۱- فرض کنید M یک منیفلد C^∞ باشد و $C \subset M$ زیرمجموعه بسته آن باشد. نشان دهید تابع هموار مانند $f : M \longrightarrow [0,1]$ چنان وجود دارد که $C = f^{-1}(0)$ باشد.

۲- نشان دهید که اجتماع مجزای تعداد ناشمارا کپی از $\mathbb{R}$ یک فضای موضعا اقلیدسی و هاسدرف است که دارای پایه شمارش‌پذیر نیست.

۳- فرض کنید M یک منیفلد همبند n-بُعدی و $f : M \xrightarrow{C^\infty} M$ باشند بطوریکه $f \circ f = f$ باشد. نشان دهید $f(M)$ یک زیرمنیفلد M است

۴- فرض کنید $f : M \xrightarrow{C^\infty} N$ یک سوبمرسیون باشد و به ازای $q \in f(M)$ قرار دهیم $K = f^{-1}(q)$. همچنین فرض کنید $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ باشد و به ازای $p \in K$ تابعک خطی $\lambda \in (T_q N)^*$ چنان موجود باشد که $g_{*_p} = \lambda \circ f_{*_p}$. دراینصورت نشان دهید p یک نقطه بحرانی $g\big|_K$ (تحدید g به K) است.

۵- نشان دهید نمی‌توان نگاشتی C^∞ مانند $f : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ یافت بطوریکه به ازای یک مقدار عادی c از آن $f^{-1}(c)$ برابر با $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ شود.

۶- نشان دهید S^3, S^7 توازی‌پذیر می‌باشند.

۷- فرض کنید $f : M \times N \xrightarrow{C^\infty} P$ و $(x, y) \in M \times N$ باشند. هرگاه تعریف کنیم

$$\begin{cases} f_1 : N \longrightarrow P \\ f_1(t) = f(t, y) \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} f_2 : N \longrightarrow P \\ f_2(t) = f(x, t) \end{cases}$$

نشان دهید به ازای هر $v = (v_x, v_y) \in T_{(x,y)}(M \times N)$ خواهیم داشت

$$f_{*_{(x,y)}}(v) = (f_1)_{*_x}(v_x) + (f_2)_{*_y}(v_y)$$

۸- ثابت کنید

الف) هرگاه M یک منیفلد همبند C^∞ باشد، آنگاه $H^0(M) \cong \mathbb{R}$ و در حالت کلی $\dim H^0(M)$ که عددبتی صفر بُعدی M نیز نامیده می‌شود، بیانگر تعداد مؤلفه‌های همبندی M است.

ب) $H^1(\mathbb{R}) \cong 0$

ج) $H^1(S^1) \cong \mathbb{R}$

۹- G یک گروه توپولوژیک و H زیرگروهی بسته از آن و G/H فضای همگن حاصل است. در اینصورت

الف) اگر H و G/H فشرده باشند، ثابت کنید G نیز فشرده است.

ب) اگر H و G/H همبند باشند، ثابت کنید G نیز همبند است.

۱۰- الف) فرض کنید $X,Y \in \chi(\mathbb{R}^2)$ و $X(x,y)=(x^2,y^2)$ و $Y(x,y)=(e^{x+y},e^{xy})$ مطلوبست $[X,Y]$.

ب) توازی‌پذیری $SO(n)$ را با معرفی صریح میدانهای برداری روی آن ثابت کنید.

ج) مطلوبست محاسبه شار میدان $Z(x,y)=(3x,2y)$.

۱۱- با یافتن صریح میدان‌های برداری لازم، نشان دهید $SL(n,\mathbb{R})$ توازی‌پذیر است.

۱۲- الف) منحنی‌های تراز نگاشت

$$f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x,y,z)=(y^2+z^2-4)^2+x^2-1$$

را از نظر منیفلد بودن بررسی کنید. فضای مماس بر منیفلد(ها) را در یک نقطه‌ی دلخواه از آن(ها) بیابید.

ب) برای نگاشت همسوار $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ، $f(x,y,z)=(ye^x,e^{y+z})$ نشان دهید $f^{-1}(S^1)$ یک زیرمنیفلد $\mathbb{R}^3$ است. بُعد آن و فضای مماسش را در یک نقطه از آن بیابید.

۱۳- الف) ثابت کنید T^n توازی‌پذیر است. ب) اگر M توازی‌پذیر باشد ثابت کنید TM نیز توازی‌پذیر است.

۱۴- فرض کنید $X \in \chi(\mathbb{R}^2)$ و $X(x,y)=(2y,-2x)$. مطلوبست شار X.

۱۵- فرض کنید G یک گروه لی و α یک فرم دیفرانسیل ناوردای چپ روی آن باشد. ثابت کنید برای هر میدان برداری ناوردای راست X روی G داریم $L_X\alpha \equiv 0$.

۱۶- فرض کنید:

$$\alpha = xdy\wedge dz\wedge dt + zdx\wedge dy\wedge dt + tdy\wedge dx\wedge dz + ydx\wedge dz\wedge dt \in \Lambda^3(\mathbb{R}^4)$$

$$X = x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}+t\frac{\partial}{\partial t}\in\chi(\mathbb{R}^4)$$

مطلوبست محاسبه $L_X\alpha$.

۱۷- ثابت کنید که اگر یک ایمرسیون یک به یک، سره نیز باشد، آنگاه یک امبدینگ است.

۱۸- فرض کنید M و N دو منیفلد توپولوژیک همبُعد باشند و $f:M\longrightarrow N$ یک تابع پیوسته و یک به یک باشد. ثابت کنید $f(M)$ یک باز در N است.

۱۹- اگر $X_1,\ldots,X_k$ میدان‌های برداری روی M باشند که کروشه لی دو به دوی آنها صفر است و بعلاوه در نقطه $p\in M$، $\{X_1(p),\ldots,X_k(p)\}$ مستقل خطی باشند، آنگاه یک دستگاه مختصات (x,U) حول p چنان موجود است که :

$$X_i=\frac{\partial}{\partial x^i}\qquad i=1,\ldots,k$$

۲۰- نشان دهید هر زیرمنیفلد فشرده $(n-1)$-بُعدی $\mathbb{R}^n$ جهت‌پذیر است. آیا می‌توان شرط فشردگی را حذف کرد؟

۲۱- فرض کنید $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ یک سوبمرسیون باشد و $c\in f(\mathbb{R}^n)$. نشان دهید زیرمنیفلد $M=f^{-1}(c)$ یک منیفلد جهت‌پذیر است.

۲۲- نشان دهید $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ را می‌توان از چسباندن یک نوار موبیوس و یک دیسک در طول مرزشان بدست آورد و از این نتیجه بگیرید $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ جهت‌پذیر نمی‌باشد.

۲۳- ثابت کنید هر منیفلد ۳- بُعدی توازی‌پذیر است.

۲۴- با محاسبه گروه تک پارامتر موضعی میدان برداری $X=\sum_{i=1}^{n}x^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ روی $\mathbb{R}^n$، اتحاد اویلر را برای توابع همگن روی $\mathbb{R}^n$ ثابت کنید. (تابع $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ را همگن از درجه d می‌نامیم، هرگاه به ازای هر $\lambda\in\mathbb{R}$ و $x\in\mathbb{R}^n$، $f(\lambda x)=\lambda^d f(x)$.)

۲۵- فرض کنید $X=\frac{\partial}{\partial t}$ یک میدان برداری روی $\mathbb{R}$ و $\begin{cases}f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\\ t\mapsto t^3\end{cases}$ باشند. مطلوب است f_*X.

۲۶- فرض کنید X و Y و Z سه میدان برداری $\{\theta_t\}$ گروه تک پارامتری موضعی Z باشد. نشان دهید $(\theta_t)_*[X,Y]=[(\theta_t)_*X,(\theta_t)_*Y]$. سپس اتحاد ژاکوبی برای میدان‌های برداری را نتیجه بگیرید.

۲۷- فرض کنید M یک منیفلد هموار و $X\in\chi(M)$، اگر نگاشت سِره $u:M\longrightarrow\mathbb{R}$ و عدد $k>0$ موجود باشد بطوریکه برای هر خم انتگرال γ از X داشته باشیم $|(u\circ\gamma)'(t)|\le k$ آنگاه X کامل است.

۲۸- ثابت کنید $\begin{cases} f : S^1 \to S^1 \\ f(x,y) = (x^2 - 1, 2xy) \end{cases}$ یک دیفئومورفیسم از $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ به S^1 القاء می‌کند و در نتیجه $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \cong S^1$.

۲۹- در تمرین ۸۹ از مسائل حل شده، نشان دهید H انتگرالپذیر نیست. آیا این مطلب در تناقض با قضیه فروبینیوس(*Frobenius*) نمی‌باشد؟

۳۰- فرض کنید $\begin{cases} f : GL(2n) \longrightarrow M_{2n\times 2n} \\ A \mapsto A^T JA \end{cases}$ باشد. نشان دهید f یک نگاشت C^∞ می‌باشد و دارای رتبه ثابت $2n^2 + n$ است. (مقایسه شود با مساله ۸۷ در مسائل حل شده)

۳۱- فرض کنید S^2 کره واحد در $\mathbb{R}^3$ و $\pi : S^2 - \{(0,0,1)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ نگاشت کُنج‌نگاری باشد. مطلوبست فرم حجمی کانونیک S^2 در این دستگاه مختصات.

۳۲- ثابت کنید بین $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ و مجموعه همه صفحات گذرنده از مبدا در $\mathbb{R}^3$ یک تناظر یک به یک برقرار است. آیا این تناظر یک به یک، دیفئومورفیسم می‌باشد؟

۳۳- ثابت کنید دو ساختار C^∞ روی یک فضای توپولوژیک M، هم‌ارز هستند اگر و فقط اگر فضای توابع C^∞ نسبت به آنهابه عنوان دو $\mathbb{R}-$جبر جابجائی یکه دار یکریخت باشد.

۳۴- فرض کنید X,Y دو میدان برداری روی M با شارهای $\{\varphi_t\}$ و $\{\psi_t\}$ باشند و بعلاوه $[X,Y] = 0$. نشان دهید، $\{\varphi_t \circ \psi_t\}$ شار $X+Y$ می‌باشد.

۳۵- فرض کنید $X = \frac{\partial}{\partial x} + f\frac{\partial}{\partial z}$ و $Y = \frac{\partial}{\partial y} + g\frac{\partial}{\partial z}$ دو میدان برداری روی $\mathbb{R}^3$ و $M = \{(x,y,z) \mid z = h(x,y)\}$ یک رویه در $\mathbb{R}^3$ باشد. مطلوبست تعیین f و g و h بطوریکه در هر نقطه $p \in M$ داشته باشیم $T_pM = Span\{X(p), Y(p)\}$.

۳۶- فرض کنید $\begin{cases} f : (-\pi,\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (\sin t, \frac{1}{2}\sin 2t) \end{cases}$. آیا $f(-\pi,\pi)$ یک زیرمنیفلد نشانده شده در $\mathbb{R}^2$ می‌باشد؟

۳۷- فرض کنید $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ یک سوبمرسیون و M منیفلد جهت‌پذیر باشد. ثابت کنید هر مجموعه تراز f ، جهت‌پذیر است.

۳۸- روی $\mathbb{R}^{۲n}$، ۱-فرم $\alpha = \sum_{i=۱}^{n} x_i \, dx_{n+i}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید $\underbrace{d\alpha \wedge \ldots \wedge d\alpha}_{n}$ یک عنصر حجم برای $\mathbb{R}^{۲n}$ می‌باشد.

۳۹- نشان دهید نگاشت $\begin{cases} f : \mathbb{R}^{۳} \longrightarrow \mathbb{R}^{۴} \\ (x,y,z) \mapsto (x^{۲} - y^{۲}, xy, xz, yz) \end{cases}$ یک امبدینگ از $\mathbb{P}_{۲}(\mathbb{R})$ به $\mathbb{R}^{۴}$ القاء می‌کند.

۴۰- فرض کنید X یک میدان برداری و α یک ۱-فرم دیفرانسیل روی $\mathbb{R}^{۲}$ باشند بطوریکه $L_X(\alpha) = ۰$ و $\alpha(X)$ همه جا ناصفر باشد. نشان دهید تابعی مانند $f : \mathbb{R}^{۲} \longrightarrow \mathbb{R}$ چنان موجود است که $\frac{\alpha}{\alpha(X)} = df$.

۴۱- فرض کنید $\begin{cases} f : \mathbb{R}^{۳} \longrightarrow \mathbb{R}^{۳} \\ (x,y,z) \mapsto (x\,Cosz - y\,Sinz, x\,Sinz + y\,Cosz, z) \end{cases}$. نشان دهید تحدید f به $S^{۲}$ یک دیفئومورفیسم روی $S^{۲}$ تعریف می‌کند.

۴۲- نشان دهید به یک فضای توپولوژیک با توپولوژی گسسته نمی‌توان ساختار C^{∞} داد.

۴۳- الف) نشان دهید هرگاه نگاشت دوخطی $f : \mathbb{R}^{k+۱} \times \mathbb{R}^{n+۱} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+۱}$ چنان موجود باشد بطوریکه:

$i)$ $f(v,z) = ۰ \;\Rightarrow\; v = ۰$ یا $z = ۰$

$ii)$ $\exists\, e \in \mathbb{R}^{k+۱} \quad \forall\, z \in \mathbb{R}^{n+۱} \quad f(e,z) = z$

در این صورت S^{n} تعداد k میدان برداری مستقل خطی می‌پذیرد.

ب) روی هر $S^{۲n+۱}$ یک میدان برداری وجود دارد که همه جا ناصفر است.

ج) نشان دهید $S^{۱}$ ، $S^{۳}$ و $S^{۷}$ توازی‌پذیرند.

۴۴- نشان دهید میدان برداری $X = e^{-x} \frac{\partial}{\partial x}$ یک میدان برداری غیرکامل روی $S^{۱}$ می‌باشد.

۴۵- $\mathbb{R}$ را با دو اطلس $\pi_1 = \{(1_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})\}$ و $\pi_2 = \{(x \mapsto x^3, \mathbb{R})\}$ به ترتیب با $\mathbb{R}_1$ و $\mathbb{R}_2$ نمایش می‌دهیم. نشان دهید:

الف) $f : \mathbb{R}_1 \longrightarrow \mathbb{R}_2$ با ضابطه $t \mapsto t^3$ مشتق‌پذیر است.

ب) هیچ میدان برداری $X \in \chi(\mathbb{R}_2)$ وجود ندارد بطوریکه $\frac{\partial}{\partial t} \in \chi(\mathbb{R}_2)$، f −مرتبط باشد.

۴۶- الف) فرض کنید $X = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ یک میدان برداری روی $\mathbb{R}^n$ باشد بطوریکه $c = (c_1, \ldots, c_n) \in S^{n-1}$ باشد. همچنین تابع $f : \mathbb{R}^n \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ چنان موجود باشد که روی $\|x\| \geq 1$ برابر صفر و روی $\|x\| < 1$ مثبت باشد. هرگاه $\{\varphi_t\}$ شار موضعی میدان برداری fX باشد، نشان دهید به ازای هر $y \in \mathbb{R}^n$ با شرط $\|x\| < 1$ وجود دارند $c \in S^{n-1}$ و $t_0 \in \mathbb{R}$ بطوریکه

$$\forall \|x\| \geq 1 \quad \varphi_{t_0}(0) = y \,,\, \varphi_{t_0}(x) = x$$

ب) با استفاده از قسمت (الف) نشان دهید برای هر منیفلد همبند M و هر زوج $p, q \in M$ یک دیفئومورفیسم $f : M \longrightarrow M$ چنان موجود است که $f(p) = q$.

۴۷- ثابت کنید $S^3 \cong Sp(1)$.

۴۸- S^3 را به عنوان گروه اعضای یکانی فضای کواترنیون‌ها $\mathbb{H}$، در نظر بگیرید و قرار دهید

$$\begin{cases} f : S^3 \times S^3 \longrightarrow SO(4) \\ (P, Q) \mapsto f(P, Q) \end{cases}$$

که در آن $\begin{cases} f(P,Q) : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ Z \mapsto P Z \overline{Q} \end{cases}$ می‌باشد و اعمال ضرب در $\mathbb{H}$ انجام می‌گردد. نشان دهید f یک سوبمرسیون است. (یک نگاشت موضعاً دیفئومورفیسم است لیکن دیفئومورفیسم نمی‌باشد)

۴۹- آیا رابطه $\alpha \wedge d\alpha = 0$ برای هر ۱- فرم دیفرانسیل‌پذیر α برقرار است؟

۵۰- میدان‌های برداری زیر را روی $\mathbb{R}^3$ در نظر بگیرید:

$$e_1 = (2 + y^2)e^z \frac{\partial}{\partial x}$$

$$e_2 = 2xy \frac{\partial}{\partial x} + (2 + y^2) \frac{\partial}{\partial y}$$

$$e_3 = -2xy^2 \frac{\partial}{\partial x} - y(2 + y^2) \frac{\partial}{\partial y} + (2 + y^2) \frac{\partial}{\partial z}$$

الف) نشان دهید میدان‌های فوق یک پایه برای مدول میدان‌های C^∞ روی $\mathbb{R}^3$ تشکیل می‌دهند.

ب) پایه دوگان را بدست آورید.

پ) مطلوبست محاسبه $[e_i, e_j]$ها و بیان آنها در پایه $\{e_i\}$.

ت) مطلوبست بررسی اتحاد ژاکوبی.

ج) هرگاه $\begin{cases} \varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y) \mapsto (u, v, w, t) \end{cases}$ به صورت زیر تعریف شده باشد، مطلوبست میدان برداری $X \in \chi(\mathbb{R}^4)$ بطوریکه با e_1، φ −مرتبط باشد.

$$u = x^2 - y^2 \ , \ v = x^2 + y^2 \ , \ w = x + y \ , \ t = x - y$$