۱- ثابت کنید $SL(۲, \mathbb{R}) \subseteq M(۲, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^۴$ صفرهای یک تابع هموار نامنفی روی $\mathbb{R}^۴$ است.

۲- فرض کنید $A_۰$ و $A_۱$ دو زیرمجموعه بسته و مجزای $\mathbb{R}^n$ باشند. نشان دهید در اینصورت وجود دارد تابع هموار مانند $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow [۰,۱]$ بطوریکه $A_۰ = f^{-۱}(۰)$ و $A_۱ = f^{-۱}(۱)$ باشند.

۳- فرض کنید $C_۱$ و $C_۲$ دو زیر مجموعه بسته مجزای منیفلد M باشند. ثابت کنید نگاشتی C^∞ مانند $f : M \longrightarrow [۰,۱]$ چنان وجود دارد که $C_۱ = f^{-۱}(۰)$ و $C_۲ = f^{-۱}(۱)$ باشند.

۴- فرض کنید $A_۰$ و $A_۱$ دو زیرمجموعه بسته و مجزای $\mathbb{R}^n$ و $a,b \in \mathbb{R}$ با شرط $a < b$ باشند. نشان دهید در اینصورت وجود دارد تابع هموار مانند $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow [a,b]$ بطوریکه:

$$A_۱ = f^{-۱}(b) \quad \text{و} \quad A_۰ = f^{-۱}(a)$$

۵- فضای توپولوژیک X را موضعاً اقلیدسی می‌گوییم، هرگاه هر نقطه $p \in X$ دارای یک همسایگی U باشد که U به ازای یک n مناسب، همئومورف با یک باز $\mathbb{R}^n$ باشد. ثابت کنید هرگاه X همبند باشد، عدد n برای تمام نقاط X ثابت است.

۶- بُعد یک منیفلد توپولوژیکِ همبند، بی‌ابهام تعریف می‌شود. برای یک منیفلد همبند C^r، $r \geq ۱$، این مطلب را بدون استفاده از قضیه براوئر ثابت کنید. (راهنمایی : قضیه تابع وارون)

۷- در تعریف منیفلد توپولوژیک، نشان دهید که هیچیک از دو شرط هاسدورف و پایه شمارش‌پذیر از مجموعه‌های باز، از بقیه نتیجه نمی‌شوند.

۸- فرض کنید M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر $n-$بُعدی و (x,U) یک کارت آن باشند. ثابت کنید x یک دیفئومورفیسم روی بُرد خودش است.

۹- ثابت کنید $S^۲$ و بطور کلی S^nها را نمی‌توان با یک کارت پوشاند.

۱۰- ثابت کنید هرگاه M یک منیفلد فشرده باشد، در اینصورت آنرا نمی‌توان با یک کارت پوشاند.

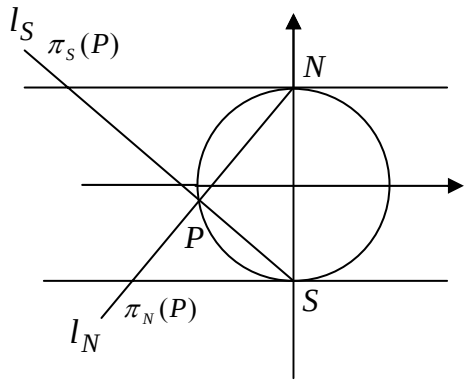
۱۱- آیا اجتماع دو کارت یک منیفلد، مجدداً یک کارت آن می‌باشد؟

۱۲- ثابت کنید رابطه C^∞-مرتبط بودن بین کارتهای یک منیفلد، رابطه هم ارزی نیست.

۱۳- فرض کنید $S^۱$ دایره واحد باشد. با توجه به شکل مقابل ضابطه نگاشتهای π_S, π_N را بنویسید.

$$N = (۰,۱) \quad \text{و} \quad S = (۰,-۱)$$

سپس نشان دهید این دو کارت تشکیل یک اطلس C^∞ برای $S^۱$ می‌دهند.



۱۴- فرض کنید $U_0, U_1, U_2 \subseteq \mathbb{RP}^2(\mathbb{R})$ بازهای استاندارد باشند و نگاشتهای زیر داده شده باشند:

$$\begin{cases} \phi_2 : U_2 \to \mathbb{R}^2 \\ \phi_2([x,y,z]) = \frac{1}{z}(x,y) \end{cases} \text{ و } \begin{cases} \phi_1 : U_1 \to \mathbb{R}^2 \\ \phi_1([x,y,z]) = \frac{1}{y}(x,z) \end{cases} \text{ و } \begin{cases} \phi_0 : U_0 \to \mathbb{R}^2 \\ \phi_0([x,y,z]) = \frac{1}{x}(y,z) \end{cases}$$

الف) نشان دهید $\{(\phi_i, U_i) \mid i = 0,1,2\}$ یک اطلس C^∞ برای $\mathbb{RP}^2(\mathbb{R})$ تشکیل میدهد.

ب) مطلوبست تعیین علامت $\frac{\partial(\phi_0 \circ \phi_2^{-1})}{\partial(x,y)}$ روی $U_0 \cap U_2$.

ج) مطلوبست تعیین علامت $\frac{\partial(\phi_1 \circ \phi_2^{-1})}{\partial(x,y)}$ روی $U_1 \cap U_2$.

۱۵- با ارائه یک اطلس، ثابت کنید استوانه قائم نامتناهی $X^2 + Y^2 = a^2$ یک منیفلد ۲-بُعدی است.

۱۶- فرض کنید $M = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. نشان دهید با توپولوژی القائی از $\mathbb{R}$، M یک منیفلد صفر بُعدی است ولیکن $M \cup \{0\}$ منیفلد نیست.

۱۷- فرض کنید $M = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \cdot y = 0 \right\}$ باشد. آیا M با توپولوژی القائی از $\mathbb{R}^2$ یک منیفلد می‌باشد؟

۱۸- فرض کنید $m \leq n$ و $R_m \subset M_{m \times n}(\mathbb{R})$ مجموعه ماتریس‌های از رتبه m باشد. نشان دهید R_m یک منیفلد است و سپس بُعد آنرا تعیین کنید.

۱۹- تمرین قبل را با فرض $m \geq n$ برای R_n ثابت کنید.

۲۰- ثابت کنید هر فضای برداری $n-$بُعدی، یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر $n-$بُعدی است.

۲۱- ثابت کنید $GL(n, \mathbb{R})$ یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر می‌باشد.

۲۲- ثابت کنید هر منیفلدی، موضعاً فشرده است. (یعنی هر نقطه آن دارای یک همسایگی باز می‌باشد که بستار آن فشرده است).

۲۳- ثابت کنید هر منیفلدی، موضعاً همبند است.

۲۴- ثابت کنید هر منیفلد دیفرانسیل‌پذیرِ همبند، همبند راهی نیز می‌باشد.

۲۵- هرگاه $C \subseteq U \subseteq M$، Uباز و Cفشرده باشند، ثابت کنید یک تابع C^∞ مانند $f : M \longrightarrow [0,1]$ چنان موجود است که $f|_C \equiv 1$ و $f|_{M-U} \equiv 0$.

۲۶- فرض کنید W یک همسایگی باز نقطه p از منیفلد M باشد. ثابت کنید تابع حقیقی و همواری روی M مانند f چنان موجود است که در یک همسایگی p در W برابر یک باشد و در خارج W برابر صفر باشد. (با استفاده از مساله ۳ یا ۲۵ به دو طریق اثبات نمایید).

۲۷- الف) با ارائه یک مثال نشان دهید تابعی C^∞ روی یک زیرمجموعه باز از یک منیفلد، لزوماً به کل آن منیفلد قابل گسترش نیست.

ب) نشان دهید هر تابع C^∞ روی یک زیرمجموعه بسته از یک منیفلد را می‌توان به کل آن منیفلد گسترش داد.

۲۸- نشان دهید اگر $f : M \longrightarrow N$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه پیوسته است.

۲۹- هرگاه V,W دو فضای برداری و $f : V \longrightarrow W$ یک تبدیل خطی باشد، آیا لزوماً f یک نگاشت C^∞ منیفلدها است؟

۳۰- اگر $f : M \longrightarrow N$ دیفرانسیل‌پذیر و $U \subseteq M$ باز باشند. ثابت کنید $f|_U$ نیز دیفرانسیل‌پذیر است.

۳۱- فرض کنید M و N دو منیفلد به ترتیب از بُعد m و n، و $f : M \longrightarrow N$ یک نگاشت باشند. ثابت کنید f نگاشتی دیفرانسیل‌پذیر است اگر و تنها اگر به ازای هر تابع دیفرانسیل‌پذیر $g : N \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع $g \circ f$ نیز دیفرانسیل‌پذیر باشد.

۳۲- فرض کنید V یک فضای برداری و $U \subseteq V$ یک زیرمجموعه باز آن و $p \in U$ باشند. ثابت کنید $T_pU \cong V$.

۳۳- فرض کنید M یک منیفلد C^∞، $x \in M$ و $v \in T_xM$ باشند. ثابت کنید خم $\alpha : (-\varepsilon,\varepsilon) \xrightarrow{C^\infty} M$ چنان موجود است که: $\alpha(0) = x$, $\alpha'(0) = v$.

۳۴- فرض کنید M یک منیفلد و $p \in M$ باشند. ایدال زیر ازحلقه جابه‌جائی $C^\infty(M, \mathbb{R})$ را درنظر بگیرید:

$$C^\infty(M)_p = \left\{ f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \mid f(p) = 0 \right\}$$

اگر $l : C^\infty(M)_p \longrightarrow \mathbb{R}$ یک نگاشت خطی باشد بطوریکه به ازای هر $f,g \in C^\infty(M)_p$ داشته باشیم $l(f \cdot g) = 0$، در اینصورت نشان دهید l دارای یک توسیع یکتا به یک اشتقاق در p می‌باشد.

۳۵- در مساله قبل فرض کنید W زیرفضائی از $C^{\infty}(M)_p$ باشد که توسط تمام حاصلضرب‌هایی به فرم $f\cdot g$ که $f,g\in C^{\infty}(M)_p$ تولید شده باشد. نشان دهید فضای برداری اشتقاقهای در p، یکریخت با فضای برداری $Hom_{IR}(\frac{C^{\infty}(M)_p}{W}, IR)$ است.

۳۶- ثابت کنید منیفلد M همبند است اگر و فقط اگر TM همبند باشد.

۳۷- فرض کنید $f:M\longrightarrow N$ یک نگاشت C^r باشد، دراینصورت نشان دهید نگاشت $f_*:TM\longrightarrow TN$ یک نگاشت C^{r-1} است.

۳۸- فرض کنید $\begin{cases} f:M\longrightarrow N_1\times N_2 \\ x\mapsto (f_1(x), f_2(x)) \end{cases}$ یک نگاشت C^{∞} باشد. نشان دهید به ازای هر $v\in T_xM$ داریم $f_{*_x}(v)=(f_{1_{*x}}(v), f_{2_{*x}}(v))$.

۳۹- فرض کنید M,N دو منیفلد باشند، نشان دهید $T(M\times N)\cong TM\times TN$.

۴۰-نگاشت $\varphi:IR^2\longrightarrow IR^2$ را با ضابطه $\varphi(x,y)=(xe^y+y\ ,\ xe^y+\lambda y)$ که در آن $\lambda\in IR$ می‌باشد، در نظر بگیرید. مطلوبست:

الف) مقادیری از λ بطوریکه φ دیفئومورفیسم باشد.

ب) مقادیری از λ بطوریکه φ دیفئومورفیسم و حافظ جهت باشد.

۴۱- فرض کنید M یک منیفلد C^{∞} باشد. ثابت کنید چه M جهت‌پذیر باشد و چه نباشد منیفلد TM همواره جهت‌پذیر است.

۴۲- ثابت کنید منیفلد $M\times N$ جهت‌پذیر است اگر وفقط اگر M و N هردو جهت‌پذیر باشند.

۴۳- الف) اگر $f:M\xrightarrow{C^{\infty}}N$ یک دیفئومورفیسم و M منیفلدی جهت‌پذیر باشد، دراینصورت ثابت کنید N نیز جهت‌پذیر خواهد بود.

ب) آیا منیفلد M چنان موجود است بطوریکه $TM\cong IP_n(IR)$، که در آن $IP_n(IR)$ فضای تصویری حقیقی $n-$بُعدی است.

۴۴- روی $IR\times[0,1]$ رابطه هم‌ارزی~ را چنان در نظر می‌گیریم که $(0,t)$ و $(1,-t)$ هم‌ارز باشند. قرار می‌دهیم $M=[0,1]/_{\sim}$. M را نوار موبیوس می‌نامیم. نشان دهید:

الف) M یک منیفلد ۲- بُعدی است.

ب) M منیفلد جهت‌پذیر نیست.

۴۵- منیفلد m-بُعدی M را توازی‌پذیر می‌نامیم هرگاه $TM \cong M \times \mathbb{R}^m$. نشان دهید:

الف) اگر M توازی‌پذیر باشد، آنگاه TM نیز توازی‌پذیر است.

ب) حاصلضرب دو منیفلد توازی‌پذیر، خود توازی‌پذیر است.

۴۶- ثابت کنید S^1 توازی‌پذیر است.

۴۷- آیا در حالت کلی هر منیفلد یک بُعدی توازی‌پذیر است؟

۴۸- ثابت کنید هر منیفلد توازی‌پذیری یک منیفلد جهت‌پذیر نیز می‌باشد. سپس نشان دهید عکس این حکم برقرار نیست.

۴۹- فرض کنید $g : M \longrightarrow M$ یک دیفئومورفیسم و $f : M \longrightarrow N$ یک نگاشت C^∞ باشند. نشان دهید:

$$\forall p \in M \qquad Rank(f \circ g)(p) = Rank(f)(g(p))$$

۵۰- فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}^m$ باشد. نشان دهید نمودار f یک منیفلد هموار می‌باشد و بُعد آنرا نیز تعیین کنید.

۵۱- آیا زیرمنیفلد یک منیفلد جهت‌پذیر، خود جهت‌پذیر است؟

۵۲- فرض کنید $O(3)$ مجموعه ماتریسهای متعامد ۳×۳ باشد. $O(3)$ را به عنوان یک زیرفضای توپولوژی از $\mathbb{R}^9$ در نظر بگیرید و تابع $f : \mathbb{R}^9 \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}^6$ را چنان بیابیدکه $O(3) = f^{-1}(\circ)$ باشد و از آن نتیجه بگیرید $O(3)$ یک منیفلد ۳-بُعدی و فشرده است.

۵۳- فرض کنید M مجموعه تمام ماتریسهای ۲×۲ مانند A باشد که $det(A) = 1$ و $A^T \cdot A$ قطری باشند. نشان دهید M یک منیفلد است و سپس بُعد آنرا تعیین کنید.

۵۴- فرض کنید:

$$\begin{cases} c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ t \mapsto (Cost, Sint, Cos(at), Sin(at)) \end{cases}$$

و $M = c(\mathbb{R})$ باشد. نشان دهید هرگاه a یک عدد گنگ باشد، M یک زیرمنیفلد $\mathbb{R}^4$ نمی‌باشد.

۵۵- فرض کنید M و N دو منیفلد فشرده همبعد، $f : M \xrightarrow{C^\infty} N$ و $q \in f(M)$ یک نقطه عادی باشند. در اینصورت نشان دهید:

الف) توپولوژی القائی از M روی $f^{-1}(q)$ توپولوژی گسسته است.

ب) $f^{-1}(q)$ متناهی است.

۵۶- نشان دهید نمی‌توان نگاشتی C^∞ مانند $f : \mathbb{RP}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow S^2$ یافت بطوریکه به ازای یک مقدار عادی c از آن $f^{-1}(c)$ دیفئومورف با $\mathbb{RP}^1(\mathbb{R})$ شود.

۵۷- ماتریس $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ را عادی می‌نامیم هرگاه $det(I+A) \neq 0$ باشد. حال فرض کنید $N \subset M_{n\times n}(\mathbb{R})$ مجموعه تمام ماتریسهای عادی باشد. ثابت کنید:

الف) N یک منیفلد n^2-بُعدی است.

ب) هرگاه $\sigma : N \longrightarrow N$ با ضابطه $\sigma(A) = (I-A)\cdot(I+A)^{-1}$ تعریف گردد، نشان دهید σ خوش‌تعریف است. یعنی $\sigma(A) \in N$ می‌باشد. ($\sigma(A)$ را تصویر کیلی A می‌نامند).

ج) σ بازگشتی است. یعنی به ازای هر $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$، $\sigma \circ \sigma(A) = A$.

د) σ یک دیفئومورفیسم منیفلدهاست.

ه) مطلوب است ضابطه σ_* و محاسبه رتبه σ.

و) $N \cap O(n)$ یک منیفلد است.

۵۸- فرض کنید $M \subset M_{n\times n}(\mathbb{R})$ مجموعه ماتریس‌های پادمتقارن باشد. با توجه به مسئله قبلی ثابت کنید:

الف) M یک منیفلد $\frac{n(n-1)}{2}$- بُعدی است.

ب) $N \cap M$ یک منیفلد است.

۵۹- فرض کنید M و N دو منیفلد باشند و $g : M \xrightarrow{C^\infty} N$ دارای رتبه ثابت باشد. نشان دهید به ازای هر $c \in g(M)$، $g^{-1}(c)$ یک زیرمنیفلد M می‌باشد و بعلاوه:

$$\forall x \in g^{-1}(c) \;\; T_x(g^{-1}(c)) = ker(g_{*_x})$$

۶۰- درهر یک ازحالات زیرفضای مماس در نقطه داده شده را بیابید.

الف) $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\right\}$ و $p = (0,0,1)$

ب) $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 1\right\}$ و $p = (0,0,1)$

۶۱- فرض کنید $M = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2+y^2 = 1, z^2+t^2 = 1\right\}$ باشد.

الف) ثابت کنید M یک زیر منیفلد ۲-بُعدی از $\mathbb{R}^4$ است.

ب) فضای مماس بر M را در یک نقطه دلخواه از آن بیابید.

ج) نشان دهید M توازی‌پذیر است.

۶۲- فرض کنید $g \in GL(n,\mathbb{R})$ باشد. نشان دهید $T_g(GL(n,\mathbb{R})) \cong M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

۶۳- برای هر یک از نگاشتهای زیر تعیین کنید کدام مجموعه‌های تراز، زیرمنیفلد هستند. مجموعه‌های تراز را تا آنجا که می‌توانید شناسایی کنید.

الف) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ، $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

ب) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ ، $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 - 4)^2 + z^2 - 1$.

ج) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ ، $f(x,y,z) = [4x^2(1-x^2) - y^2]^2 + z^2 - \frac{1}{4}$.

۶۴- فرض کنید $f : M \xrightarrow{C^\infty} N$ یک سوبمرسیون باشد. نشان دهید f یک نگاشت باز است. یعنی تصویر هر بازی تحت نگاشت f مجدداً باز است.

۶۵- فرض کنید $f : M \xrightarrow{C^\infty} N$ یک سوبمرسیونِ پوشا و $g : N \longrightarrow P$ نگاشتی باشند که $g \circ f : M \longrightarrow P$ نگاشتی C^∞ باشد. نشان دهید g نیز C^∞ است.

۶۶- اگر در $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$، f پیوسته، g ایمرسیون و $g \circ f$ نگاشت C^∞ باشند، دراینصورت نشان دهید f نیز C^∞ خواهد بود.

۶۷- آیا ترکیب دو ایمرسیون، مجدداً یک ایمرسیون است؟

۶۸- آیا ترکیب دو سوبمرسیون، مجدداً یک سوبمرسیون است؟

۶۹- نشان دهید هیچ ایمرسیونی از S^1 به $\mathbb{R}$ وجود ندارد. (به دو روش)

۷۰- آیا بطری کِلاین را می‌توان در $\mathbb{R}^3$ نشاند؟ (اگرچه بطری کِلاین یک زیرمنیفلد ایمرسه $\mathbb{R}^3$ می‌باشد).

۷۱- نشان دهید هر منیفلد فشرده با یک زیرمنیفلد $\mathbb{R}^d$ به ازای یک $d \in \mathbb{N}$ دیفئومورف است.

۷۲- یک نگاشت پیوسته میان دو فضای توپولوژیک را سِره می‌نامیم اگر تصویر وارون هر مجموعه فشرده، فشرده باشد. اِمبدینگ (نشاننده) C^1 مثال بزنید که سِره نباشد.

۷۳-فرض کنید M و N دو منیفلد C^r و $f : M \longrightarrow N$ یک نگاشت C^r باشند. در این صورت نشان دهید $x \mapsto (x, f(x))$ یک اِمبدینگ است.

۷۴- فرض کنید G یک گروه توپولوژیک و e عضو خنثی در آن باشند. همچنین

$$\Delta = \{(g,g) \mid g \in G\} \subseteq G \times G$$

قطر $G \times G$ باشد. نشان دهید G هاسدورف است اگر و تنها اگر Δ در $G \times G$ بسته باشد.

۷۵- فرض کنید G یک گروه توپولوژیک باشد. نشان دهید G هاسدورف است اگر و فقط اگر $\{e\}$ در G بسته باشد که در آن e عضو خنثی می‌باشد.

۷۶- در گروه لیِ همبند G نشان دهید هر همسایگی عضوخنثی، G را تولید می‌کند.

۷۷- ثابت کنید بستارهر زیرگروه از یک گروه توپولوژیک، خود یک زیرگروه است.

۷۸- نشان دهید اگر گروه توپولوژیک G همبند باشد، آنگاه زیرگروه جابجاگر $[G,G]$ نیز همبند است.

۷۹- ثابت کنید $SL(n)$ فشرده نیست.

۸۰- ثابت کنید $SU(۲)$ به عنوان یک منیفلد حقیقی با $S^۳$ یکریخت است. سپس نشان دهید $S^۳$ می‌تواند ساختار گروه لی بپذیرد و جبر لی آن را محاسبه کنید.

(یادآوری: $SU(n)=\{A\in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid A\cdot A^{*}=I, \det(A)=۱\}$)

۸۱- فضای هامیلتونی عبارتست از $\mathbb{H}=Span_{\mathbb{R}}(۱,i,j,k)$ که در آن

$$i^۲=j^۲=k^۲=-۱$$
$$jk=-kj=i$$
$$ij=-ji=k$$
$$.ki=-ik=j$$

گروه هامیلتونی عبارتست از $\mathbb{H}^{*}=\mathbb{H}-\{(۰,۰,۰,۰)\}$. با در نظر گرفتن $S^۳$ به عنوان اعضای یکانی گروه همیلتونی، نشان دهید $S^۳$ گروه لی است و جبر لی آن را محاسبه کنید.

۸۲- ثابت کنید $U(۱)\cong S^۱$ و نتیجه بگیرید $S^۱$ میتواند ساختار گروه لی بپذیرد. سپس جبر لی آنرا محاسبه کنید.

۸۳- نشان دهید S^n فقط به ازای $n=۱,۳$ می‌تواند ساختار گروه لی بپذیرد.

۸۴- هرگاه $SO(۳)=\{A\in M_{۳\times ۳}(\mathbb{R}) \mid A\cdot A^{t}=I, det(A)=۱\}$ باشد، نشان دهید در اینصورت:

$$SO(۳)\cong \mathbb{RP}^{۳}(\mathbb{R})$$

۸۵- ثابت کنید $SO(n)$ مؤلفه همبندی عضو خنثی در $O(n)$ می‌باشد.

۸۶- الف) ثابت کنید $O(n)$ یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر است.

ب) نشان دهید $GL(n,\mathbb{R})\cong O(n)\times \mathbb{R}^{\frac{n(n+۱)}{۲}}$ سپس بُعد $O(n)$ را حساب کنید.

۸۷- فرض کنید $J=\begin{bmatrix} ۰ & I \\ -I & ۰ \end{bmatrix}\in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$ باشد که در آن $I\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ماتریس همانی است. حال قرار می‌دهیم

$$Sp(n,\mathbb{R})=\{A\in M_{۲n\times ۲n}(\mathbb{R}) \mid A^{T}\cdot J\cdot A=J\}$$

الف) نشان دهید $Sp(n,\mathbb{R})$ زیرگروه لی $GL(۲n)$ می‌باشد.

ب) جبرلی $Sp(n, \mathbb{R})$ را بدست آورید، سپس بُعدآن را معین کنید.

(تذکر: اعضای $Sp(n, \mathbb{R})$ را ماتریسهای (*Symplectic*) می‌نامند).

۸۸- هرگاه S^1 به عنوان گروه لی با $U(1)$ یکی گرفته شود و $\phi: S^1 \longrightarrow (\mathbb{R},+)$ یک هomomورفیسم گروههای لی باشد. در اینصورت نشان دهید که ϕ هomomورفیسم صفر است.

۸۹- ثابت کنید هرگروه لی جهت‌پذیر است. (تمرین ۴۸ ملاحظه گردد).

۹۰- فرض کنید $I \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ماتریس همانی باشد، مطلوبست:

الف) فضای مماس بر $O(n)$ در I.

ب) فضای مماس بر $SL(n)$ در I.

۹۱- هرگاه گروه G روی منیفلد M بطور ترایا عمل کند و $x, y \in M$ باشند، نشان دهید گروههای پایاگر x, y یعنی G_x, G_y با یکدیگر مزدوجند.

۹۲- ثابت کنید $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ یک منیفلد همگن می‌باشد. در واقع ثابت کنید:

$$\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \cong \frac{SO(n+1)}{O(n)}$$

۹۳- اگر میدان برداری X روی منیفلد M کامل و $U \subset M$ باز باشند، آیا لزوماً $X\big|_U$ تحدید X به U، نیز کامل است؟

۹۴- اگر میدان برداری X روی منیفلد M کامل و $f \in C^\infty(M)$ باشند، آیا لزوماً $f \cdot X$ نیز روی M کامل است؟

۹۵- هرگاه $X = y\frac{\partial}{\partial x}$,$Y = \frac{x^2}{2}\frac{\partial}{\partial y}$ دو میدان برداری روی $\mathbb{R}^2$ باشند و تعریف کنیم $Z = [X, Y]$، در اینصورت نشان دهید شار موضعی Z عبارتست از :

$$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \phi\ \ (t, (x, y)) = \left(\frac{2x}{2 + xt}\ ,\ \frac{y}{4}(tx+2)^2\right)$$

سپس نتیجه بگیرید میدان برداری Z کامل نیست.

۹۶- ثابت کنید منیفلد m-بُعدی M توازی‌پذیراست اگروفقطاگر m میدان برداری $X_1, X_2, \cdots, X_m$ روی M چنان یافت شوند که در هرنقطه $p \in M$، بردارهای $X_1(p), X_2(p), \cdots, X_m(p)$ در $T_P(M)$ مستقل خطی باشند.

۹۷- الف) نشان دهید هر میدان برداری روی S^{2n} حداقل در یک نقطه از S^{2n} صفر می‌شود.

ب) ثابت کنید S^{2n} به ازای $n \in \mathbb{N}$، توازی‌پذیر نیست.

۹۸- سه میدان برداری زیر را روی $\mathbb{R}^4 - \{0\}$ در نظر بگیرید:

$$X_1 = -x_2\partial_1 + x_1\partial_2 + x_4\partial_3 - x_3\partial_4$$
$$X_2 = -x_4\partial_1 + x_3\partial_2 - x_2\partial_3 + x_1\partial_4$$
$$X_3 = -x_3\partial_1 - x_4\partial_2 + x_1\partial_3 + x_2\partial_4$$

که درآن (x_1, x_2, x_3, x_4) مختصات دکارتی روی $\mathbb{R}^4$ و $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ می‌باشند.

الف) نشان دهید X_i $(i = 1,2,3)$ میدان‌های برداری همه جا ناصفر روی S^3 تعریف می‌کنند.

ب) نشان دهید به ازای هر $p \in S^3$، $\{X_1(p), X_2(p), X_3(p)\}$ بردارهایی مماس بر S^3 در نقطه p می‌باشند و تشکیل یک پایه برای $T_p(S^3)$ می‌دهند.

ج) نتیجه بگیرید $T(S^3) \cong S^3 \times \mathbb{R}^3$، یعنی S^3 توازی‌پذیر است.

د) خم‌های انتگرال X_1 را بیابید.

ه) نشان دهید $\begin{cases} f : S^3 \to \mathbb{R} \\ f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3x_1 - x_2x_4 \end{cases}$ در طول خم‌های انتگرال X_1 ثابت است.

و) با توجه به مساله ۸۱ نشان دهید میدان‌های برداری X_1، X_2 و X_3 به ترتیب میدان‌های برداری راست پایای تولید شده توسط i، j و k می‌باشند.

۹۹- فرض کنید $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y) = x^2 - y^2$ باشد. همچنین فرض کنید

$$\alpha_n, \beta_n, \gamma_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

خم‌های انتگرال $grad(f) = \nabla f$ با شرایط زیر باشند:

$$\alpha_n(0) = (\frac{1}{n^2}, 1) \quad , \beta_n(0) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \quad , \gamma_n(0) = (1, \frac{1}{n^2})$$

در اینصورت مطلوبست:

الف) ضابطه‌های صریح α , β , γ.

ب) $lim_{n\to\infty}\alpha_n(t)$، $lim_{n\to\infty}\beta_n(t)$ و $lim_{n\to\infty}\gamma_n(t)$

۱۰۰- فرض کنید

$$\begin{cases} \varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow T^2 \\ (\theta_1, \theta_2) \mapsto (e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) \end{cases}$$

و Y یک میدان برداری روی $\mathbb{R}^2$ باشد. تحت چه شرطی Y یک میدان برداری نسبت به φ روی T^2 القا می‌کند؟ نتیجه بگیرید T^2 یک منیفلد توازی‌پذیر است.

۱۰۱- فرض کنید $X=(x+y)\frac{\partial}{\partial x}+(x-y)\frac{\partial}{\partial y}$ یک میدان برداری روی $\mathbb{R}^2$ باشد. دراینصورت:

الف) خم‌های انتگرال X را بیابید.

ب) خم انتگرالی از X مانند γ را با شرط $\gamma(0)=(0,2\sqrt{2})$ بیابید. سپس بزرگترین بازه‌ای را بیابید که γ روی آن تعریف شده باشد.

ج) آیا X یک میدان برداری کامل است؟

۱۰۲- اگر شار موضعی ϕ روی $\mathbb{R}$ به صورت مقابل $\begin{cases}\phi:\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}\xrightarrow{C^\infty}\mathbb{R}\\ \phi(t,x)=g(t)\cdot h(x)\end{cases}$ باشد که در آن $g,h:\ \mathbb{R}\xrightarrow{C^\infty}\mathbb{R}$ می‌باشند. دراینصورت g,h را تعیین کنید. سپس میدان برداری مولد ϕ را بیابید.

۱۰۳- اگر $f:\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}\xrightarrow{C^\infty}\mathbb{R}$ نسبت به مؤلفه اولش خطی باشد، آیا f می‌تواند یک شارموضعی روی $\mathbb{R}$ باشد؟

۱۰۴- فرض کنید M یک منیفلد باشد. میدان برداری L را روی TM به صورت زیرتعریف می‌کنیم:

$$\forall\ v\in T_x(M)\quad L(v)=(v,v)$$

شار موضعی L را بیابید و نشان دهید آن یک میدان برداری کامل است.

۱۰۵- فرض کنید $M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2<1\right\}$ باشد. نشان دهید که

$$\phi(t,(x,y))=(x,y+t(x+1)^{-1})$$

یک شار موضعی روی M است. سپس میدان برداری مولد آنرا بیابید.

۱۰۶- هرگاه $X=-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}$ یک میدان برداری روی $\mathbb{R}^2$ و $\{\phi_t\}$ گروه تک پارامتری آن باشند و همچنین $\begin{cases}f:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\ f(x,y)=x^2+y^2\end{cases}$، با استفاده از تساوی

$$X\cdot f(x,y)=\lim_{t\to 0}\frac{f(\varphi_t(x,y))-f(x,y)}{t}$$

نگاشت $X\cdot f$ را بیابید.

۱۰۷- نشان دهید جمع و کروشه لی دو میدان برداری کامل، لزوماً کامل نیست.

۱۰۸- فرض کنید X یک میدان برداری روی $\mathbb{R}^n$ باشد، بطوریکه به ازای هر $i = ۱,۲,۳,\cdots,n$ داشته باشیم $[X,\frac{\partial}{\partial x_i}] = ۰$. نشان دهید X با ضرائب ثابت است.

۱۰۹- فرض کنید $M = \mathbb{R}^۲ - \{۰\}$ باشد. نشان دهید در اینصورت نگاشت

$$\phi(t,(r,\theta)) = (re^{-t} + (1-e^{-t}), \theta + t)$$

یک شارموضعی روی M است. سپس میدان برداری مولد آنرا بیابید. (توجه کنید که (r,θ) مختصات قطبی روی $\mathbb{R}^۲$ می‌باشد).

۱۱۰- سه میدان برداری مانند X,Y,Z روی $\mathbb{R}^۳$ چنان بیابید که در روابط زیر صدق کنند:

$$[X,Y] = ۰\ ,\ [X,Z] = ۰\ , [Y,Z] \neq ۰$$

۱۱۱- فرض کنید $M = \mathbb{R}^۲$ و

$$A = \left\{ a\frac{\partial}{\partial x} + b\, f(x)\frac{\partial}{\partial y} \;\middle|\; a,b \in \mathbb{R}\ , \forall n \in \mathbb{N}_{۰}\ f^{(n)}(۰) = ۰ \right\}$$

باشند. نشان دهید دراینصورت به ازای هر $X,Y \in A$ داریم $[X,Y] \in A$.

۱۱۲- فرض کنید X یک میدان برداری روی منیفلد M چنان باشد که در $p \in M$ ، $X(p) \neq ۰$. نشان دهید یک دستگاه مختصات (x,U) حول p چنان موجود است که در آن $X = \frac{\partial}{\partial x^۱}$ باشد.

۱۱۳- هرگاه $f,g \in C^{\infty}(M)$ و D یک اشتقاق روی M باشد و روی یک باز $U \subseteq M$ توابع f و g با یکدیگر برابر باشند، ثابت کنید توابع $D(f)$ و $D(g)$ نیز روی U با یکدیگر برابرند.

۱۱۴- محمل یک میدان برداری $X \in \chi(M)$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Supp\, X := \overline{\{\, p \in M \;|\; X(p) \neq ۰ \}}$$

ثابت کنید هرگاه محمل یک میدان برداری فشرده باشد، آنگاه میدان برداری کامل است.

۱۱۵- الف) هرگاه X یک زیرمجموعه باز $\mathbb{R}^n$ و $C^{\circ}(X,\mathbb{R})$ مجموعه تمام توابع پیوسته از X به $\mathbb{R}$ باشد، $D : C^{\circ}(X,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک اشتقاق در $p \in X$ می‌نامیم هرگاه:

۱) D ، $\mathbb{R}-$خطی باشد.

۲) D لایپنیتزی باشد. یعنی

$$\forall\, f,g \in C^{\circ}(X,\mathbb{R}) \quad D(fg) = D(f).g(p) + f(p).D(g)$$

نشان دهید در این حالت $D = ۰$ خواهد بود.

ب) آیا حکم قسمت الف برای $C^1(X, \mathbb{R})$ نیز برقرار است؟

۱۱۶- نشان دهید دلتای کرونکر یک تانسور از نوع $(1,1)$ تعریف می‌کند.

۱۱۷- فرض کنید $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ معادله رویه‌ای در $\mathbb{R}^3$ باشد. نشان دهید که حاصلضرب مؤلفه‌های گرادیان f، $\left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_k} \;\middle|\; i,j,k = 1,2,3 \right\}$ یک تانسور از نوع $(0,3)$ تعریف می‌کند. سپس حکم را برای $\mathbb{R}^n$ بیان و اثبات کنید.

۱۱۸- برای دو فرم دیفرانسیل α, β روی منیفلد M، $[\alpha, \beta]$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$[\alpha, \beta] = \alpha \wedge \beta - \beta \wedge \alpha$$

نشان دهید برای فرمهای دیفرانسیل α, β, γ روی M داریم $[[\alpha, \beta], \gamma] = 0$.

۱۱۹- فرض کنید $\alpha = (x^3 + y^3 + z^3)(dx \wedge dy + dz \wedge dx + dy \wedge dz)$ یک ۲-فرم دیفرانسیل روی $\mathbb{R}^3$ و $\begin{cases} f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ f(s,t) = (s, t, s^2 + t^2) \end{cases}$ باشند. مطلوبست $f^*(\alpha)$.

۱۲۰- $X = y\frac{\partial}{\partial x} + y^2 x\frac{\partial}{\partial y}$، $Y = (x+y)\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ و $\alpha = -dx + xdy$ را روی $\mathbb{R}^2$ در نظر بگیرید. مطلوبست:

الف) $[X, Y]$

ب) $L_X(\alpha)$

ج) $L_Y(d\alpha)$

۱۲۱- نشان دهید فضای فرمهای دیفرانسیل بسته روی منیفلد M نسبت به عمل ضرب گُوِه‌ای تشکیل یک حلقه می‌دهد که زیرفضای فرمهای دیفرانسیل کامل، یک ایدال آن می‌باشد.

۱۲۲- فرض کنید $x(u_1, u_2) = (X(u_1, u_2), Y(u_1, u_2), Z(u_1, u_2))$ معادله پارامتری یک رویه در $\mathbb{R}^3$ باشد. حال ۲-فرمی دلخواه زیر را روی $\mathbb{R}^3$ در نظر بگیرید:

$$\omega = f_1 dx^2 \wedge dx^3 + f_2 dx^3 \wedge dx^1 + f_3 dx^1 \wedge dx^2$$

و قرار دهید $V = \sum_{i=1}^{3} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. نشان دهید:

$$x^*(\omega) = < V(x(u_1, u_2)), (x_*(\frac{\partial}{\partial u_1}) \times x_*(\frac{\partial}{\partial u_2})) > du_1 \wedge du_2$$

۱۲۳- نگاشت جزئیت $S^2 \longrightarrow IR^3$ را به j نمایش می‌دهیم و برای $p \in S^2$، T_pS^2 و $j_{*_p}(T_pS^2)$ را یکی می‌گیریم. در این صورت نشان دهید برای $p=(x,y,z) \in S^2$،

$$X(p) = (y-z)\frac{\partial}{\partial x}(p) + (z-x)\frac{\partial}{\partial y}(p) + (x-y)\frac{\partial}{\partial z}(p)$$

یک میدان برداری هموار روی S^2 تعریف می‌کند.

اگر $\alpha = x\,dy \wedge dz \in \Lambda^2(IR^3)$ و $\beta = dx \wedge dy \wedge dz \in \Lambda^3(IR^3)$ باشند، هر یک از $L_X j^*\alpha$ و $L_X j^*\beta$ را محاسبه کنید.

۱۲۴- فرض کنید G یک گروه لی فشرده و همبند است. ثابت کنید هر عنصر حجم ناوردای چپ روی G، ناوردای راست نیز می باشد.

۱۲۵- (۱,۱)- تانسور $J = \frac{1}{Cosh\,x}\frac{\partial}{\partial y} \otimes dx + Cosh\,x\frac{\partial}{\partial x} \otimes dy$ را روی IR^2 در نظر بگیرید.

هرگاه $D = \{ X \in \chi(M)\ ,\ JX = X \}$ باشد، به ازای $p \in IR^2$ قرار می‌دهیم

$$D_p := Span\{ X(p)\ ,\ X \in D \}$$

الف) اگر $N = \{(x,y) \in IR^2\ ,\ y = f(x)\}$ باشد، مطلوبست تعیین f بطوریکه

$$\forall q \in N \quad T_qN = D_q$$

(N را یک منیفلد انتگرال D می‌نامند).

ب) مطلوبست $X \in D$ بطوریکه $L_X J = 0$.

۱۲۶- فرض کنید w یک $(2k+1)$-فرمی روی منیفلد M و $f : M \longrightarrow IR$ تابعی ناصفر باشد،

بطوریکه $d(fw) = 0$. نشان دهید $w \wedge dw = 0$.

۱۲۷- فرض کنید M^n یک منیفلد هموار و جهت‌پذیر با عنصر حجم ω است. اگر $\alpha \in A^{n-1}(M)$ باشد، ثابت کنید $X \in \chi(M)$ وجود دارد بطوریکه $i_X\omega = \alpha$.

۱۲۸- نشان دهید احکام زیر برقرارند: (M یک منیفلد C^∞ است)

الف) اگر $\omega \in Z^r(M)$ و $\psi \in Z^s(M)$ باشند، آنگاه $\omega \wedge \psi \in Z^{r+s}(M)$.

ب) اگر $\omega \in Z^r(M)$ و $\psi \in B^s(M)$ باشند، آنگاه $\omega \wedge \psi \in B^{r+s}(M)$.

ج) اگر $\omega \in B^r(M)$ و $\psi \in B^s(M)$ باشند، آنگاه $\omega \wedge \psi \in B^{r+s}(M)$.

۱۲۹- ثابت کنید ۱-فرم‌های دیفرانسیل‌پذیر

$$\omega^1,\ldots,\omega^k$$

روی منیفلدهای $n-$بُعدی M، مستقل خطی‌اند اگروتنهااگر $\omega^1\wedge\ldots\wedge\omega^k\neq 0$.

۱۳۰- فرض کنید $\omega^1,\ldots,\omega^k$، ۱-فرم‌های دیفرانسیل‌پذیر و مستقل خطی روی منیفلد $n-$بُعدی M باشند. ثابت کنید فرم دیفرانسیل‌پذیر θ، متعلق به ایدال تولید شده توسط $\omega^1,\ldots,\omega^k$ است، اگروتنهااگر $\theta\wedge\omega^1\wedge\ldots\wedge\omega^k=0$.