$$L_X\, j^*\alpha = L_X\alpha = L_{(y-z)\frac{\partial}{\partial x}(p)-(z-x)\frac{\partial}{\partial y}(p)+(x-y)\frac{\partial}{\partial z}(p)}(xdy\wedge dz) =$$

$$L_{(y-z)\frac{\partial}{\partial x}(p)}xdy\wedge dz + L_{(z-x)\frac{\partial}{\partial y}(p)}(xdy\wedge dz) + L_{(x-y)\frac{\partial}{\partial z}(p)}(xdy\wedge dz) =$$

$$(y-z)L_{\frac{\partial}{\partial x}(p)}(xdy\wedge dz) - d(y-z)\wedge i_{\frac{\partial}{\partial x}}(xdy\wedge dz) + (z-x)L_{\frac{\partial}{\partial y}}(xdy\wedge dz) +$$

$$d(z-x)\wedge i_{\frac{\partial}{\partial y}}(xdy\wedge dz) + (x-y)L_{\frac{\partial}{\partial z}}(xdy\wedge dz) + d(x-y)\wedge i_{\frac{\partial}{\partial z}}(xdy\wedge dz) =$$

$$(y-z)\frac{\partial x}{\partial x}\,dy\wedge dz + (z-x)\frac{\partial x}{\partial y}\,dy\wedge dz$$

$$+ (dz-dx)\wedge x\,dy\wedge dz + (x-y)\frac{\partial x}{\partial z}dy\wedge dz$$

$$+ (dx-dy)\wedge(-1)^{2-1}x$$

$$= (y-z)dy\wedge dz + xdz\wedge dz + xdx\wedge dz - xdx\wedge dy + xdy\wedge dy$$

بنابراین:

$$\boxed{L_X\, j^*\alpha = L_X\alpha = (y-z)dy\wedge dz - xdx\wedge dz - xdx\wedge dy}$$

$$j^*\beta = j^*(dx\wedge dy\wedge dz) = d(x\circ j)\wedge d(y\circ j)\wedge d(z\circ j) = dx\wedge dy\wedge dz = \beta$$

$$L_X\, j^*\beta = L_X\beta$$

$$= L_{(y-z)\frac{\partial}{\partial x}}(dx\wedge dy\wedge dz) + L_{(z-x)\frac{\partial}{\partial y}}(dx\wedge dy\wedge dz) + L_{(x-y)\frac{\partial}{\partial z}}(dx\wedge dy\wedge dz)$$

$$= (dy-dz)\wedge dy\wedge dz + d(y-z)\wedge i_{\frac{\partial}{\partial x}}(dx\wedge dy\wedge dz)$$

$$+ (z-x)L_{\frac{\partial}{\partial y}}(dx\wedge dy\wedge dz) + d(z-x)\wedge i_{\frac{\partial}{\partial y}}(dx\wedge dy\wedge dz) +$$

$$+ (x-y)L_{\frac{\partial}{\partial z}}(dx\wedge dy\wedge dz) + d(x-y)\wedge i_{\frac{\partial}{\partial z}}(dx\wedge dy\wedge dz)$$

$$= (dy - dz) \wedge dy \wedge dz + (-1)^{2-1}(dz - dx) + (dx - dy) \wedge dx \wedge dy = 0$$

بنابراین:

$$\boxed{L_X\, j^* \beta = 0}$$

۱۲۴- توجه کنید که برای هر $g \in G$، $R_g^* w$ ناوردای چپ است، به کمک این مطلب همئومورفیسم پیوسته‌ای از G به گروه $(\mathbb{R} - \{0\}\ ,\ \cdot\ )$ می‌سازیم.

داریم:

$$L_{g_1} \circ R_{g_2}(x) = g_1 x g_2 = R_{g_2} \circ L_{g_1} \Rightarrow R^*_{g_2} \circ L^*_{g_1} = L^*_{g_1} \circ R^*_{g_2}$$

نشان می‌دهیم که اگر w ناوردای چپ باشد، $R_g^* w$ نیز ناوردای چپ است. در واقع

$$L_a^*(R_g^* w) = L_a^* \circ R_g^* w = (R_g^* \circ L_a^*)(w) = R_g^*(L_a^* w) = R_g^* w$$

چون $R_g^* w$ نیز یک عنصر حجم است پس وجود دارد $\alpha_g \in \mathbb{R} - \{0\}$ بطوریکه:

$$R_g^* w = \alpha_g w$$

نگاشت $h : G \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$h(g) = \alpha_g$$

h یک همئومورفیسم است.

$$R_{g_1 g_2}(x) = x g_1 g_2 = R_{g_2}(R_{g_1}(x))$$

$$\alpha_{g_1 g_2} w = R^*_{g_1 g_2} w = (R_{g_2} R_{g_1})^* w = R^*_{g_1} R^*_{g_2} w = R^*_{g_1} \alpha_{g_2} w = \alpha_{g_1} \alpha_{g_2} w$$

$$h(g_1 g_2) = \alpha_{g_1 g_2} = \alpha_{g_1} \alpha_{g_2} = h(g_1) h(g_2)$$

چون G همبند و فشرده است از پیوستگی h نتیجه می‌شود که $h(G)$ نیز همبند و فشرده در $\mathbb{R} - \{0\}$ است. اما تنها زیرگروه همبند و فشرده در $\mathbb{R} - \{0\}$، گروه تک عضوی $\{1\}$ است، در نتیجه $h(G) = \{1\}$ و بنابراین به ازای هر $g \in G$، $h(g) = 1$ و لذا:

$$R_g^* w = \alpha_g w = w$$

پس w ناوردای راست است.

۱۲۵- الف) اگر $X = f \dfrac{\partial}{\partial x} + h \dfrac{\partial}{\partial y} \in D$ که $f, h \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ در این صورت:

$$J(X)=\left(\frac{1}{Cosh\,x}\frac{\partial}{\partial y}\otimes dx+Cosh\,x\frac{\partial}{\partial x}\otimes dy\right)\left(f\frac{\partial}{\partial x}+h\frac{\partial}{\partial y}\right)$$
$$=\frac{f}{Cosh\,x}\frac{\partial}{\partial y}+h\,Cosh\,x\frac{\partial}{\partial x}$$

بنابراین از $J(X)=X$ نتیجه می‌گردد که $f=h\,Cosh\,x$. حال فرض کنیم $(x,y)\in N$ در این صورت:

$$dx/dt=(dy/dt)\,Cosh\,x$$

و در نتیجه $dx=dy/Cosh\,x$. بنابراین $y=arctan(sinhx)+c$، که در آن c یک مقدار ثابت است.

ب) داریم:

$$L_X J=\left(h_x\,Cosh\,x-\frac{f_y}{Cosh\,x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\otimes dx-\frac{\partial}{\partial y}\otimes dy\right)$$
$$+\left(h_y\,Cosh\,x+f\,Sinh\,x-f_x\,Cosh\,x\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\otimes dy-\frac{1}{Cosh^2 x}\frac{\partial}{\partial y}\otimes dx\right)=0$$

بعلاوه اگر $X\in D$ آنگاه $f=g\,Cosh\,x$ و با توجه به این رابطه و رابطه فوق خواهیم داشت:

$$\frac{\partial h}{\partial x}\,Cosh\,x=\frac{\partial h}{\partial y}$$

قرار دهید $u=2\,arctan(e^x)$. در این صورت خواهیم داشت $\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{1}{Cosh\,x}\frac{\partial h}{\partial u}$. بنابراین $\frac{\partial h}{\partial u}=\frac{\partial h}{\partial y}$. با در نظر گرفتن $t=u+y$ و $w=u-y$ خواهیم داشت:

$$0=\frac{\partial h}{\partial u}-\frac{\partial h}{\partial y}=2\frac{\partial h}{\partial w}$$

در نتیجه $h=h(u+y)=h(2\,arctan(e^x)+y)$ و در نهایت:

$$f=h(2\,arctan(e^x)+y)\,Cosh\,x$$

که در آن $h(۲\arctan(e^x)+y)$ یک تابع دیفرانسیل‌پذیر دلخواه می‌باشد که در شرایط مساله صدق می‌کند.

۱۲۶- داریم $d(fw)=df\wedge w+f\,dw$ و چون برای هر $p\in M$ ، $f(p)\neq ۰$ می‌باشد، نتیجه می‌شود $dw=-(\frac{۱}{f})df\wedge w$. حال از آنجا که w یک ۱- فرم دیفرانسیل‌پذیر است خواهیم داشت:

$$w\wedge dw=-(\frac{۱}{f})w\wedge df\wedge w=۰.$$

۱۲۷- روی کارت (ξ,U)، فرض می‌کنیم $w=f\;d\xi_۱\wedge\ldots\wedge d\xi_n$ ، $X=\sum_{j=۱}^{n}X_j\frac{\partial}{\partial\xi_j}$ و $\alpha=\sum_{۱\le i_۲<\cdots<i_n\le n}\alpha_{i_۲\cdots i_n}\;d\xi_{i_۲}\wedge\ldots\wedge d\xi_{i_n}$. در اینصورت:

$$i_X\omega=\sum_{j=۱}^{n}X_j\;\;f\;\;i_{\frac{\partial}{\partial\xi_j}}d\xi_۱\wedge\ldots\wedge d\xi_n=\sum_{j=۱}^{n}(-۱)^{j-۱}X_j\;\;f\;\;d\xi_۱\wedge\ldots\wedge d\hat{\xi}_j\wedge\ldots\wedge d\xi_n$$

$$=\sum_{۱\le i_۲<\cdots<i_n\le n}\alpha_{i_۲\cdots i_n}\;d\xi_{i_۲}\wedge\ldots\wedge d\xi_{i_n}=\alpha$$

در تساوی اخیر مقدار X_j برای $۱\le j\le n$ بدست می‌آید و در نتیجه میدان برداری X روی (ξ,U) مشخص می‌شود. حال با استفاده از قضیه افراز یکانی می‌توان یک میدان برداری سراسری روی کل منیفلد ساخت.

۱۲۸- حل قسمت (الف) و (ب) این مساله در خلال حل مساله ۱۲۱ آمده است. اما قسمت (ج) با توجه به اینکه $B^r(M)\subset Z^r(M)$ است، حالت خاصی از قسمت (ب) است.

۱۲۹- اگر $\omega^۱,\ldots,\omega^k$ مستقل خطی باشند، آنگاه می توان نشان داد که هر T_pM، به ازای $p\in M$ ، دارای یک پایه $\{v_۱,\ldots,v_k,\ldots,v_n\}$ می‌باشد، بطوریکه پایه

دوگانش، $\{\varphi^1,\ldots,\varphi^k,\ldots,\varphi^n\}$، در رابطه $\varphi^i=\omega^i\big|_p$، $(1\le i\le k)$، صدق می‌کند. بنابراین $\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^k$، عضوی از پایه $\mathrm{A}^k(M)$ می‌باشد. در نتیجه $\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^k\neq 0$.

برعکس، اگر $\omega^1,\ \ldots\ ,\omega^k$ وابسته خطی باشند (برهان خلف)، آنگاه نقطه‌ای مانند $p\in M$ وجود دارد، بطوریکه $\omega^i\big|_p=\sum_{j\neq i}a_j\omega^j\big|_p$، و بنابراین:

$$\omega^1\wedge\omega^2\wedge\cdots\wedge\omega^i\wedge\cdots\wedge\omega^k=\omega^1\wedge\omega^2\wedge\cdots\wedge\sum_{j\neq i}a_j\omega^j\wedge\ldots\wedge\omega^k=0$$

۱۳۰- فرض کنید I ایده‌ال تولید شده توسط ۱-فرمی‌های $\omega^1,\ \ldots\ ,\omega^r$ باشد. اگر $\theta\in I$ باشد، آنگاه بصورت زیر نوشته می شود:

$$\theta=\sum_{1\le i_1\le r}f_{i_1}\omega^{i_1}+\cdots+\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_{r-1}\le r}f_{i_1\cdots i_{r-1}}\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_{r-1}}+f\,\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^r$$

از انجاییکه به ازای هر ۱-فرم دیفرانسیل α داریم : $\alpha\wedge\alpha=0$، بنابراین:

$$\theta\wedge\omega^1\wedge\ldots\wedge\omega^r=0$$

برعکس، فرض می کنیم $\theta\wedge\omega^1\wedge\ldots\wedge\omega^r=0$ باشد. باید نشان دهیم $\theta\in I$. برای این منظور درهر نقطه از منیفلد، $\omega^1,\ \ldots\ ,\omega^r$ را به پایه $\omega^1,\ldots,\omega^r,\omega^{r+1},\ldots,\omega^n$ برای $A(M)$ گسترش می‌دهیم که درآن n بُعد منیفلد می‌باشد. از آنجاییکه $\theta\in I\subset A(M)$ بنابراین بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\theta=\sum_{1\le j_1\le n}g_{j_1}\omega^{j_1}+\cdots+\sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_r\le n}g_{j_1\cdots j_r}\omega^{j_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{j_r}+\cdots+g\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n$$

با توجه به فرض داریم $\theta\wedge\omega^1\wedge\ldots\wedge\omega^r=0$. بنابراین اگر $\{1,\ldots,r\}\cap\{j_1,\ldots,j_r\}\neq\varnothing$ باشد، آنگاه $\omega^{j_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{j_r}\wedge\omega^1\wedge\ldots\wedge\omega^r=0$.

همچنین اگر $\{1,\ldots,r\}\cap\{j_1,\ldots,j_r\}=\varnothing$ باشد، آنگاه داریم $g_{i_1,\ldots,i_r}=0$. در نتیجه θ باید بصورت زیر باشد و در نتیجه $\theta\in I$:

$$\theta=\sum_{1\le i_1\le r}f_{i_1}\omega^{i_1}+\cdots+\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_{r-1}\le r}f_{i_1\cdots i_{r-1}}\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_{r-1}}+f\,\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^r$$