mathbb{R}$ است ولی یک بازه باز نیست. حتی مجموعه $\cup_{n=۱}^{\infty}(۲n, ۲n+۱)$ یک مجموعه باز در $\mathbb{R}$ است. ■

(v) به ازای هر c و d، $c < d$، در $\mathbb{R}$ ، بازه بسته $[c,d]$ یک مجموعه باز در $\mathbb{R}$ نیست.

برهان.

باید نشان دهیم که $[c,d]$ در خاصیت $(*)$ صدق نمی‌کند.

برای این منظور، کافی است یک مقدار مانند x پیدا کنیم که اعدادی مانند a و b با خاصیت $(*)$ وجود نداشته باشد.

بروشنی c و d دو نقطه بسیار ویژه در بازه $[c,d]$ هستند. بنابراین فرض می‌کنیم $x = c$ و نشان می‌دهیم a و b با خاصیت مذکور وجود ندارد.

برای اثبات از روش برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم a و b با خاصیت مذکور وجود دارد و نشان می‌دهیم که این فرض به یک تناقض منتهی خواهد شد، یعنی، چیزی که دروغ است. در نتیجه فرض دروغ بوده است! بنابراین چنین a و b وجود ندارد. بدین خاطر، $[c,d]$ دارای خاصیت $(*)$ نیست و در نتیجه یک مجموعه باز نیست.

مشاهده کنید که $c \in [c,d]$. فرض کنید a و b، $a < b$ در $\mathbb{R}$ وجود دارد که $c \in (a,b) \subseteq [c,d]$. پس از $c \in (a,b)$ نتیجه می‌شود $a < c < b$ و لذا $a < \frac{c+a}{۲} < c < b$. پس $\frac{c+a}{۲} \in (a,b)$ و $\frac{c+a}{۲} \notin [c,d]$. در نتیجه، $(a,b) \nsubseteq [c,d]$، که یک تناقض است. پس چنین a و b که $c \in (a,b) \subseteq [c,d]$ وجود ندارد. بنابراین $[c,d]$ در خاصیت $(*)$ صدق نمی‌کند و در نتیجه $[c,d] \notin \mathcal{T}$. ■

(vi) برای هر a و b، $a < b$، در $\mathbb{R}$، بازه بسته $[a,b]$ یک مجموعه بسته در توپولوژی اقلیدسی روی $\mathbb{R}$ است.

برهان. برای اینکه ببینیم این مجموعه بسته است فقط باید مشاهده کرد که مکمل آن، $(-\infty,a) \cup (b,\infty)$، که اجتماع دو مجموعه باز است، یک مجموعه باز است. ■

(vii) هر مجموعه تک‌عضوی $\{a\}$ در $\mathbb{R}$ بسته است.

برهان. مکمل $\{a\}$ اجتماع دو مجموعه باز $(-\infty, a)$ و (a, ∞) است که یک مجموعه باز است. بنابراین $\{a\}$ در $\mathbb{R}$ یک مجموعه بسته است. [با در نظر گرفتن تمرین شماره ۳ از بخش ۳.۱ ، $\mathbb{R}$ یک T_1ـفضا است.] ■

(viii) توجه داشته باشید که با قرار دادن $a \leq b$ بجای $a < b$ می‌توانستیم (vii) را در (vi) بگنجانیم. مجموعه تک‌عضوی $\{a\}$ حالت تباهیده بازه $[a, b]$ است. ■

(ix) مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ [۲] یک مجموعه بسته در $\mathbb{R}$ است.

برهان. مکمل $\mathbb{Z}$ عبارت است از اجتماع $\bigcup_{n=1}^{\infty}(n, n+1)$ از زیرمجموعه‌های باز $(n, n+1)$ از $\mathbb{R}$ و در نتیجه یک مجموعه باز است. بنابراین $\mathbb{Z}$ یک مجموعه بسته در $\mathbb{R}$ است. ■

(x) مجموعه اعداد گویا[۳]، نه یک زیرمجموعه باز در $\mathbb{R}$ است و نه یک زیرمجموعه بسته.

برهان.

نشان می‌دهیم که $\mathbb{Q}$ دارای خاصیت $(*)$ نیست و بنابراین یک مجموعه باز نیست.
برای این منظور کافی است نشان دهیم که $\mathbb{Q}$ شامل هیچ بازه باز (a, b)، $a < b$، نیست.

فرض کنید $(a, b) \subseteq \mathbb{Q}$ که در آن a و b، $a < b$، در $\mathbb{R}$ هستند. چون بین هر دو عدد حقیقی متمایز یک عدد گنگ وجود دارد (آیا می‌توانید ثابت کنید؟) بنابراین عددی مانند $c \in (a, b)$ وجود دارد که $c \notin \mathbb{Q}$، که با $(a, b) \subseteq \mathbb{Q}$ متناقض است. پس $\mathbb{Q}$ شامل هیچ بازه باز (a, b) نیست و بنابراین یک مجموعه باز نیست.

برای اثبات اینکه $\mathbb{Q}$ بسته نیست کافی است نشان دهیم که $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ یک مجموعه باز نیست. با در نظر گرفتن اینکه بین هر دو عدد حقیقی متمایز یک عدد گویا وجود دارد متوجه می‌شویم $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ شامل هیچ بازه باز (a, b)، $a < b$ ، نیست. پس $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ یک مجموعه باز در $\mathbb{R}$ نیست و بنابراین $\mathbb{Q}$ یک مجموعه بسته در $\mathbb{R}$ نیست. ■

(xi) در فصل ۳ ثابت خواهیم کرد که تنها زیرمجموعه‌های باز-بسته $\mathbb{R}$، زیرمجموعه‌های بدیهی $\mathbb{R}$ و $\emptyset$ هستند. ■

تمرین‌های ۱.۲

۱. ثابت کنید برای $a, b \in \mathbb{R}$، $a < b$، هیچکدام از بازه‌های $[a, b)$ و $(a, b]$ زیرمجموعه باز $\mathbb{R}$ نیستند. همچنین نشان دهید که هیچکدام از آنها زیرمجموعه بسته $\mathbb{R}$ نیستند.

۲. ثابت کنید که مجموعه‌های $[a, \infty)$ و $(-\infty, a]$ زیرمجموعه‌های بسته $\mathbb{R}$ هستند.

۳. با مثال نشان دهید که اجتماع تعداد نامتناهی از زیرمجموعه‌های بسته $\mathbb{R}$ لزوماً یک مجموعه بسته نیست.

[2] Integer numbers

[3] Rational numbers

۴. هر یک از گزاره‌های زیر را ثابت کنید:

(i) مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ یک زیرمجموعه باز $\mathbb{R}$ نیست.

(ii) مجموعه اعداد اول S یک زیرمجموعه بسته $\mathbb{R}$ است ولی یک زیرمجموعه باز $\mathbb{R}$ نیست.

(iii) مجموعه اعداد گنگ P [۴] نه یک زیرمجموعه باز $\mathbb{R}$ است و نه یک زیرمجموعه بسته $\mathbb{R}$.

۵. اگر F یک زیرمجموعه ناتهی و متناهی $\mathbb{R}$ باشد، نشان دهید که F در $\mathbb{R}$ بسته است ولی F در $\mathbb{R}$ باز نیست.

۶. اگر F یک زیرمجموعه ناتهی و شمارا از $\mathbb{R}$ باشد، ثابت کنید F یک مجموعه باز نیست.

۷. (i) فرض کنید $S = \{۰, ۱, ۱/۲, ۱/۳, ۱/۴, ۱/۵, \ldots, ۱/n, \ldots\}$. ثابت کنید که S در توپولوژی اقلیدسی روی $\mathbb{R}$ بسته است.

(ii) آیا مجموعه $T = \{۱, ۱/۲, ۱/۳, ۱/۴, ۱/۵, \ldots, ۱/n, \ldots\}$ در $\mathbb{R}$ بسته است؟

(iii) آیا مجموعه $\{\sqrt{۲}, ۲\sqrt{۲}, ۳\sqrt{۲}, \ldots, n\sqrt{۲}, \ldots\}$ در $\mathbb{R}$ بسته است؟

۸. (i) فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد. یک زیرمجموعه S از X را یک F_σـمجموعه[۵] می‌گویند اگر بصورت اجتماع یک تعداد شمارا از مجموعه‌های بسته باشد. ثابت کنید که تمام بازه‌های باز (a,b) و همه بازه‌های بسته $[a,b]$، F_σـمجموعه در $\mathbb{R}$ هستند.

(ii) فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد. زیرمجموعه T از X را یک G_σـمجموعه[۶] نامیده می‌شود اگر بصورت اشتراک یک تعداد شمارا از مجموعه‌های بسته باشد. ثابت کنید که تمام بازه‌های باز (a,b) و همه بازه های بسته $[a,b]$، G_σـمجموعه در $\mathbb{R}$ هستند.

(iii) ثابت کنید که مجموعه اعداد گویا، $\mathbb{Q}$، یک F_σـمجموعه در $\mathbb{R}$ است. (در تمرین شماره ۳ از بخش ۵.۶ ثابت خواهیم کرد که $\mathbb{Q}$ یک G_σـمجموعه در $\mathbb{R}$ نیست.)

(iv) نشان دهید که مکمل یک F_σـمجموعه، یک G_σـمجموعه است و مکمل یک G_σـمجموعه یک F_σـمجموعه است.

---

[4] Irrational numbers

[5] F_σ-set

[6] G_σ-set

۲.۲ پایه برای یک توپولوژی

ملاحظه ۲.۱.۲ به ما اجازه می‌دهد که توپولوژی اقلیدسی روی $\mathbb{R}$ را به سبک بسیار مناسب‌تر بیان کنیم. برای این منظور، مفهوم یک پایه برای یک توپولوژی را بیان می‌کنیم.

گزاره ۱.۲.۲ یک زیرمجموعه S از $\mathbb{R}$ باز است اگر و فقط اگر بصورت اجتماع بازه‌های باز باشد.

برهان.

از ما خواسته شده است که ثابت کنیم S باز است اگر و تنها اگر بصورت یک اجتماع از بازه‌های باز باشد؛ یعنی، باید نشان دهیم که

(i) اگر S بصورت یک اجتماع از بازه‌های باز باشد، آنگاه یک مجموعه باز است، و

(ii)اگر S یک مجموعه باز باشد، آنگاه بصورت اجتماعی از بازه‌های باز است.

فرض کنید S یک اجتماع از بازه‌های باز باشد؛ یعنی، بازه‌های باز (a_j, b_j) که j به یک مجموعه اندیس J متعلق است وجود دارد که $S = \bigcup_{j\in J}(a_j, b_j)$. بنابر ملاحظه ۲.۱.۲ (ii)، هر بازه باز (a_j, b_j) یک مجموعه باز است. از اینرو، S یک اجتماع از مجموعه‌های باز و بنابراین یک مجموعه باز است.

برعکس، فرض کنید S یک مجموعه باز در $\mathbb{R}$ باشد. پس به ازای هر $x \in S$، یک بازه باز $I_x = (a, b)$ موجود است بطوری که $x \in I_x \subseteq S$. حال ادعا می‌کنیم که $S = \bigcup_{x\in S} I_x$.

حال باید ثابت کنیم که دو مجموعه S و $\bigcup_{x\in S} I_x$ باهم برابر هستند. با اثبات

(i) اگر $y \in S$، آنگاه $y \in \bigcup_{x\in S} I_x$، و

(ii)اگر $z \in \bigcup_{x\in S} I_x$، آنگاه $z \in S$.

نشان می‌دهیم که این مجموعه‌ها برابرند.

[توجه کنید که (i) با $S \subseteq \bigcup_{x\in S} I_x$ معادل است در صورتی که (ii) با $\bigcup_{x\in S} I_x \subseteq S$ معادل است.]

در ابتدا فرض کنید $y \in S$. پس $y \in I_y$. بنابراین $y \in \bigcup_{x\in S} I_x$ که همان حکم مورد نظر است. سپس، فرض کنید $z \in \bigcup_{x\in S} I_x$. در اینصورت به ازای عددی مانند $t \in S$ داریم $z \in I_t$. چون هر $I_x \subseteq S$، ملاحظه می‌کنیم که $I_t \subseteq S$ و بنابراین $z \in S$. پس $S = \bigcup_{x\in S} I_x$، و بر این اساس S بصورت یک اجتماع از بازه‌های باز است که همان حکم مورد نظر است. ■

گزاره بالا بیان می‌کند که برای توصیف توپولوژی $\mathbb{R}$ کافی است بگوییم تمام بازه‌های (a, b) مجموعه‌های باز هستند و هر مجموعه باز دیگر بصورت اجتماعی از این مجموعه‌های باز هستند. این مطلب ما را به تعریف زیر هدایت می کند.

تعریف ۲.۲.۲ فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد. یک گردایه $\mathcal{B}$ از زیرمجموعه‌های باز از X را یک پایه[۷] برای توپولوژی $\mathcal{T}$ می‌نامند اگر هر مجموعه باز بصورت اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}$ باشد.

بنابراین $\mathcal{B}$ توپولوژی $\mathcal{T}$ را با مفهوم زیر «تولید می‌کند»: اگر به ما گفته شود چه مجموعه‌هایی عضو $\mathcal{B}$ هستند با استفاده از آن بتوانیم اعضای $\mathcal{T}$ را معین کنیم- آنها فقط مجموعه‌هایی هستند که اجتماع اعضای $\mathcal{B}$ می‌باشند.

[7] Basis

مثال ۳.۲.۲ فرض کنید $\mathcal{B} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$. بنابر گزاره ۱.۲.۲، $\mathcal{B}$ یک پایه برای توپولوژی اقلیدسی روی $\mathbb{R}$ است. ■

مثال ۴.۲.۲ فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای گسسته و $\mathcal{B}$ خانواده همه زیرمجموعه‌های تک‌عضوی X باشد؛ یعنی، $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$. در اینصورت بنابر گزاره ۹.۱.۱، $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای $\mathcal{T}$ است. ■

مثال ۵.۲.۲ فرض کنید $X = \{a,b,c,d,e,f\}$ و

$$\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e,f\}\}.$$

بنابراین $\mathcal{B} = \{\{a\}, \{c,d\}, \{b,c,d,e,f\}\}$ یک پایه برای $\mathcal{T}_1$ است؛ زیرا $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_1$ و هر عضو $\mathcal{T}_1$ به صورت اجتماع اعضای $\mathcal{B}$ قابل ارائه است. (مشاهده کنید که $\emptyset$ اجتماع تهی از اعضای $\mathcal{B}$ است.)

توجه کنید که خود $\mathcal{T}_1$ یک پایه برای خودش است. ■

ملاحظه ۶.۲.۲ توجه کنید که اگر $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد آنگاه $\mathcal{B} = \mathcal{T}$ یک پایه برای توپولوژی $\mathcal{T}$ است. بنابراین، بعنوان مثال، مجموعه تمام زیرمجموعه‌های X برای توپولوژی گسسته بر روی X یک پایه است.

بنابراین، می‌بینیم که ممکن است برای یک توپولوژی پایه‌های مختلف بسیاری وجود داشته باشد. در حقیقت اگر $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای یک توپولوژی $\mathcal{T}$ روی یک مجموعه X باشد و $\mathcal{B}_1$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد که داشته باشیم $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{T}$ ، آنگاه $\mathcal{B}_1$ پایه‌ای برای $\mathcal{T}$ است. [ثابت کنید.] ■

همانطور که در بالا اشاره شد مفهوم «پایه برای یک توپولوژی» به ما اجازه می‌دهد توپولوژی‌ها را تعریف کنیم. البته، مثال زیر نشان می‌دهد که در این مورد باید دقت کنیم.

مثال ۷.۲.۲ فرض کنید $X = \{a,b,c\}$ و $\mathcal{B} = \{\{a\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}\}$. پس $\mathcal{B}$ برای هیچ توپولوژی تعریف شده بر روی X یک پایه نیست. زیرا فرض کنید $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای یک توپولوژی $\mathcal{T}$ باشد. پس، $\mathcal{T}$ شامل همه اجتماع‌های مجموعه‌های موجود در $\mathcal{B}$ است؛ یعنی،

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a,c\}, \{a,b\}, \{b,c\}\}.$$

(یکبار دیگر از این حقیقت استفاده کردیم که $\emptyset$ اجتماع تهی از اعضای $\mathcal{B}$ است و بنابراین $\emptyset \in \mathcal{T}$.)

البته، $\mathcal{T}$ یک توپولوژی نیست زیرا $\{a,b\} \cap \{b,c\} = \{b\}$ عضو $\mathcal{T}$ نیست و بنابراین $\mathcal{T}$ دارای خاصیت *(iii)* از تعریف ۱.۱.۱ نیست. این یک تناقض است، و لذا فرض ما دروغ است.

پس $\mathcal{B}$ برای هیچ توپولوژی بر روی X یک پایه نیست. ■

حال می‌توانیم بپرسیم اگر $\mathcal{B}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد، $\mathcal{B}$ تحت چه شرایطی یک پایه برای یک توپولوژی است؟ گزاره ۸.۲.۲ به این سوال پاسخ می‌دهد.

گزاره ۸.۲.۲ فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و $\mathcal{B}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد. پس $\mathcal{B}$ برای یک توپولوژی بر روی X یک پایه است اگر و فقط اگر $\mathcal{B}$ دارای خاصیت‌های زیر باشد:

(الف) $X = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$، و

(ب) به ازای هر $B_۱, B_۲ \in \mathcal{B}$، مجموعه $B_۱ \cap B_۲$ اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}$ باشد.

برهان. اگر $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای توپولوژی τ باشد آنگاه τ باید دارای خواص (i)، (ii) و (iii) از تعریف ۱.۱.۱ باشد. بخصوص، X باید مجموعه باز باشد و اشتراک هر دو مجموعه باز باید یک مجموعه باز باشد. چون مجموعه های باز فقط بصورت اجتماع‌های اعضای $\mathcal{B}$ است، پس (الف) و (ب) برقرارند.

برعکس، فرض کنید $\mathcal{B}$ خواص (الف) و (ب) را دارد و τ گردایه همه زیرمجموعه‌های X باشد که بصورت اجتماع‌های اعضای $\mathcal{B}$ است. نشان می‌دهیم که τ یک توپولوژی بر روی X است. (اگر این درست باشد آنگاه بوضوح $\mathcal{B}$ یک پایه برای توپولوژی τ است و گزاره درست است.)

از (الف) نتیجه می‌شود $X = \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$ ولذا $X \in \tau$. توجه کنید که $\emptyset$ یک اجتماع تهی از اعضای $\mathcal{B}$ است و لذا $\emptyset \in \tau$. بنابراین می‌بینیم که τ دارای خاصیت (i) از تعریف ۱.۱.۱ است.

حال فرض کنید $\{T_j\}$ خانواده‌ای از اعضای τ باشد. پس هر T_j بصورت اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}$ است. پس اجتماع همه T_j ها نیز اجتماع اعضای $\mathcal{B}$ است و بنابراین در τ قرار دارند. از اینرو τ در شرط (ii) از تعریف ۱.۱.۱ صدق می کند.

در پایان، فرض کنید C و D در τ باشند. باید ثابت کنیم $C \cap D \in \tau$. اما، برای یک مجموعه اندیس‌گذار K و مجموعه‌های $B_k \in \mathcal{B}$ داریم $C = \bigcup_{k\in K} B_k$. هم‌چنین برای یک مجموعه‌اندیس‌گذار J و $B_j \in \mathcal{B}$ داریم $D = \bigcup_{j\in J} B_j$. بنابراین

$$C \cup D = (\bigcup_{k\in K} B_k) \bigcap (\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{k\in K, j\in J} (B_k \cap B_j).$$

شما باید بررسی کنید که هر دو عبارت برای $C \cap D$ واقعا معادلند.
در حالت متناهی احکامی مشابه زیر را خواهیم داشت

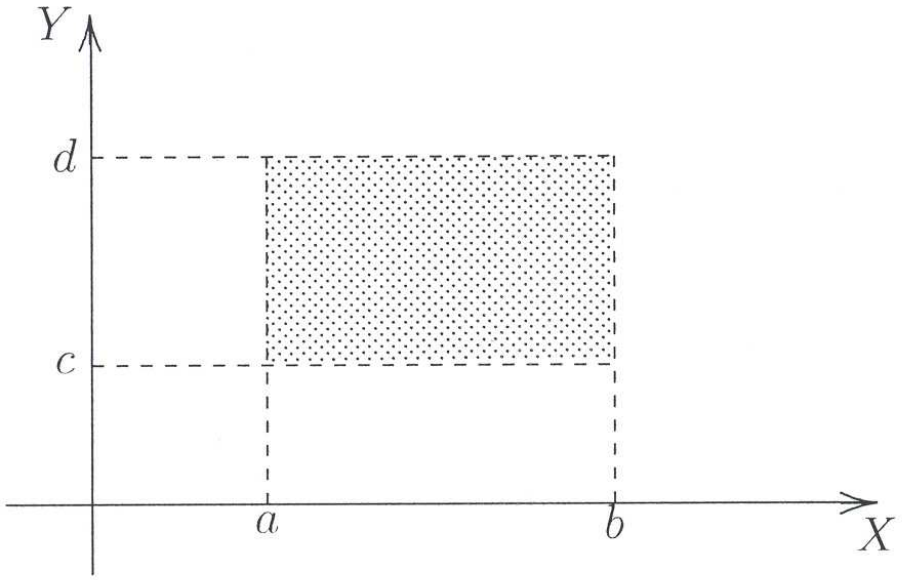
$$(B_۱ \cup B_۲) \cap (B_۳ \cup B_۴) = (B_۱ \cap B_۳) \cup (B_۱ \cap B_۴) \cup (B_۲ \cap B_۳) \cup (B_۲ \cap B_۴).$$

بنابر فرض (ب)، هر $B_k \cap B_j$ بصورت یک اجتماع از اعضای $\mathcal{B}$ است و در نتیجه $C \cap D$ اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}$ است. پس $C \cap D \in \tau$. پس τ دارای خاصیت (iii) از تعریف ۱.۱.۱ است. بنابراین τ واقعا یک توپولوژی است و $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای این توپولوژی است که همان حکم می‌باشد. ■

گزاره ۸.۲.۲ یک نتیجه بسیار مفید است. این گزاره به ما اجازه می‌دهد که توپولوژی‌ها را فقط با نوشتن یک پایه مشخص یا تعریف کنیم. اغلب این روش بهتر از توصیف همه مجموعه‌های باز است.

حال با استفاده از این گزاره یک توپولوژی را بر روی صفحه تعریف می‌کنیم که به «توپولوژی اقلیدسی» معروف است.

مثال ۹.۲.۲ فرض کنید $\mathcal{B}$ گردایه‌ی همه $\{\langle x,y\rangle : \langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^۲, a<x<b, c<y<d\}$ «مستطیل‌های باز» در صفحه باشد که هر ضلع آن موازی محور X یا محور Y است.



پس $\mathcal{B}$ یک پایه برای یک توپولوژی بر روی صفحه است. این توپولوژی را، توپولوژی اقلیدسی می‌نامند.

هرگاه از نماد $\mathbb{R}^۲$ استفاده می‌کنیم منظور ما صفحه است، و اگر به $\mathbb{R}^۲$ بعنوان یک فضای توپولوژیکی نام می‌بریم بدون اینکه به صراحت بگوییم چه توپولوژی است، منظور ما صفحه با توپولوژی اقلیدسی است.

برای مشاهده اینکه $\mathcal{B}$ واقعا یک پایه برای یک توپولوژی است، ملاحظه می‌کنید که (i) صفحه عبارت است از اجتماع تمام مستطیل‌های باز، و (ii) اشتراک هر دو مستطیل، یک مستطیل است. [منظور از «مستطیل» شکلی است که اضلاع آن با محورهای مختصات موازی است.] پس شرایط گزاره ۸.۲.۲ برقرار است و در نتیجه $\mathcal{B}$ یک پایه برای یک توپولوژی است. ■

ملاحظه ۱۰.۲.۲ با تعمیم مثال ۹.۲.۲ می‌بینیم که چگونه برای هر $n>۲$ یک توپولوژی را بر روی

$$\mathbb{R}^n = \{\langle x_۱, x_۲, \ldots x_n\rangle : x_i \in \mathbb{R}, i = ۱, \ldots, n\}$$

تعریف کنیم. مجموعه $\mathcal{B}$ را برابر گردایه تمام زیرمجموعه‌ها به شکل

$$\{\langle x_۱, x_۲, \ldots x_n\rangle \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i, i = ۱, \ldots, n\}$$

از $\mathbb{R}^n$ با اضلاع موازی محورها می‌گیریم. این گردایه $\mathcal{B}$ یک پایه برای توپولوژی اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}^n$ است. ■

تمرین‌های ۲.۲

۱. در این تمرین ثابت می‌کنید که قرص $\{\langle x,y\rangle : x^۲+y^۲<۱\}$ یک زیرمجموعه باز از $\mathbb{R}^۲$ است و سپس ثابت می‌کنید که هر قرص باز در صفحه یک مجموعه باز است.

(i) فرض کنید $\langle a,b\rangle$ نقطه‌ای در قرص $D=\{\langle x,y\rangle : x^۲+y^۲<۱\}$ باشد. قرار دهید $r=\sqrt{a^۲+b^۲}$. فرض کنید $R_{\langle a,b\rangle}$ یک مستطیل باز با رئوس $\langle a\pm\frac{۱-r}{۸}, b\pm\frac{۱-r}{۸}\rangle$ باشد. ثابت کنید $R_{\langle a,b\rangle}\subset D$.

(ii) با استفاده از (i) نشان دهید

$$D=\bigcup_{\langle a,b\rangle\in D} R_{\langle a,b\rangle}.$$

(iii) از (ii) نتیجه بگیرید که D یک مجموعه باز در $\mathbb{R}^۲$ است.

(iv) نشان دهید که هر قرص بصورت $\{\langle x,y\rangle : (x-a)^۲+(y-b)^۲<c^۲, a,b,c\in\mathbb{R}\}$ در $\mathbb{R}^۲$ باز است.

۲. در این تمرین نشان خواهید داد که گردایه تمام قرص‌های باز در $\mathbb{R}^۲$ یک پایه برای یک توپولوژی در $\mathbb{R}^۲$ است. [بعداً خواهیم دید که این توپولوژی، توپولوژی اقلیدسی است.]

(i) فرض کنید $D_۱$ و $D_۲$ دو قرص دلخواه در $\mathbb{R}^۲$ با شرط $D_۱\cap D_۲\neq\emptyset$ باشد. اگر $\langle a,b\rangle$ نقطه‌ای در $D_۱\cap D_۲$ باشد، نشان دهید که یک قرص مانند $D_{\langle a,b\rangle}$ به مرکز $\langle a,b\rangle$ وجود دارد که $D_{\langle a,b\rangle}\subset D_۱\cap D_۲$. [راهنمایی: برای این مساله یک شکل رسم کنید و از روش تمرین ۱ (i) استفاده کنید.]

(ii) نشان دهید که

$$D_۱\cap D_۲=\bigcup_{\langle a,b\rangle\in D_۱\cap D_۲} D_{\langle a,b\rangle}.$$

(iii) با استفاده از (ii) و گزاره ۸.۲.۲ ثابت کنید که گردایه تمام قرص‌های باز در $\mathbb{R}^۲$ پایه‌ای برای یک توپولوژی در $\mathbb{R}^۲$ است.

۳. فرض کنید $\mathcal{B}$ گردایه تمام بازه‌های باز (a,b) در $\mathbb{R}$ با شرط $a<b$ باشد که a و b گویا هستند. ثابت کنید $\mathcal{B}$ یک پایه برای توپولوژی اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}$ است. [این را با گزاره ۱.۲.۲ و مثال ۳.۲.۲مقایسه کنید که در آن a و b لزوما گویا نبودند.]

[راهنمایی: از گزاره ۸.۲.۲ استفاده نکنید چون استفاده از آن فقط نشان می‌دهد که $\mathcal{B}$ یک پایه برای برخی توپولوژی، نه لزوما یک پایه برای توپولوژی اقلیدسی است.]

۴. گفته می‌شود فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ در اصل دوم شمارا بودن[8] صدق می‌کند اگر یک پایه $\mathcal{B}$ برای $\mathcal{T}$ وجود داشته باشد که فقط شامل تعداد شمارا عضو باشد.

(i) با استفاده از تمرین ۳ نشان دهید که $\mathbb{R}$ در اصل دوم شمارا بودن صدق می‌کند.

(ii) ثابت کنید که توپولوژی گسسته بر روی یک مجموعه ناشمارا در اصل دوم شمارا بودن صدق نمی‌کند.
[راهنمایی: کافی نیست ثابت کنید یک پایه ویژه ناشماراست. باید ثابت کنید هر پایه برای این توپولوژی ناشماراست.]

(iii) ثابت کنید که $\mathbb{R}^n$ به ازای هر عدد صحیح مثبت n ، در اصل دوم شمارا بودن صدق می‌کند.

(iv) فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ مجموعه تمام اعداد صحیح با توپولوژی متناهی‌ـبسته باشد. آیا فضای توپولوژی $(X,\mathcal{T})$ در اصل دوم شمارا بودن صدق می‌کند؟

۵. گزاره‌های زیر را ثابت کنید.

(i) فرض کنید c و $m \neq 0$ اعداد حقیقی باشد. در اینصورت خط $L = \{\langle a,b\rangle \in \mathbb{R}^2 : y = mx + c\}$ یک زیرمجموعه بسته از $\mathbb{R}^2$ است.

(ii) فرض کنید $S^1 = \{\langle a,b\rangle \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ دایره واحد باشد. پس S^1 یک زیرمجموعه بسته در $\mathbb{R}^2$ است.

(iii) فرض کنید

$$S^n = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\rangle \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 +, x_2^2 + \ldots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1\},$$

nـکره واحد باشد. بنابراین S^n یک مجموعه بسته در $\mathbb{R}^{n+1}$ است.

(iv) فرض کنید

$$B^n = \{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle \in \mathbb{R}^n : x_1^2 +, x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1\},$$

nـقرص واحد باشد. پس B^n یک مجموعه بسته در $\mathbb{R}^n$ است.

(v) خم $C = \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ یک زیرمجموعه بسته در $\mathbb{R}^2$ است.

۶. فرض کنید $\mathcal{B}_1$ پایه‌ای برای توپولوژی $\mathcal{T}_1$ بر روی X و $\mathcal{B}_2$ پایه‌ای برای توپولوژی $\mathcal{T}_2$ بر روی Y باشد. مجموعه $X \times Y$ شامل زوج‌های مرتب $\langle x,y\rangle$ است که $x \in X$ و $y \in Y$. فرض کنید $\mathcal{B}$ گردایه زیرمجموعه‌های $X \times Y$ شامل همه مجموعه‌های $B_1 \times B_2$ باشد که $B_1 \in \mathcal{B}_1$ و $B_2 \in \mathcal{B}_2$. ثابت کنید $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای یک توپولوژی بر روی $X \times Y$ است. توپولوژی که به این صورت تعریف می‌شود توپولوژی حاصلضرب[9] بر روی $X \times Y$ گفته می‌شود.
[راهنمایی: مثال ۹.۲.۲ را ببینید.]

۷. با استفاده از تمرین ۳ و تمرین شماره ۸ از بخش ۱.۲ ثابت کنید که هر زیرمجموعه باز از $\mathbb{R}$ یک F_σـمجموعه و یک G_σـمجموعه است.

[8] Second axiom of countability

[9] Product topology

۳.۲ پایهٔ یک توپولوژی مشخص

گزاره ۸.۲.۲ بیان کرد که تحت چه شرایطی گردایه $\mathcal{B}$ از زیرمجموعه‌های X یک پایه برای یک توپولوژی بر روی X است. البته گاهی یک توپولوژی τ بر روی X معلوم است و می‌خواهیم بدانیم آیا $\mathcal{B}$ برای این توپولوژی ویژه τ یک پایه است. برای بررسی اینکه $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای τ است می‌توانیم فقط تعریف ۲.۲.۲ را بکار ببریم و نشان دهیم هر عضو τ بصورت اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}$ است. با این حال، گزاره ۲.۳.۲ روش دیگری را برای ما فراهم می‌آورد.

ابتدا مثالی را ذکر می‌کنیم که نشان می‌دهد که بین این گفتار که یک گردایه $\mathcal{B}$ از زیرمجموعه‌های X یک پایه برای برخی توپولوژی است و بگوییم که آن برای یک توپولوژی معلوم یک پایه است اختلاف وجود دارد. [۱۰]

مثال ۱.۳.۲ فرض کنید $\mathcal{B}$ گردایه همه بازه‌های نیم‌باز $(a,b]$، $a<b$ باشد که در آن $(a,b]=\{x : x\in\mathbb{R}, a<x\leq b\}$، پس $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای یک توپولوژی بر روی $\mathbb{R}$ است، چون $\mathbb{R}$ اجتماع همه اعضای $\mathcal{B}$ است و اشتراک هر دو بازه نیم‌باز یک بازه نیم‌باز است.

البته، توپولوژی τ_1 که پایه آن $\mathcal{B}$ است، توپولوژی اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}$ نیست. با مشاهده این که $(a,b]$ یک مجموعه باز در $\mathbb{R}$ با توپولوژی τ_1 است، در صورتی که $(a,b]$ یک مجموعه باز در $\mathbb{R}$ با توپولوژی اقلیدسی نیست، می‌توان این موضوع را درک کرد. (تمرین شماره ۱ از بخش ۱.۲ را ببینید.) بنابراین یک توپولوژی وجود دارد که $\mathcal{B}$ یک پایه برای آن است ولی یک پایه برای توپولوژی اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}$ نیست. ■

[۱۰] از بیان اول استنباط می‌شود که یک توپولوژی وجود دارد که $\mathcal{B}$ یک پایه برای آن است اما بیان دوم روشن می‌سازد که $\mathcal{B}$ برای یک توپولوژی معلوم (مفروض) یک پایه است. مترجم

گزاره ۲.۳.۲ فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد. یک خانواده $\mathcal{B}$ از زیرمجموعه‌های X پایه‌ای برای $\mathcal{T}$ است اگر و فقط اگر به ازای هر نقطه x متعلق به هر مجموعه باز U، یک مجموعه مانند $B \in \mathcal{B}$ وجود داشته باشد که $x \in B \subseteq U$.

برهان.

باید ثابت کنیم که

(i) اگر $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای $\mathcal{T}$ باشد و $x \in U \in \mathcal{T}$، آنگاه یک مجموعه مانند $B \in \mathcal{B}$ وجود دارد که $x \in B \subseteq U$، و

(ii)اگر برای هر $U \in \mathcal{T}$ و $x \in U$ یک مجموعه مانند $B \in \mathcal{B}$ وجود داشته باشد بطوری که $x \in B \subseteq U$، آنگاه $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای $\mathcal{T}$ است.

فرض کنید $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای $\mathcal{T}$ باشد و $x \in U \in \mathcal{T}$. چون $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای $\mathcal{T}$ است، پس مجموعه باز U بصورت اجتماعی از اعضای $\mathcal{B}$ است؛ یعنی، برای هر j از مجموعه اندیس J که $B_j \in \mathcal{B}$ داریم $U = \bigcup_{j\in J} B_j$. ولی از $x \in U$ نتیجه می‌شود که عددی مانند $j \in J$ وجود دارد بطوری که $x \in B_j$. بنابراین $x \in B_j \subseteq U$.

برعکس، فرض کنید که برای هر $U \in \mathcal{T}$ و هر $x \in U$، یک مجموعه مانند $B \in \mathcal{B}$ وجود دارد که $x \in B \subseteq U$. باید نشان دهیم که هر مجموعه باز بصورت یک اجتماع از اعضای $\mathcal{B}$ است. بنابراین فرض کنید V یک مجموعه باز دلخواه باشد. در این صورت برای هر $x \in V$ یک مجموعه مانند $B_x \in \mathcal{B}$ وجود دارد بطوری که $x \in B_x \subseteq V$. واضح است که $V = \bigcup_{x\in V} B_x$ (بررسی کنید چرا؟). بنابراین V بصورت یک اجتماع از اعضای $\mathcal{B}$ است. ■

گزاره ۳.۳.۲ فرض کنید $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای توپولوژی $\mathcal{T}$ بر روی مجموعه X باشد. پس زیرمجموعه U از X باز است اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in U$ عضوی مانند $B \in \mathcal{B}$ موجود باشد که $x \in B \subseteq U$.

برهان. فرض کنید U زیرمجموعه‌ای از X باشد و به ازای هر $x \in U$، مجموعه‌ای مانند $B_x \in \mathcal{B}$ وجود داشته باشد که $x \in B_x \subseteq U$. بوضوح $U = \bigcup_{x\in U} B_x$. پس U یک اجتماع از مجموعه‌های باز و بنابراین باز است. عکس این گزاره از گزاره ۲.۳.۲ نتیجه می‌شود. ■

مشاهده می‌کنید که خاصیت پایه‌ای بیان شده در گزاره ۳.۳.۲ دقیقا معادل آن خاصیتی است که در تعریف توپولوژی اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}$ استفاده کردیم. در آنجا ذکر شد که زیرمجموعه U از $\mathbb{R}$ باز است اگر و تنها اگر برای هر $x \in U$، اعداد a و b، $a < b$، از $\mathbb{R}$ وجود داشته باشد بطوری که $x \in (a,b) \subseteq U$.

هشدار. اطمینان حاصل کنید که تفاوت گزاره ۸.۲.۲ و گزاره ۲.۳.۲ را متوجه شده‌اید. گزاره ۸.۲.۲ شرایطی را ارائه می‌دهد که تحت آن خانواده $\mathcal{B}$ از زیرمجموعه‌های X پایه‌ای برای یک توپولوژی دلخواه بر روی X است. ولی، گزاره ۲.۳.۲ شرایطی را مهیا می‌کند که تحت آن خانواده $\mathcal{B}$ از زیرمجموعه‌های فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ ، پایه‌ای برای یک توپولوژی معین $\mathcal{T}$ باشد.

دیدیم که یک توپولوژی می‌تواند پایه‌های مختلفی داشته باشد. گزاره بعد به ما می‌گوید که چه موقع دو پایه‌ی $\mathcal{B}_1$ و $\mathcal{B}_2$ بر روی یک مجموعه X می‌توانند توپولوژی یکسانی را مشخص می‌کنند.

گزاره ۴.۳.۲ فرض کنید $\mathcal{B}_1$ و $\mathcal{B}_2$ پایه‌هایی به ترتیب برای توپولوژی‌های τ_1 و τ_2 بر روی مجموعه غیرتهی X باشد. در این صورت $\tau_2 = \tau_1$ اگر و فقط اگر

(i) به ازای هر $B \in \mathcal{B}_1$ و هر $x \in B$، یک مجموعه مانند $B' \in \mathcal{B}_2$ وجود داشته باشد بطوری که $x \in B' \subseteq B$، و

(ii) به ازای هر $B \in \mathcal{B}_2$ و هر $x \in B$، یک مجموعه مانند $B' \in \mathcal{B}_1$ وجود داشته باشد بطوری که $x \in B' \subseteq B$.

برهان.

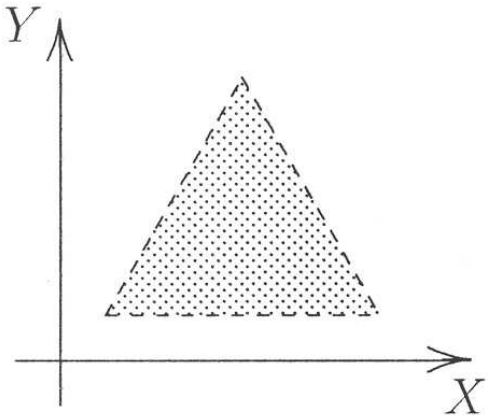
باید ثابت کنیم که $\mathcal{B}_1$ و $\mathcal{B}_2$ پایه‌های یک توپولوژی هستند اگر و تنها اگر (i) و (ii) درست باشند.
ابتدا فرض می‌کنیم که $\mathcal{B}_1$ و $\mathcal{B}_2$ پایه‌های یک توپولوژی باشند؛ یعنی، $\tau_2 = \tau_1$ ، و نشان می‌دهیم که شرایط (i) و (ii) برقرار هستند.
در ادامه، فرض می‌کنیم شرایط (i) و (ii) برقرار باشند و ثابت می‌کنیم $\tau_2 = \tau_1$.

ابتدا فرض کنید $\tau_2 = \tau_1$. پس شرایط (i) و (ii) نتیجه مستقیم گزاره ۲.۳.۲ هستند.
برعکس، فرض کنید $\mathcal{B}_1$ و $\mathcal{B}_2$ در شرایط (i) و (ii) صدق می‌کنند. بنابر گزاره ۲.۳.۲ از (i) نتیجه می‌شود که هر $B \in \mathcal{B}_1$ در (X, τ_2) باز است؛ یعنی، $\mathcal{B}_1 \subseteq \tau_2$. چون هر عضو τ_1 یک اجتماع از اعضای τ_2 است پس نتیجه می‌گیریم که $\tau_1 \subseteq \tau_2$. بهمین طریق، از (ii) نتیجه می‌شود $\tau_2 \subseteq \tau_1$. در نتیجه $\tau_2 \subseteq \tau_1$ که همان حکم است. ■

مثال ۵.۳.۲ نشان دهید که مجموعه $\mathcal{B}$ از تمام «مثلث‌های متساوی‌الاضلاع باز» که قاعده‌ی آنها موازی محور Xـها است، پایه‌ای برای توپولوژی اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}^2$ است. (منظور از «مثلث باز» مثلثی است که اضلاع آن را در بر ندارد.)

چهارچوب اثبات (در اینجا، فقط به صورت تصویری بحث می‌شود. شما باید اثبات را بطور کامل بنویسید.)
برهان.

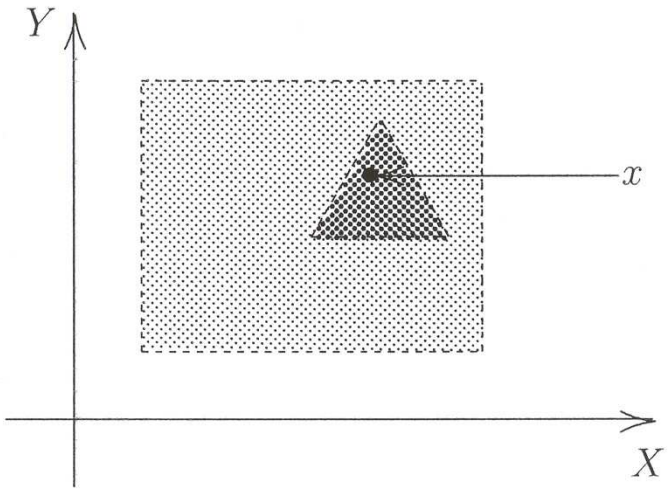
باید نشان دهیم که $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای توپولوژی اقلیدسی است.
باید از گزاره ۴.۳.۲ استفاده کنیم ولی قبل از آن باید نشان دهیم که $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای یک توپولوژی بر روی $\mathbb{R}^2$ است.
برای نشان دادن این مطلب، باید ثابت کنیم که $\mathcal{B}$ در شرایط گزاره ۸.۲.۲ صدق می‌کند.



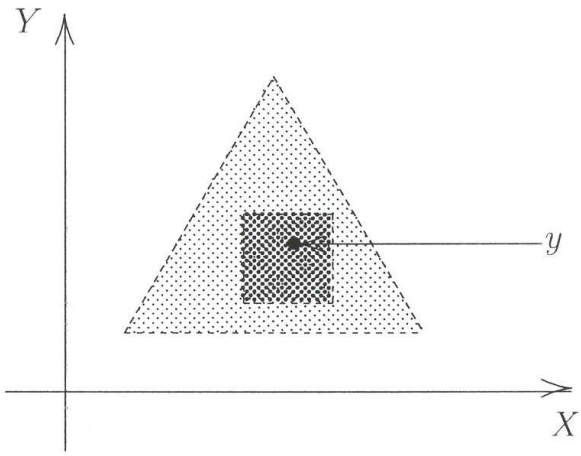
اولین چیزی که مشاهده می‌کنیم این است که $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای یک توپولوژی است چراکه در شرایط گزاره ۸.۲.۲ صدق می‌کند.(برای این که ببینیم $\mathcal{B}$ در گزاره ۸.۲.۲ صدق می‌کند، مشاهده می‌کنید $\mathbb{R}^2$ برابر است با اجتماع تمامی مثلث‌های متساوی‌الاضلاع باز که قاعده آنها با محور x ها موازی هستند، و نیز اشتراک دو مثلث این چنینی یک چنین مثلث دیگر است.)

در مرحله‌ی بعد باید نشان دهیم که شرایط (i) و (ii) از گزاره‌ی ۴.۳.۲ برقرارند.

ابتدا شرط (i) را بررسی می‌کنیم. فرض کنید R مستطیل باز با اضلاع موازی محورهای مختصات و x نقطه‌ای دلخواه در $\mathbb{R}$ باشد. باید نشان دهیم که یک مثلث متساوی‌الاضلاع باز T با قاعده‌ی موازی محور xـها وجود دارد که $x \in T \subseteq R$. این مطلب به سادگی از روی شکل دیده می‌شود.



بالاخره، باید شرط (ii) از گزاره ۴.۳.۲ را بررسی کنیم. فرض کنید T' مثلث متساوی الاضلاع باز با قاعده‌ی موازی محور xـها و y نقطه‌ای در آن باشد. پس مستطیل باز R' موجود است بطوری که $y \in R' \subseteq T'$. این مطلب نیز به سادگی از روی شکل دیده می‌شود.



بنابراین شرایط گزاره‌ی ۴.۳.۲ برقرار است و $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای توپولوژی اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}^2$ است. ■

در مثال ۹.۲.۲ پایه‌ای برای توپولوژی اقلیدسی تعریف کردیم که گردایه‌ی تمام «مستطیل‌های باز» (با اضلاع موازی محورهای مختصات) بود. مثال ۵.۳.۲ نشان می‌دهد که به جای «مستطیل‌های باز» می‌توانیم از «مثلث‌های باز» (با قاعده‌ی موازی محور Xـها) بدون تغییر توپولوژی استفاده کنیم. در تمرین شماره ۱ از بخش ۳.۲ خواهیم دید که حتی شرایط داخل پرانتزها هم بدون تغییر توپولوژی قابل حذف است. همچنین «قرص‌های باز» می‌توانند جایگزین «مستطیل های باز» شوند. [۱۱]

[۱۱] در حقیقت، اغلب کتابها، توپولوژی اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}^2$ را با استفاده از قرص‌های باز تعریف می‌کنند.

تمرین‌های ۳.۲

۱. تعیین کنید که کدامیک از گردایه‌های زیر پایه‌ای برای توپولوژی اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}^2$ است:

(i) گردایه‌ی همه مربع‌های «باز» با اضلاع موازی محورهای مختصات؛

(ii) گردایه‌ی همه قرص‌های «باز»؛

(iii) گردایه‌ی همه مربع‌های «باز»؛

(iv) گردایه‌ی همه مستطیل‌های «باز»؛

(v) گردایه‌ی همه مثلث‌های «باز».

۲. (i) فرض کنید $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای توپولوژی روی مجموعه ناتهی X باشد. اگر $\mathcal{B}_1$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد بطوری که $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{T}$ ، ثابت کنید که $\mathcal{B}_1$ نیز پایه‌ای برای $\mathcal{T}$ است.

(ii) از (i) نتیجه بگیرید که تعداد ناشمارا پایه‌ی مختلف برای توپولوژی اقلیدسی روی $\mathbb{R}$ وجود دارد.

۳. مجموعه $\mathcal{B} = \{(a,b] : a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$ را در نظر بگیرید. همانطور که در مثال ۱.۳.۲ دیده شد، B پایه‌ای برای توپولوژی $\mathcal{T}$ بر روی $\mathbb{R}$ است و $\mathcal{T}$ توپولوژی اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}$ نیست. با وجود این ، نشان دهید که هر بازه‌ی (a,b) در $(X,\mathcal{T})$ باز است.

۴.* فرض کنید $C[0,1]$ مجموعه تمام تابع‌های حقیقی پیوسته بر روی $[0,1]$ باشد.

(i) نشان دهید که گردایه M، که در آن ε یک عدد حقیقی مثبت است $M = \{M(f,\varepsilon) : f \in C[0,1],$ و $M(f,\varepsilon) = \{g : g \in C[0,1], \int_0^1 |f-g| < \varepsilon\}$ یک پایه برای یک توپولوژی $\mathcal{T}_1$ روی $C[0,1]$ است.

(ii) نشان دهید گردایه‌ی U، که در آن ε یک عدد حقیقی مثبت است $U = \{U(f,\varepsilon) : f \in C[0,1],$ و $U(f,\varepsilon) = \{g : g \in C[0,1], \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| < \varepsilon\}$ یک پایه برای یک توپولوژی $\mathcal{T}_2$ بر روی $C[0,1]$ است.

(iii) ثابت کنید $\mathcal{T}_2 \neq \mathcal{T}_1$.

۵. فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد. یک گردایه‌ی ناتهی S از زیرمجموعه‌های باز X را یک زیرپایه[12] برای $\mathcal{T}$ می‌نامند اگر گردایه‌ی همه‌ی اشتراک‌های متناهی از اعضای S، پایه‌ای برای $\mathcal{T}$ بسازد.

(i) ثابت کنید که گردایه‌ی تمام بازه‌های باز (a,∞) یا $(-\infty,a)$ یک زیرپایه برای توپولوژی اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}$ می‌سازد.

(ii) ثابت کنید که $S = \{\{a\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e,f\}\}$ یک زیرپایه برای توپولوژی $\mathcal{T}_1$ از مثال ۲.۱.۱ است.

۶. فرض کنید S یک زیرپایه برای یک توپولوژی $\mathcal{T}$ بر روی $\mathbb{R}$ باشد. (تمرین ۵ را ببینید.) اگر همه‌ی بازه‌های بسته‌ی $[a,b]$، $a < b$، در S باشد، ثابت کنید که $\mathcal{T}$ توپولوژی گسسته است.

۷. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و S گردایه‌ی همه‌ی مجموعه‌های $X\backslash\{x\}$, $x \in X$ باشد. ثابت کنید S یک زیرپایه برای توپولوژی متناهی-بسته بر روی X است.

[12] Subbasis

۸. فرض کنید X یک مجموعه نامتناهی و τ توپولوژی گسسته بر روی آن باشد. یک زیرپایه‌ی S برای τ پیدا کنید که شامل هیچ مجموعه تک‌عضوی نباشد.

۹. فرض کنید S گردایه‌ی تمام خط‌های مستقیم در صفحه‌ی $\mathbb{R}^2$ باشد. اگر S یک زیرپایه برای یک توپولوژی τ بر روی $\mathbb{R}^2$ باشد، توپولوژی τ چیست؟

۱۰. فرض کنید S گردایه‌ی تمام خط‌های راست موازی محور xـ‌ها در صفحه باشد. اگر S یک زیرپایه برای توپولوژی τ روی $\mathbb{R}^2$ باشد، مجموعه‌های باز را در فضای $(\mathbb{R}^2,\mathcal{T})$ توصیف کنید.

۱۱. فرض کنید S گردایه‌ی تمام دایره‌ها در صفحه باشد. اگر S زیرپایه‌ای برای توپولوژی τ بر روی $\mathbb{R}^2$ باشد، مجموعه‌های باز در فضای $(\mathbb{R}^2,\mathcal{T})$ را توصیف کنید.

۱۲. فرض کنید S گردایه‌ی تمام دایره‌ها در صفحه باشد که مرکز آنها بر روی محور xـ‌ها است. اگر S زیرپایه‌ای برای توپولوژی τ بر روی $\mathbb{R}^2$ باشد، مجموعه‌های باز در فضای $(\mathbb{R}^2,\mathcal{T})$ را توصیف کنید.

۴.۲ خلاصه

در این فصل فضای توپولوژیک بسیار مهم ـ $\mathbb{R}$، مجموعه تمام اعداد حقیقی با توپولوژی اقلیدسی را تعریف کردیم و زمانی را برای تجزیه و تحلیل آن صرف کردیم. در این توپولوژی مشاهده کردیم که بازه‌های باز واقعا مجموعه‌های باز (و بازه‌های بسته مجموعه‌های بسته) هستند. به هر حال، همه مجموعه‌های باز بصورت بازه باز نیستند. با وجود این، هر مجموعه باز در $\mathbb{R}$ بصورت یک اجتماع از بازه‌های باز است. این موضوع ما را بر آن داشت که مفهوم «پایه برای یک توپولوژی» را معرفی و ثابت کنیم که گردایه تمامی بازه‌های باز یک پایه برای توپولوژی اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}$ است.

با استفاده از این مفهوم «پایه‌ی یک توپولوژی» را معرفی کردیم و ثابت کردیم که گردایه‌ی تمام بازه‌های باز پایه‌ای برای توپولوژی اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}$ است.

در مقدمه فصل ۱، یک اثبات ریاضی را بصورت یک بحث خلل‌ناپذیر توصیف کردیم و اهمیت نوشتن اثبات‌ها را متذکر شدیم. در این فصل، اثبات با برهان خلف را در ملاحظه‌ی ۲.۱.۲ (v) و در مثال ۷.۲.۲ معرفی کردیم. روش اثبات شرایط «لازم و کافی» که به شکل «اگر و تنها اگر» ظاهر می‌شود در گزاره ۱.۲.۲ شرح داده شد و نمونه‌های بیشتر در گزاره‌های ۸.۲.۲، ۲.۳.۲، ۳.۳.۲ و ۴.۳.۲ ارائه گردید.

برای توپولوژی‌ها، موضوع پایه‌ها به نوبه خود حایز اهمیتند. برای مثال دیدیم که گردایه‌ی همه مجموعه‌های تک‌عضوی پایه‌ای برای توپولوژی گسسته است. در گزاره ۸.۲.۲ برای اینکه گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X پایه‌ای برای یک توپولوژی دلخواه بر روی X باشند شرایط لازم و کافی ارائه شد. این مطلب با گزاره‌ی ۲.۳.۲ که شرایط لازم و کافی برای پایه بودن گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X برای توپولوژی معین بر روی X را ارائه می‌داد مقایسه شد. تذکر داده شد که دو گردایه‌ی متفاوت $\mathcal{B}_1$ و $\mathcal{B}_2$ می‌توانند پایه‌های یک توپولوژی باشند. شرط لازم و کافی برای این موضوع در گزاره ۴.۳.۲ داده شد.

توپولوژی اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}^n$ برای هر عدد صحیح مثبت n تعریف شد. دیدیم که خانواده‌ی تمام قرص‌های باز، همچنین خانواده‌ی مربع‌های باز یا مستطیل‌های باز، پایه‌ای برای $\mathbb{R}^2$ است .

سه مفهوم جالب در تمرین‌ها معرفی شد. تمرین شماره ۸ از بخش ۱.۲ نمادها و مفاهیم F_σـ‌مجموعه و G_σـ‌مجموعه را پوشش داد که در نظریه‌ی اندازه‌ها مهم هستند. تمرین شماره ۴ از بخش ۳.۲ فضای توابع حقیقی پیوسته را معرفی کرد. چنین فضاهایی را فضاهای تابع می‌نامند که یکی از موضوع‌های اصلی در مطالعه

آنالیز تابعی هستند. آنالیز تابعی آمیزه‌ای از آنالیز (کلاسیک) و توپولوژی است و تا مدت‌ها آنالیز مدرن نامیده می‌شد، بعنوان مثال سایمونز [۳] را ببینید. در نهایت در تمرین‌های شماره ۱۲ـ۵ از بخش ۳.۲ مفهوم زیرپایه معرفی شد.

فصل ۳

نقاط حدی

مقدمه

بر روی خط اعداد حقیقی مفهوم «نزدیکی» را داریم. برای مثال هر نقطه در دنباله‌ی $۰/۱, ۰/۰۱, ۰/۰۰۱, ۰/۰۰۰۱, ۰/۰۰۰۰۱, \ldots$ از نقطه‌ی قبل به ۰ نزدیک‌تر است. در حقیقت، با یک دیدگاه، ۰ نقطه‌ی حدی این دنباله است. بنابراین بازه $(۰, ۱]$ بسته نیست، چون این بازه شامل نقطه حدی ۰ نیست. در یک فضای توپولوژیک کلی «تابع فاصله» وجود ندارد، بنابراین باید کار دیگری انجام دهیم. در این فصل مفهوم نقطه حدی بدون استفاده از «فاصله» تعریف خواهد شد. حتی با تعریف جدید از نقطه حدی، ۰ همچنان نقطه حدی $(۰, ۱]$ خواهد بود. معرفی مفهوم نقطه حدی به ما در درک بهتر مفهوم مجموعه‌های بسته کمک خواهد کرد.

مفهوم توپولوژیکی بسیار مهم دیگر که در این فصل معرفی خواهد شد مفهوم همبندی است. فضای توپولوژیکی $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. در حالیکه مجموعه های $[۰, ۱] \cup [۲, ۳]$ و $[۴, ۶]$ می‌توانند بصورت مجموعه‌های با طول ۲ توصیف شوند، واضح است که نوع این دو مجموعه متفاوت است... مجموعه اول شامل دو بخش جدا از هم می‌باشد اما مجموعه دوم یکپارچه است. تفاوت بین این دو مجموعه «توپولوژیکی» است و با استفاده از مفهوم همبندی توضیح داده خواهد شد.

۱.۳ نقاط حدی و بست

اگر $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد معمولا اعضای X را نقطه[1] می‌نامیم.

تعریف ۱.۱.۳ فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ باشد. نقطه $x \in X$ نقطه حدی[2] (یا نقطه انباشتگی[3] یا نقطه خوشه‌ای[4]) A نامیده می‌شود اگر هر مجموعه باز U شامل x، یک نقطه دیگر از A بغیر از x را در بر داشته باشد.

[1] Point

[2] Limit point

[3] Accumulation point

[4] Cluster point

مثال ۲.۱.۳ فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ با فرض مجموعه $X=\{a,b,c,d,e\}$ و توپولوژی $\mathcal{T}=\{X,\emptyset,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$ را در نظر بگیرید. اگر $A=\{a,b,c\}$، پس b، d و e نقاط حدی مجموعه A هستند.

برهان.

نقطه a یک نقطه حدی A است اگر و تنها اگر هر مجموعه باز شامل a، شامل نقطه دیگری از A نیز باشد.
بنابراین برای نشان دادن اینکه a نقطه حدی مجموعه A نیست، کافی است یک مجموعه باز شامل a پیدا کنیم که شامل نقطه دیگری از A نباشد.

مجموعه $\{a\}$ یک مجموعه باز است و شامل نقطه دیگری از A نیست. بنابراین a نقطه حدی A نیست.
مجموعه $\{c,d\}$ یک مجموعه باز شامل c است ولی شامل نقطه دیگری از A نیست. بنابراین c نقطه حدی A نیست.

برای اینکه نشان دهیم b نقطه حدی A است، باید نشان دهیم که هر مجموعه باز شامل b شامل نقطه دیگری از A بغیر از b است.
اینکار را با نوشتن همه مجموعه‌های باز شامل b و بررسی اینکه هرکدام از آنها شامل نقطه دیگری از A بغیر از b است، انجام خواهیم داد.

X و $\{b,c,d,e\}$ تنها مجموعه های باز شامل b هستند که هر دوی آنها شامل اعضای دیگری از A مثلا c هستند. بنابراین b نقطه حدی A است.
نقطه d نقطه حدی A است اگرچه عضو A نیست. چون هر مجموعه باز شامل d، شامل نقطه‌ای از A است. به همین صورت، e نقطه حدی A است اگرچه عضوی از A نیست. ■

مثال ۳.۱.۳ فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای گسسته و A زیرمجموعه‌ای از X باشد. پس A هیچ نقطه حدی ندارد. چون به ازای هر عضو $x\in X$، $\{x\}$ مجموعه بازی است که شامل نقطه دیگری از A بغیر از x نیست. ■

مثال ۴.۱.۳ زیرمجموعه $A=[a,b)$ از $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. بسادگی می‌توان بررسی کرد که هر عضو $[a,b)$ نقطه حدی A است. نقطه b نیز نقطه حدی A است. ■

مثال ۵.۱.۳ فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای ناگسسته و A زیرمجموعه‌ای از X با حداقل دو عضو باشد. بسادگی دیده می‌شود که هر عضو X نقطه حدی A است. (چرا تاکید کردیم که A حداقل دو نقطه داشته باشد؟) ■

برای تشخیص اینکه یک مجموعه بسته است یا نه، گزاره بعد یک روش مفید را ارایه می‌دهد.

گزاره ۶.۱.۳ فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ باشد. بنابراین A در $(X,\mathcal{T})$ بسته است اگر و تنها اگر A شامل تمام نقاط حدی خود باشد.

برهان.

باید ثابت کنیم که A در $(X,\mathcal{T})$ بسته است اگر و تنها اگر A شامل تمام نقاط حدی خود باشد؛ یعنی، باید نشان دهیم

(i) اگر A یک مجموعه بسته باشد، آنگاه شامل تمام نقاط حدی خود است، و

(ii)اگر A شامل تمام نقاط حدی خود باشد، آنگاه بسته است.

فرض کنید A در $(X,\mathcal{T})$ بسته باشد. فرض کنید p یک نقطه حدی A باشد که عضو مجموعه $X\backslash A$ است. پس $X\backslash A$ مجموعه‌ی بازی است که شامل نقطه حدی p از A است. پس $X\backslash A$ شامل عضوی از A است. بروشنی این مطلب دروغ است و لذا برای فرض خود یک تناقض داریم. بنابراین هر نقطه حدی A باید متعلق به A باشد.

برعکس، فرض کنید A شامل تمام نقاط حدی خود است. برای هر $z \in X\backslash A$، از فرض نتیجه می‌شود که یک مجموعه باز U_z، $(z \in U_z)$ وجود دارد که $U_z \cap A = \emptyset$؛ یعنی، $U_z \subseteq X\backslash A$. بنابراین $X\backslash A = \bigcup_{z\in X\backslash A} U_z$. (چرا؟) پس $X\backslash A$ اجتماعی از مجموعه‌های باز و در نتیجه مجموعه‌ای باز است. بنابراین مکمل آن، A بسته است. ■

مثال ۷.۱.۳ به عنوان کاربردهای گزاره ۶.۱.۳، احکام زیر را داریم:

(i) مجموعه $(a,b]$ در $\mathbb{R}$ بسته نیست، زیرا b نقطه حدی است و $b \notin (a,b]$؛

(ii) مجموعه $[a,b]$ در $\mathbb{R}$ بسته است، چون تمام نقاط حدی $[a,b]$ (یعنی تمام نقاط $[a,b]$) در $[a,b]$ قرار دارد؛

(iii) (a,b) زیرمجموعه بسته $\mathbb{R}$ نیست، زیرا شامل نقطه حدی a نیست؛

(iv) $[a,\infty)$ یک مجموعه بسته در $\mathbb{R}$ است. ■

گزاره ۸.۱.۳ فرض کنید A یک زیرمجموعه از فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ و A' مجموعه تمامی نقاط حدی A باشد. پس $A \cup A'$ یک مجموعه بسته است.

برهان. از گزاره ۶.۱.۳ نتیجه می‌شود که کافی است نشان دهیم $A \cup A'$ شامل همه نقاط حدی خود است، یا بطور معادل هیچ عضوی از $X\backslash(A \cup A')$ یک نقطه حدی $A \cup A'$ نیست.

فرض کنید $p \in X\backslash(A \cup A')$. چون $p \notin A'$، مجموعه باز U شامل p با شرط $U \cap A = \emptyset$ یا $U \cap A = \{p\}$ وجود دارد. اما $p \notin A$، پس $U \cap A = \emptyset$. همچنین ادعا می‌کنیم که $U \cap A' = \emptyset$. زیرا اگر $x \in U$، آنگاه چون U یک مجموعه باز است و $U \cap A = \emptyset$، پس $x \notin A$. بنابراین $U \cap A' = \emptyset$. یعنی، $U \cap (A \cup A') = \emptyset$، و از $p \in U$ نتیجه می‌شود که p نقطه حدی $A \cup A'$ نیست و بدین ترتیب $A \cup A'$ مجموعه بسته است. ■

تعریف ۹.۱.۳ فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ باشد. مجموعه $A \cup A'$ که شامل اعضای A و تمام نقاط حدی آن است بِستِ A[1] نامیده می‌شود و با $\overline{A}$ نشان داده می‌شود.

[1] Closure

ملاحظه ۱۰.۱.۳ از گزاره ۸.۱.۳ روشن است که $\overline{A}$ یک مجموعه بسته است. همچنین از گزاره ۶.۱.۳ و تمرین شماره ۵ از بخش ۱.۳ *(i)* واضح است که هر مجموعه بسته A باید شامل مجموعه A' نیز باشد. بنابراین $A \cup A' = \overline{A}$ کوچکترین مجموعه بسته شامل A است. از این مطلب نتیجه می‌شود که $\overline{A}$ اشتراک همه مجموعه‌های بسته شامل A است. ■

مثال ۱۱.۱.۳ فرض کنید $X = \{a, b, c, d, e\}$ و

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}.$$

نشان دهید $\overline{\{b\}} = \{b, e\}$، $\overline{\{a, c\}} = X$ و $\overline{\{b, d\}} = \{b, c, d, e\}$.

برهان.

برای یافتن بست یک مجموعه، ابتدا تمام مجموعه‌های بسته شامل آن مجموعه را پیدا می‌کنیم و سپس کوچکترین آن را انتخاب می‌کنیم. بنابراین می‌خواهیم همه مجموعه‌های بسته را بنویسیم. اینکار را بسادگی با پیدا کردن مکمل مجموعه‌های باز انجام می‌دهیم.

مجموعه‌های بسته در این توپولوژی عبارتند از $\emptyset, X, \{b, c, d, e\}, \{a, b, e\}, \{b, e\}$ و $\{a\}$. بنابراین کوچکترین مجموعه بسته شامل $\{b\}$ مجموعه $\{b, e\}$ است؛ یعنی، $\overline{\{b\}} = \{b, e\}$. به همین طریق $\overline{\{a, c\}} = X$ و $\overline{\{b, d\}} = \{b, c, d, e\}$. ■

مثال ۱۲.۱.۳ فرض کنید $\mathbb{Q}$ زیرمجموعه $\mathbb{R}$ شامل تمامی اعداد گویا باشد. ثابت کنید $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

برهان. فرض کنید $\overline{\mathbb{Q}} \neq \mathbb{R}$. در این صورت عددی مانند x وجود دارد که $x \in \mathbb{R} \backslash \overline{\mathbb{Q}}$. چون $\mathbb{R} \backslash \overline{\mathbb{Q}}$ یک مجموعه باز در $\mathbb{R}$ است، پس اعداد a و b با شرط $a < b$ وجود دارد که $x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R} \backslash \overline{\mathbb{Q}}$. اما در هر بازه (a, b) یک عدد گویای q وجود دارد؛ یعنی، $q \in (a, b)$. بنابراین $q \in \mathbb{R} \backslash \overline{\mathbb{Q}}$ که در نتیجه $q \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. این یک تناقض است چون $q \in \mathbb{Q}$. در نتیجه $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. ■

تعریف ۱۳.۱.۳ فرض کنید A یک زیرمجموعه فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ باشد. گوییم A در X **چگال**[1] یا **همه‌جا در X چگال**[2] است اگر $\overline{A} = X$.

حال می توانیم مثال ۱۲.۱.۳ را به این صورت بیان کنیم: $\mathbb{Q}$ یک زیرمجموعه چگال $\mathbb{R}$ است.
توجه کنید که در مثال ۱۱.۱.۳ دیدیم که $\{a, c\}$ در X چگال است.

مثال ۱۴.۱.۳ فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای گسسته باشد، پس هر زیرمجموعه X بسته است (چون مکمل آن باز است). بنابراین تنها زیرمجموعه چگال X خود X است چون هر زیرمجموعه X بست خودش است. ■

[1] Dense
[2] Everywhere dense

گزاره ۱۵.۱.۳ فرض کنید A زیرمجموعه فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ باشد، A در X چگال است اگر و تنها اگر اشتراک A با هر زیرمجموعه باز و ناتهی X ناتهی باشد. (یعنی، اگر $U\in\mathcal{T}$ و $U\neq\emptyset$ آنگاه $A\cap U\neq\emptyset$.)

برهان. ابتدا فرض کنید اشتراک هر زیرمجموعه باز و ناتهی با A غیربدیهی باشد. اگر $A=X$، بوضوح A در X چگال است. اگر $A\neq X$، عضو $x\in X\backslash A$ را در نظر بگیرید. اگر $U\in\mathcal{T}$ و $x\in U$، آنگاه $U\cap A=\emptyset$. بنابراین x یک نقطه حدی A است. بنابراین $A'\supseteq X\backslash A$ و لذا بنابر تعریف ۹.۱.۳ داریم $\overline{A}=A'\cup A=X$؛ یعنی، A در X چگال است.

برعکس، فرض کنید A در X چگال و U یک زیرمجموعه باز دلخواه X باشد. فرض کنید $U\cap A=\emptyset$. پس اگر $x\in U$، آنگاه $x\notin A$ و x نقطه حدی A نیست، چون U یک مجموعه باز شامل x است که هیچ عضوی از A در آن نیست. این یک تناقض است چون A یک مجموعه چگال در X است، هر عضو $X\backslash A$ یک نقطه حدی A می‌باشد. پس فرض خلف باطل است و $U\cap A\neq\emptyset$. ■

تمرین‌های ۱.۳

۱. (a) در مثال ۲.۱.۱، تمامی نقاط حدی مجموعه‌های زیر را پیدا کنید:

(i) $\{a\}$،

(ii) $\{b,c\}$،

(iii) $\{a,c,d\}$،

(iv) $\{b,d,e,f\}$.

(b) در نتیجه، بست هر یکی از مجموعه‌های فوق را پیدا کنید.
(c) حال با استفاده از روش مثال ۱۱.۱.۳ بست هر یکی از مجموعه‌های فوق را پیدا کنید.

۲. فرض کنید $(\mathbb{Z},\ \mathcal{T})$ مجموعه اعداد صحیح با توپولوژی بسته‌ـمتناهی باشد. نقاط حدی مجموعه‌های زیر را پیدا کنید:

(i) $A=\{۱,۲,۳,\ldots,۱۰\}$،

(ii) مجموعه E شامل تمام اعداد صحیح زوج.

۳. تمام نقاط حدی بازه باز (a,b) در $\mathbb{R}$، $a<b$، را پیدا کنید.

۴. (a) بست هر یکی از مجموعه‌های زیر را در $\mathbb{R}$ پیدا کنید:

(i) $\{۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۴},\ldots,\frac{۱}{n},\ldots\}$،

(ii) مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$،

(iii) مجموعه اعداد گنگ $\mathbb{P}$.

(b) فرض کنید S یک زیرمجموعه از $\mathbb{R}$ باشد و $a\in\mathbb{R}$. ثابت کنید $a\in\overline{S}$ اگر و تنها اگر به ازای هر عدد صحیح مثبت n، عددی مانند $x_n\in S$ وجود دارد که $|x_n-a|<\frac{۱}{n}$.

۵. فرض کنید S و T زیرمجموعه‌های ناتهی از فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ باشند که $S \subseteq T$.

(i) اگر p یک نقطه حدی S باشد ثابت کنید p یک نقطه حدی T هم است.

(ii) از (i) نتیجه بگیرید که $\overline{S} \subseteq \overline{T}$.

(iii) حال نشان دهید اگر S در X چگال باشد، آنگاه T در X چگال است.

(iv) با استفاده از (iii) نشان دهید که $\mathbb{R}$ یک تعداد ناشمارا زیرمجموعه‌ی متمایز چگال دارد.

(v)* دوباره با استفاده از (iii) ثابت کنید $\mathbb{R}$ دارای یک تعداد ناشمارا از زیرمجموعه‌های شمارای متمایز چگال و 2^c زیرمجموعه ناشمارای متمایز چگال است.

۲.۳ همسایگی‌ها

تعریف ۱.۲.۳ فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک و N زیر مجموعه‌ای از X و p نقطه‌ای در N باشد. در اینصورت N را یک همسایگی[1] از نقطه p می‌گویند اگر یک مجموعه‌ی باز U وجود داشته باشد که $p \in U \subseteq N$.

مثال ۲.۲.۳ بازه‌ی بسته‌ی $[0,1]$ در $\mathbb{R}$ یک همسایگی نقطه‌ی $\frac{1}{2}$ است، زیرا $\frac{1}{2} \in (\frac{1}{4},\frac{3}{4}) \subseteq [0,1]$. ■

مثال ۳.۲.۳ بازه‌ی $[0,1)$ در $\mathbb{R}$ یک همسایگی نقطه‌ی $\frac{1}{2}$ است، زیرا $\frac{1}{2} \in (0,\frac{1}{2}) \subseteq (0,1)$. اما $[0,1)$ یک همسایگی نقطه‌ی ۱ نیست. (ثابت کنید.) ■

مثال ۴.۲.۳ اگر $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد و $U \in \mathcal{T}$، آنگاه از تعریف ۱.۲.۳ نتیجه می‌شود که U یک همسایگی برای تمام نقاط $p \in U$ است. بنابراین، مثلا هر بازه‌ی باز (a,b) در $\mathbb{R}$ یک همسایگی هر نقطه در آن است. ■

مثال ۵.۲.۳ فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک و N یک همسایگی نقطه p باشد. اگر S زیرمجموعه‌ی دلخواهی از X باشد بطوری که $N \subseteq S$، آنگاه S نیز یک همسایگی نقطه p خواهد بود. ■

گزاره‌ی بعدی به راحتی قابل اثبات است لذا اثبات آن به خواننده واگذار می‌شود.

گزاره ۶.۲.۳ فرض کنید A یک زیرمجموعه از فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ باشد. نقطه‌ی $x \in X$ یک نقطه‌ی حدی A است اگر و تنها اگر هر همسایگی x شامل نقطه‌ای از A غیر از x باشد. ■

از آنجاییکه یک مجموعه بسته است اگر و فقط اگر شامل تمام نقاط حدی خود باشد، نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود:

نتیجه ۷.۲.۳ فرض کنید A یک زیرمجموعه از فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ باشد. مجموعه A بسته است اگر و تنها اگر برای هر $x \in X\backslash A$ یک همسایگی مانند N از x موجود باشد بطوری که $N \subseteq X\backslash A$. ■

نتیجه ۸.۲.۳ فرض کنید U یک زیرمجموعه از فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ باشد. پس $U \in \mathcal{T}$ اگر و تنها اگر برای هر $x \in U$ یک همسایگی مانند N از x موجود باشد بطوری که $N \subseteq U$. ■

[1] Neighbourhood

نتیجه‌ی زیر بسادگی از نتیجه‌ی ۸.۲.۳ قابل استنتاج است.

نتیجه ۹.۲.۳ فرض کنید U یک زیرمجموعه از فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ باشد. پس $U \in \mathcal{T}$ اگر و تنها اگر برای هر $x \in U$ یک مجموعه مانند $V \in \mathcal{T}$ وجود داشته باشد که $x \in V \subseteq U$. ■

نتیجه‌ی ۹.۲.۳ روش مفیدی برای بررسی باز بودن یک مجموعه ارایه می‌دهد. بر اساس این نتیجه، مجموعه‌ای باز است اگر و فقط اگر آن مجموعه شامل یک مجموعه باز حول هر نقطه‌اش باشد.

تمرین‌های ۲.۳

۱. فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ باشد. ثابت کنید A در X چگال است اگر و فقط اگر اشتراک هر همسایگی از هر نقطه در $X\backslash A$ با A غیربدیهی باشد.

۲. (i) فرض کنید A و B دو زیرمجموعه از فضای توپولوژی $(X,\mathcal{T})$ باشند. به دقت ثابت کنید

$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}.$$

(ii) مثالی ارایه دهید که

$$\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}.$$

۳. فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد. ثابت کنید $\mathcal{T}$ یک توپولوژی متناهی‌ـبسته بر روی X است اگر و فقط اگر (i) $(X,\mathcal{T})$ یک T_1ـفضا باشد، و (ii) هر زیرمجموعه نامتناهی X در X چگال باشد.

۴. یک فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ را جدا پذیر[1] گویند اگر دارای زیرمجموعه شمارای چگال باشد. تعیین کنید کدامیک از فضاهای زیر جدا پذیر است:

(i) مجموعه $\mathbb{R}$ با توپولوژی معمولی؛

(ii) یک مجموعه شمارا با توپولوژی گسسته؛

(iii) یک مجموعه شمارا با توپولوژی بسته‌ـمتناهی؛

(iv) $(X,\mathcal{T})$ که X یک مجموعه متناهی است؛

(v) $(X,\mathcal{T})$ که $\mathcal{T}$ یک مجموعه متناهی است؛

(vi) یک مجموعه ناشمارا با توپولوژی گسسته؛

(vii) یک مجموعه ناشمارا با توپولوژی بسته‌ـمتناهی؛

(viii) یک فضای $(X,\mathcal{T})$ که در شرط دوم شمارا بودن صدق می‌کند.

[1] Separable

۵. فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک و A زیرمجموعه‌ای دلخواه از X باشد. بزرگترین مجموعه باز مشمول در A را درون[1] A می‌نامند و با $Int(A)$ نشان می‌دهند. [درون A، اجتماع تمام مجموعه‌های باز X است که تماما در داخل A هستند.]

(i) ثابت کنید که در $\mathbb{R}$، $Int([۰,۱]) = (۰,۱)$.

(ii) ثابت کنید که در $\mathbb{R}$، $Int((۳,۴)) = (۳,۴)$.

(iii) نشان دهید که اگر A در $(X,\mathcal{T})$ باز باشد آنگاه $Int(A) = A$.

(iv) بررسی کنید که در $\mathbb{R}$، $Int(\{۳\}) = \emptyset$.

(v) در فضای توپولوژی ناگسسته $(X,\mathcal{T})$ نشان دهید که برای تمام زیرمجموعه‌های واقعی A از X داریم $Int(A) = \emptyset$.

(vi) نشان دهید که برای زیرمجموعه‌های شمارای A از $\mathbb{R}$ داریم $Int(A) = \emptyset$.

۶. نشان دهید که اگر A زیرمجموعه فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ باشد، آنگاه $Int(A) = X\backslash\overline{(X\backslash A)}$. (تمرین ۵ در فوق مربوط به تعریف Int را ببینید.)

۷. با استفاده از تمرین ۶ در فوق، ثابت کنید A در $(X,\mathcal{T})$ چگال است اگر و فقط اگر $Int(X\backslash A) = \emptyset$.

۸. با استفاده از تعریف Int در تمرین ۵ در بالا، تعیین کنید که برای زیرمجموعه‌های دلخواه $A_۱$ و $A_۲$ از فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ ، کدامیک از موارد زیر درست است؟

(i) $Int(A_۱ \cap A_۲) = Int(A_۱) \cap Int(A_۲)$،

(ii) $Int(A_۱ \cup A_۲) = Int(A_۱) \cup Int(A_۲)$،

(iii) $\overline{A_۱ \cup A_۲} = \overline{A_۱} \cup \overline{A_۲}$.

(اگر پاسخ شما برای هر مورد گزینه‌ی «درست» باشد باید آن را ثابت کنید. اگر پاسخ شما گزینه‌ی «نادرست» باشد باید یک مثال نقض ارایه دهید.)

۹.* فرض کنید S یک زیرمجموعه چگال از فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ باشد. ثابت کنید که برای هر زیرمجموعه باز U از X، داریم $\overline{S \cap U} = \overline{U}$.

۱۰. فرض کنید S و T زیرمجموعه‌های چگال از یک فضای $(X,\mathcal{T})$ باشند. اگر T نیز باز باشد، از تمرین ۹ نتیجه بگیرید که $S \cap T$ در X چگال است.

۱۱. فرض کنید $\mathcal{B} = \{[a,b) : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$. هر یک از حکم‌های زیر را ثابت کنید.

(i) $\mathcal{B}$ پایه‌ای برای توپولوژی $\mathcal{T}_۱$ بر روی $\mathbb{R}$ است. (فضای $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_۱)$ را خط سورگنفری[2] می‌نامند.)

(ii) اگر $\mathcal{T}$ فضای اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}$ باشد، آنگاه $\mathcal{T}_۱ \supset \mathcal{T}$.

(iii) برای هر $a,b \in \mathbb{R}$، $a < b$، $[a,b)$ یک مجموعه باز-بسته در $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_۱)$ است.

(iv) خط سورگنفری یک فضای جدا شونده است.

(v)* خط سورگنفری در اصل دوم شمارا بودن صدق نمی‌کند.

[1] Interior

[2] Sorgenfrey line

۳.۳ همبندی

ملاحظه ۱.۳.۳ در اینجا برخی از تعریف‌ها و حقایقی که شما باید بدانید آورده شده است. فرض کنید S مجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد. اگر عضو b در S وجود داشته باشد که به ازای تمام اعضای $x \in S$ داشته باشیم $x \leq b$، آنگاه b **بزرگترین عضو**[1] S نامیده می‌شود. به طور مشابه، اگر S شامل عضو a باشد بطوری که به ازای هر $x \in S$ داشته باشیم $a \leq x$ ، آنگاه a را **کوچکترین عضو**[2] S می‌نامند. مجموعه S از اعداد حقیقی **از بالا کراندار**[3] گفته می‌شود اگر یک عدد حقیقی مانند c وجود داشته باشد که به ازای هر $x \in S$ داشته باشیم $x \leq c$ و c را **کران بالا**[4] می‌نامند. به همین ترتیب **از پایین کراندار**[5] و **کران پایین**[6] تعریف می‌شوند. مجموعه‌ای که از بالا و پایین کراندار باشد، مجموعه **کراندار**[7] نامیده می‌شود. ■

اصل کوچکترین کران بالا:[8] فرض کنید S یک مجموعه ناتهی از اعداد حقیقی باشد. اگر S از بالا کراندار باشد، آنگاه کوچکترین کران بالا خواهد داشت. ■

کوچکترین کران بالا را **سوپریمم**[9] نیز می‌نامند و با $\sup(S)$ نشان می‌دهند که امکان دارد عضو S باشد یا نباشد. در حقیقت، سوپریمم S عضوی از S است اگر و اگر فقط اگر S شامل بزرگترین عضو باشد. به عنوان مثال، سوپریمم بازه باز $S = (۱, ۲)$ برابر ۲ است ولی $۲ \notin (۱, ۲)$، در حالیکه سوپریمم $[۳, ۴]$ عضو ۴ است که مشمول در آن است و ۴ بزرگترین عضو $[۳, ۴]$ است. هر مجموعه S از اعداد حقیقی که از پایین کراندار باشد یک **بزرگترین کران پایین**[10] دارد که **اینفیمم**[11] نامیده می‌شود و با $inf(S)$ نشان داده می‌شود.

لم ۲.۳.۳ فرض کنید S یک زیرمجموعه از $\mathbb{R}$ باشد که از بالا کراندار است و p سوپریمم S باشد. اگر S زیرمجموعه بسته $\mathbb{R}$ باشد، آنگاه $p \in S$.

برهان. فرض کنید $p \in \mathbb{R}\backslash S$. چون $\mathbb{R}\backslash S$ باز است پس اعداد حقیقی مانند a و b، $a < b$، وجود دارد که $p \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}\backslash S$. چون p کوچکترین کران بالای S است و $a < p$، واضح است که عضو $x \in S$ وجود دارد که $a < x$. همچنین $x < p < b$، و بنابراین $x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}\backslash S$. اما این یک تناقض است چون $x \in S$. پس فرض خلف باطل است و $p \in S$. ■

---

[1] Greatest element
[2] Smallest element
[3] Bounded above
[4] Upper bound
[5] Bounded below
[6] Lower bound
[7] Bounded
[8] Least upper bound axiom
[9] Supremum
[10] Greatest lower bound
[11] Infimum

گزاره ۳.۳.۳ فرض کنید T یک زیرمجموعه باز-بسته $\mathbb{R}$ باشد. پس $T = \mathbb{R}$ یا $T = \emptyset$.

برهان. فرض کنید $T \neq \mathbb{R}$ و $T \neq \emptyset$. بنابراین عضوی مانند $x \in T$ و عضوی مانند $z \in \mathbb{R}\backslash T$ وجود خواهد داشت. بدون از دست دادن کلیت، فرض کنید $x < z$. قرار دهید $S = T \cap [x, z]$. چون S اشتراک دو مجموعه بسته است، پس یک مجموعه بسته خواهد بود. همچنین S از بالا کراندار است چون z بوضوح یک کران بالاست. فرض کنید p سوپریمم S باشد. بر اساس لم ۲.۳.۳ داریم $p \in S$. چون $p \in [x, z]$، پس $p \leq z$. اما $z \in \mathbb{R}\backslash T$ و $p \neq z$، بنابراین $p < z$.

حال، T نیز یک مجموعه باز است و $p \in T$. پس اعدادی مانند $a, b \in \mathbb{R}$، $a < b$، وجود دارد که $p \in (a, b) \subseteq T$. عدد t را بصورت $p < t < \min(b, z)$ در نظر بگیرید، که $\min(b, z)$ نشان دهنده عضو کوچکتر بین b و z است. پس $t \in T$ و $t \in [p, z]$. در نتیجه $t \in T \cap [x, z] = S$. این یک تناقض است چون $t > p$ و p سوپریمم S است. بنابراین فرض خلف باطل است و در نتیجه $T = \mathbb{R}$ یا $T = \emptyset$. ■

تعریف ۴.۳.۳ فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد. این فضا را همبند[1] می‌نامند اگر X و $\emptyset$ تنها زیرمجموعه های باز-بسته X باشد.

با بیان دوباره گزاره ۳.۳.۳ خواهیم داشت:

گزاره ۵.۳.۳ فضای توپولوژیک $\mathbb{R}$ همبند است. ■

مثال ۶.۳.۳ اگر $(X,\mathcal{T})$ یک فضای گسسته دلخواه با بیش از یک عضو باشد، آنگاه $(X,\mathcal{T})$ همبند نیست چراکه هر مجموعه تک‌عضوی باز-بسته است. ■

مثال ۷.۳.۳ اگر $(X,\mathcal{T})$ یک فضای ناگسسته دلخواه باشد آنگاه یک فضای همبند است زیرا X و $\emptyset$ تنها مجموعه‌های باز-بسته X است. ■

مثال ۸.۳.۳ اگر $X = \{a, b, c, d, e\}$ و $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$، آنگاه $(X,\mathcal{T})$ همبند نیست چون $\{b, c, d, e\}$ یک زیرمجموعه باز-بسته است. ■

ملاحظه ۹.۳.۳ به موجب تعریف ۴.۳.۳ نتیجه می‌شود که فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ همبند نیست (یعنی، ناهمبند[2] است) اگر و فقط اگر مجموعه‌های باز و ناتهی مانند A و B وجود داشته باشد که $A \cap B = \emptyset$ و $A \cup B = X$ [3]. (تمرین شماره ۳ از بخش ۳.۳ را ببینید.)

این بخش را با بیان این حقیقت تمام می کنیم که $\mathbb{R}^2$ (و $\mathbb{R}^n$ برای $n \geq 1$) یک فضای همبند است. با این حال، اثبات این را در فصل ۵ خواهیم دید.
همبندی یک ویژگی بسیار مهمی است که درباره آن زیاد صحبت خواهیم کرد.

[1] Connected

[2] Disconnected

[3] اکثر کتاب‌ها از این خاصیت برای تعریف همبندی استفاده می‌کنند.

تمرین‌های ۳.۳

۱. فرض کنید S مجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد و $T = \{x : -x \in S\}$.

(a) ثابت کنید که عدد حقیقی a اینفیمم مجموعه S است اگر و تنها اگر $-a$ سوپریمم مجموعه T باشد.

(b) با استفاده از (a) و اصل موضوعه کوچکترین کران بالا ثابت کنید که هر مجموعه ناتهی از اعداد حقیقی که از بالا کراندار باشد کوچکترین کران بالا دارد.

۲. برای هر یک از مجموعه‌های زیر از اعداد حقیقی بزرگترین عضو و کوچکترین کران بالا را در صورت وجود پیدا کنید.

(i) $S = \mathbb{R}$.

(ii) $S = \mathbb{Z}$ = مجموعه اعداد صحیح.

(iii) $S = [۹, ۱۰)$

(iv) S مجموعه تمام اعداد حقیقی به صورت $\frac{۳}{n^۲} - ۱$، که n عدد صحیح مثبت است.

(v) $S = (-\infty, ۳]$.

۳. فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد. ثابت کنید که $(X,\mathcal{T})$ همبند نیست اگر و تنها اگر شامل زیرمجموعه‌های حقیقی، باز و مجزای A و B باشد بطوری که $A \cup B = X$.

۴. آیا فضای $(X,\mathcal{T})$ از مثال ۲.۱.۱ همبند است؟

۵. فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک مجموعه نامتناهی با توپولوژی بسته‌ـمتناهی باشد. آیا $(X,\mathcal{T})$ همبند است؟

۶. فرض کنید $(X,\mathcal{T})$ یک مجموعه نامتناهی با توپولوژی شمارا‌ـبسته باشد. آیا $(X,\mathcal{T})$ همبند است؟

۷. کدامیک از فضاهای توپولوژیک تمرین شماره ۹ از بخش ۱.۱ همبند است؟

۴.۳ خلاصه

در این فصل مفهوم نقطه حدی معرفی شد و نشان داده شد که یک مجموعه بسته است اگر و فقط اگر شامل تمام نقاط حدی خود باشد. گزاره ۸.۱.۳ بیان می‌کند که هر مجموعه A دارای کوچکترین مجموعه بسته $\overline{A}$ است که آن را در بر دارد.

گفته می‌شود زیرمجموعه A از فضای توپولوژیک $(X,\mathcal{T})$ در X چگال است اگر $\overline{A} = X$. دیدیم که $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$ چگال است، و مجموعه $\mathbb{P}$ از تمام اعداد گنگ نیز در $\mathbb{R}$ چگال است. مفهوم همسایگی یک نقطه و فضای توپولوژیک همبند معرفی شد. نتیجه بسیار مهمی را ثابت کردیم یعنی $\mathbb{R}$ همبند است. بعدا در مورد همبندی بیشتر صحبت خواهیم کرد.

در تمرین‌ها، مفهوم درون یک مجموعه تعریف شد که به نوعی مکمل مفهوم بست یک مجموعه است.

کتاب‌نامه

[1] Nicolas Bourbaki. General topology v.1 & v.2. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1966.

[2] The MacTutor History of Mathematics Archive, http:
www-gap.dcs.st-and.ac.uk/hitory/,2001–.

[3] George E. Simmons. Introduction to topology and modern analysis. McGraw Hill, New York, 1963.

نمایه

$C[۰, ۱]$، ۴۷
F_σـمجموعه، ۳۵
G_σـمجموعه، ۳۵
$T_۰$ـفضا، ۲۷
$T_۱$ـفضا، ۲۷
$\mathbb{N}$، ۱۵
$\mathbb{P}$، ۳۵
$\mathbb{Q}$، ۳۴
$\mathbb{R}$، ۱۸، ۱۹، ۳۱
$\mathbb{R}^۲$، ۳۹
$\mathbb{R}^n$، ۳۹
$\mathbb{Z}$، ۳۴
$f^{-۱}$، ۲۵

درون، ۵۸

خط:
سورگنفری، ۵۸

وارون:
تابع، ۲۵
تصویر، ۲۵

اصل:
کوچکترین کران بالا، ۵۹

باز:
مجموعه، ۲۰

خواص:
جدایی، ۲۹

کران:
بالا، ۵۹
پایین، ۵۹
بزرگترین کران پایین، ۵۹

بست، ۵۳

تهی:
اجتماع، ۱۷

عضو:
بزرگ‌ترین، ۵۹
کوچکترین، ۵۹

فضا:
$T_۰$، ۲۷
$T_۱$، ۲۷
جدا پذیر، ۵۷
گسسته، ۱۵
همبند، ۶۰
توپولوژیک، ۱۴
ناگسسته، ۱۵
ناهمبند، ۶۰
سیرپینسکی، ۲۸

پوشا، ۲۴
پایه، ۳۶

تابع:
وارون، ۲۵
پوشا، ۲۴
دوسویه، ۲۴
یک به یک، ۲۴

چگال، ۵۴:
همه‌جا، ۵۴

اثبات:
ریاضی، ۱۳

برهان خلف، ۳۳
اگر و تنها اگر، ۳۶

دوسویه، ۲۴

بسته:
مجموعه، ۲۱

کراندار، ۵۹:
از بالا، ۵۹
از پایین، ۵۹

نقطه، ۵۱:
حدی، ۵۱
خوشه‌ای، ۵۱
همسایگی، ۵۶
انباشتگی، ۵۱

تصویر:
وارون، ۲۵

کران بالا، ۵۹

نگاشت:
وارون، ۲۵
پوشا، ۲۴
دوسویه، ۲۴
یک به یک، ۲۴

اجتماع:
تهی، ۱۷

زیرپایه، ۴۷

توپولوژی، ۱۴:
اشتراک، ۲۸
گسسته، ۱۵
اقلیدسی، ۳۱
حاصلضرب، ۴۱
ناگسسته، ۱۵
هم‌متناهی، ۲۳
شمارا-بسته، ۲۸
قطعه آغازین، ۱۹
قطعه پایانی، ۱۹
بسته-متناهی، ۲۳
اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}^n$، ۳۹

جدا پذیر، ۵۷

گسسته:
فضا، ۱۵
توپولوژی، ۱۵

همبند، ۶۰

یک به یک، ۲۴

مجموعه:
F_σ، ۳۵
G_σ، ۳۵
باز، ۲۰
بسته، ۲۱
اعداد گنگ، ۳۵
اعداد گویا، ۳۴
باز-بسته، ۲۲
اعداد صحیح، ۳۴
اعداد حقیقی، ۱۸، ۱۹
اعداد طبیعی، ۱۵
اعداد صحیح مثبت، ۱۵
تمام تابع‌های حقیقی پیوسته، ۴۷

خواص جدایی، ۲۹

سوپریمم، ۵۹

شمارا بودن:
اصل دوم، ۴۱

باز-بسته:
مجموعه، ۲۲

فرض کنید:
اثبات با برهان خلف، ۳۳

نقطه حدی، ۵۱

برهان خلف، ۳۳

اینفیمم، ۵۹
کران پایین، ۵۹
ناگسسته:
فضا، ۱۵
توپولوژی، ۱۵
ناهمبند، ۶۰
همسایگی، ۵۶
اثبات ریاضی، ۱۳
زیرمجموعه:
چگال، ۵۴
واقعی، ۲۲
همه‌جا چگال، ۵۴
اجتماع تهی، ۱۷
همه‌جا چگال، ۵۴
خط سورگنفری، ۵۸
نقطه خوشه‌ای، ۵۱
اصل دوم شمارا بودن، ۴۱
بزرگترین عضو، ۵۹
فضای توپولوژیک، ۱۴
کوچکترین عضو، ۵۹
اشتراک توپولوژی‌ها، ۲۸
زیرمجموعه واقعی، ۲۲
توپولوژی اقلیدسی، ۳۱
توپولوژی حاصلضرب، ۴۱
نقطه انباشتگی، ۵۱
توپولوژی هم‌متناهی، ۲۳
فضای سیرپینسکی، ۲۸
بزرگترین کران پایین، ۵۹
توپولوژی شمارا-بسته، ۲۸
توپولوژی قطعه آغازین، ۱۹
اصل کوچکترین کران بالا، ۵۹
توپولوژی قطعه پایانی، ۱۹
توپولوژی بسته-متناهی، ۲۳
توپولوژی اقلیدسی بر روی $\mathbb{R}^n$، ۳۹
inf، ۵۹
sup، ۵۹
Int، ۵۸