۱۰۴- فرض می‌کنیم $\alpha(t)$ خم انتگرال L باشد. در این صورت با حل معادلات دیفرانسیل زیر می‌توان $\alpha(t)$ را یافت.

$$\begin{cases} v' = v \Rightarrow v' - v = 0 \Rightarrow v = c_1 e^t \\ w' = v \Rightarrow w' = v' = c_1 e^t \Rightarrow w = c_2 e^t \end{cases} \Rightarrow \alpha(t) = (c_1 e^t, c_2 e^t)$$

حال با در نظر گرفتن نقطه آغاز v خواهیم داشت $c_1 = c_2 = v$. بنابراین شار موضعی میدان برداری L به صورت زیر است:

$$\varphi(t, v) = (ve^t, ve^t)$$

که به وضوح کامل است.

۱۰۵- داریم:

$$\varphi(t + t', (x, y)) = (x\ ,\ y + (t + t')(x + 1)^{-1}) = (x\ ,\ y + t(x + 1)^{-1} + t'(x + 1)^{-1})$$
$$= \varphi(\ t, (x, y + t'(x + 1)^{-1})\ ) = \varphi(\ t, \varphi(t', (x, y))\ )$$

و همچنین:

$$\varphi(0, (x, y)) = (x, y + 0(x + 1)^{-1}) = (x, y)$$

بنابراین φ یک شار موضعی روی M است. حال میدان برداری مولد آن را می‌یابیم.

$$X = \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t, (x, y))\Big|_{t=0} = (0, (x + 1)^{-1}) = 0\frac{\partial}{\partial x} + (x + 1)^{-1}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{x + 1}\frac{\partial}{\partial y}$$

۱۰۶- خم‌های انتگرال X را می‌یابیم:

$$\begin{cases} x' = -y \Rightarrow x'' = -y' = -x \Rightarrow x'' + x = 0 \\ y' = x \Rightarrow y'' = x' = -y \Rightarrow y'' + y = 0 \end{cases}$$

$$x(t) = c_1 \, Cos\, t + c_2 \, Sin\, t \qquad x(\circ) = c_1$$
$$y(t) = b_1 \, Cos\, t + b_2 \, Sin\, t \qquad y(\circ) = b_1$$
$$\gamma(\circ) = (c_1, b_1) = (x, y) \quad \Rightarrow x = c_1 \, , \, y = b_1$$
$$\gamma(t) = (\, x(t), y(t)) \qquad \gamma'(t) = (-c_1 \, Sin\, t + c_2 \, Cos\, t \, , \, -b_1 \, Sin\, t + b_2 \, Cos\, t)$$
$$\gamma'(\circ) = (c_2, b_2) = X(\gamma(\circ)) = (-y, x) \Rightarrow \begin{cases} c_2 = -y \\ b_2 = x \end{cases}$$

بنابراین $\varphi_t(x, y) = (\, x \, Cos\, t - y \, Sin\, t \, , \, x \, Sin\, t + y \, Cos\, t)$.

همچنین:

$$f(\varphi_t(x, y)) = (\, x \, Cos\, t - y \, Sin\, t)^2 + (\, x \, Sin\, t + y \, Cos\, t)^2 = x^2 + y^2 = f(x, y)$$

در نتیجه:

$$(X \cdot f)(x, y) = \lim_{t \longrightarrow \circ} \frac{f(\varphi_t(x, y)) - f(x, y)}{t} = \circ$$

و لذا $X \cdot f \equiv \circ$.

تذکر: با استفاده از رابطه‌ی $X.f = \langle \nabla f \, , X \rangle$ نیز این حکم بدست می‌آید.

$$\langle \nabla f \, , X \rangle = \langle (2x, 2y), (-y, x) \rangle = -2xy + 2xy = \circ$$

۱۰۷- میدان‌های برداری $X = y \dfrac{\partial}{\partial x} \in \chi(I\!R^2)$ و $Y = \dfrac{x^2}{2} \dfrac{\partial}{\partial y} \in \chi(I\!R^2)$ را در نظر می‌گیریم.

نشان می‌دهیم X, Y روی $I\!R^2$ کامل هستند ولیکن $X + Y$ و $[X, Y]$ کامل نیستند.

فرض می‌کنیم $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ خم انتگرال X باشد یعنی:

$$X(\alpha(t)) = \alpha_2(t) \frac{\partial}{\partial x} = \alpha_1'(t) \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_2'(t) \frac{\partial}{\partial y}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} \alpha_1'(t) = \alpha_2(t) \\ \alpha_2'(t) = 0 \Rightarrow \alpha_2(t) = c \end{cases} \Rightarrow \alpha_1(t) = ct + d \Rightarrow \alpha(t) = (ct + d\,,\, c)$$

در نتیجه دامنه α کل $\mathbb{R}$ است، یعنی X کامل است.

حال اگر $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t))$ خم انتگرال Y باشد داریم:

$$Y(\beta(t)) = \frac{(\beta_1(t))^2}{2}\frac{\partial}{\partial y} = \beta_1'(t)\frac{\partial}{\partial x} + \beta_2'(t)\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\begin{cases} \beta_1'(t) = 0 \quad \Rightarrow \beta_1(t) = c \\ \beta_2'(t) = \dfrac{(\beta_1(t))^2}{2} \Rightarrow \beta_2(t) = \dfrac{c^2}{2}t + d \end{cases} \Rightarrow \beta(t) = (c\,, \frac{c^2}{2}t + d\,)$$

بنابراین دامنه β کل $\mathbb{R}$ است، یعنی Y کامل است.

حال فرض می‌کنیم $Z = X + Y = y\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{x^2}{2}\dfrac{\partial}{\partial y}$ و γ خم انتگرال Z باشد. همچنین $W = [X,Y]$ و η نیز خم انتگرال W باشد. داریم:

$$W = [X,Y] = [y\frac{\partial}{\partial x}, \frac{x^2}{2}\frac{\partial}{\partial y}] = \frac{x^2}{2}[y\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}] + y\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x^2}{2})\frac{\partial}{\partial y}$$

$$= \frac{x^2}{2}[y\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}] + xy\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{x^2}{2}[\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial x}] + xy\frac{\partial}{\partial y}$$

$$= -\frac{x^2}{2}\left\{ y[\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}] + \frac{\partial y}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} \right\} + xy\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{x^2}{2}\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}$$

می‌توان بررسی نمود که دامنه خم‌های γ و η کل $\mathbb{R}$ نیست. بنابراین میدان‌های Z و W کامل نیستند.

۱۰۸- فرض می‌کنیم $X = \sum_{i=1}^{n} f_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ بطوریکه $f_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ برای $i = 1,\ldots,n$. در اینصورت:

$$[X, \frac{\partial}{\partial x_j}] = -[\frac{\partial}{\partial x_j}, X] = -[\frac{\partial}{\partial x_j}, \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}] = -\sum_{i=1}^{n} [\frac{\partial}{\partial x_j}, f_i \frac{\partial}{\partial x_i}]$$

$$= -\left(\sum_{i=1}^{n} (f_i [\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_i}] + \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}) \right) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

بنابراین $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} = 0$. اما $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ مستقل هستند. لذا به ازای $1 \le i, j \le n$ داریم:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0$$

وچون $\mathbb{R}^n$ همبند است و $\frac{\partial f_i}{\partial x_1} = \cdots = \frac{\partial f_i}{\partial x_n} = 0$ نتیجه می‌گردد که به ازای $i = 1, \ldots, n$، f_i ثابت است. بنابراین X با ضرایب ثابت است.

۱۰۹- داریم:

$$\begin{aligned} \varphi(t_1, \varphi(t_2, (r, \theta))) &= \varphi(t_1, (re^{-t_2} + (1 - e^{-t_2}), \theta + t_2)) \\ &= (re^{-(t_1+t_2)} + 1 - e^{-(t_1+t_2)}, \theta + (t_1 + t_2)) \\ &= \varphi(t_1 + t_2, (r, \theta)) \end{aligned}$$

و همچنین:

$$\varphi(0, (r, \theta)) = (re^{0} + (1 - e^{-0}), \theta + 0) = (r, \theta)$$

بنابراین φ یک شار موضعی روی M است. میدان برداری مولد φ به صورت زیر می‌باشد:

$$X = \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, (r, \theta)) \Big|_{t=0} = (-re^{-t} + e^{-t}, 1) \Big|_{t=0} = (-r + 1) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta}$$

۱۱۰- کافی است قرار دهیم :

$$X = \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad Y = \frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad Z = y \frac{\partial}{\partial z}$$

۱۱۱- فرض می‌کنیم $X,Y \in A$ باشد. بنابراین:

$$X = a\frac{\partial}{\partial x} + b\,g\frac{\partial}{\partial y} \qquad Y = c\frac{\partial}{\partial x} + d\,h\frac{\partial}{\partial y}$$

که در آن $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ و $g^{(n)}(\circ) = h^{(n)}(\circ) = \circ$. $\forall n \in \mathbb{N}_\circ$

داریم:

$$[X,Y] = [a\frac{\partial}{\partial x} + b\,g\frac{\partial}{\partial y}, c\frac{\partial}{\partial x} + d\,h\frac{\partial}{\partial y}] = [a\frac{\partial}{\partial x}, c\frac{\partial}{\partial x}] + [a\frac{\partial}{\partial x}, d\,h\frac{\partial}{\partial y}]$$
$$+ [b\,g\frac{\partial}{\partial y}, c\frac{\partial}{\partial x}] + [b\,g\frac{\partial}{\partial y}, d\,h\frac{\partial}{\partial y}] = ac[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}] + ad[\frac{\partial}{\partial x}, h\frac{\partial}{\partial y}]$$
$$+ bc[\,g\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}] + bd[\,g\frac{\partial}{\partial y}, h\frac{\partial}{\partial y}]$$

از طرفی:

$$[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}] = \circ \qquad [\frac{\partial}{\partial x}, h\frac{\partial}{\partial y}] = \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}$$

$$[\,g\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}] = -\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} \qquad [g\frac{\partial}{\partial y}, h\frac{\partial}{\partial y}] = (g\frac{\partial h}{\partial y} - h\frac{\partial g}{\partial y})\frac{\partial}{\partial y}$$

بنابراین :

$$[X,Y] = ad\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - bc\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} + bd(g\frac{\partial h}{\partial y} - h\frac{\partial g}{\partial y})\frac{\partial}{\partial y}$$
$$= (ad\frac{\partial h}{\partial x} - bc\frac{\partial g}{\partial x})\frac{\partial}{\partial y}$$

قرار می‌دهیم $f = ad\frac{\partial h}{\partial x} - bc\frac{\partial g}{\partial x}$. حال اگر نشان دهیم:

$$\forall n \in \mathbb{N}_\circ \quad f^{(n)}(\circ) = \circ$$

حکم ثابت می‌شود. اما این مطلب نیز با توجه به اینکه g,h این خاصیت را دارند، بدست می‌آید.

۱۱۲- با یک کارت حول نقطه p می‌توانیم به $\mathbb{R}^n$ برویم و با یک ایزومورفیسم نقطه مذکور را به صفر ببریم و همچنین با یک انتقال می‌توانیم بردار $X(p)$ را به بردار کانونیک اول تبدیل کنیم و لذا با انتخاب یک دستگاه مختصات مناسب می‌توانیم فرض کنیم $M = \mathbb{R}^n$، $p = 0$ و $X(p) = (p, e_1)$ باشد. اگر $\{\varphi_t\}$ گروه تک پارامتری میدان برداری X باشد، نگاشت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t_1, \ldots, t_n) \mapsto \varphi_{t_1}(0, t_2, \ldots, t_n) \end{cases}$$

که در آن U یک همسایگی باز حول صفر است. در واقع مولفه اول $(t_1, \ldots, t_n)$ را روی مولفه‌های دیگر تصویر می‌کنیم و سپس به اندازه t_1 روی خم انتگرال مربوطه حرکت می‌کنیم و حاصل را $\theta(t_1, \ldots, t_n)$ می‌نامیم. θ، C^∞ است و

$$\theta_*\left(\frac{\partial}{\partial t_1}(q)\right) = \theta_*((t, q_2, \ldots, q_n)(q_1)) = \theta((t, q_2, \ldots, q_n)'(q_1) = \varphi_t(0, q_2, \ldots, q_n)'(q_1)$$
$$= X(\varphi_{q_1}(0, q_2, \ldots, q_n)) = X(\theta(q))$$

به ازای $i \geq 2$ داریم:

$$\theta_*\left(\frac{\partial}{\partial t_i}(0)\right) = \theta_*((0, \ldots, 0, t, 0, \ldots, 0)'(0)) = \theta(0, \ldots, t, \ldots, 0)'(0)$$
$$= \varphi_0(0, \ldots, t, \ldots, 0)'(0) = \frac{\partial}{\partial t_i}(0)$$

پس θ_* در نقطه صفر، پایه‌ی $\left\{ \frac{\partial}{\partial t^1}(0), \ldots, \frac{\partial}{\partial t^n}(0) \right\}$ را روی خودش تصویر می‌کند و لذا یک ایزومورفیسم است. پس θ در حوالی صفر یک دیفئومورفیسم است. در همان همسایگی، $x = \theta^{-1}$ همان دستگاه مختصات مورد نظر می‌باشد.

۱۱۳- فرض می‌کنیم $p \in U$ باشد. باید نشان دهیم $D(f)(p) = D(g)(p)$. می‌دانیم که تابع $\theta : M \longrightarrow [0,1]$، C^∞ چنان موجود است که $\theta(p) = 1$ و $\theta\big|_{M-U} = 0$ باشد. حال قرار می‌دهیم $h = \theta \cdot (f - g)$ با توجه به مفروضات مساله و تعریف θ نتیجه می‌گردد که h تابع ثابت صفر است. بنابراین $D(h)(p) = 0$ از طرف دیگر:

$$D(h)(p) = D(\theta)(p)\cdot(f-g)(p) + \theta(p)\cdot D(f-g)(p)$$

اما $f(p) = g(p)$ و $\theta(p) = ۱$ بنابراین:

$$D(h)(p) = D(f-g)(p) = D(f)(p) - D(g)(p) = ۰$$

در نتیجه:

$$\forall p \in U \qquad D(f)(p) = D(g)(p)$$

۱۱۴- فرض می‌کنیم ϕ شار موضعی میدان برداری X باشد و به ازای $t \in \mathbb{R}$ قرار می‌دهیم $\varphi_t := \phi(t, ۰)$ و دامنه U_t را با φ_t نمایش می‌دهیم در این صورت بازهای $\{U_t \mid t > ۰\}$ یک پوشش باز M می‌باشند و در نتیجه یک پوشش باز برای محمل X تشکیل می‌دهند و چون بنا به فرض $Supp\ X$ فشرده است در نتیجه وجود دارند $t_۱,\ldots,t_k$ بطوریکه:

$$Supp(X) \subseteq U_{t_۱} \cup \cdots \cup U_{t_k}$$

قرار می‌دهیم $\delta := min\{t_۱,\ldots,t_k\}$ در این صورت به ازای هر $p \in Supp\ X$ خم انتگرال گذرنده از p روی فاصله $(-\delta, \delta)$ قابل تعریف است. کلیه نقاط این خم انتگرال در $Supp\ X$ قرار دارد. بنابراین می‌توان این خم را به دلخواه به سمت جلو و عقب تمدید کنیم و نهایتاً این خم روی کل $\mathbb{R}$ قابل تعریف است.

برای نقاط خارج از $Supp\ X$ نیز چون میدان برداری، صفر است خم ثابت، خم انتگرال است که روی کل $\mathbb{R}$ قابل تعریف است.

۱۱۵- الف) می‌دانیم که به ازای هر تابع پیوسته $f \in C^\circ(X, \mathbb{R})$ وجود دارد یک تابع پیوسته $g \in C^\circ(X, \mathbb{R})$ بطوریکه $f = g^۳$. در این صورت داریم:

$$D(f) = ۳\, g^۲(p)\, D(g)$$

حال اگر $f(p) = ۰$ در نتیجه $g(p) = ۰$ باشد، آنگاه $D(f) = ۰$ خواهد بود بنابراین به ازای هر $f \in C^\circ(X, \mathbb{R})$ که $f(p) = ۰$ باشد داریم $D(f) = ۰$.

حال اگر $f \in C^\circ(X, \mathbb{R})$ و $f(p) \neq ۰$ باشد داریم:

$$D(f) = D(f) - ۰ = D(f) - D(\hat{f}(p)) = D(f - \hat{f}(p)) = ۰$$

که در آن $\hat{f}(p)$ تابع ثابتی روی X با مقدار $f(p)$ می‌باشد. توجه داریم که D روی توابع ثابت صفر است و چون تابع $f-\hat{f}(p)$ در نقطه p صفر است، حکم بدست می‌آید. بنابراین به ازای هر $f\in C^{\circ}(X,\mathbb{R})$ داریم $D(f)=0$ در نتیجه $D=0$.

ب) خیر.

۱۱۶- فرض می‌کنیم به ترتیب (x^i) و (y^i) دو دستگاه مختصات موضعی برای منیفلد M و $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1},\ \dots\ ,\ \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$ و $\left\{\frac{\partial}{\partial y^1},\ \dots\ ,\ \frac{\partial}{\partial y^n}\right\}$ میدان‌های برداری موضعی وابسته به آنها باشند. همچنین $\{dx^1,\dots,dx^n\}$ و $\{dy^1,\dots,dy^n\}$ به ترتیب ۱- فرمی‌های موضعی دوگان پایه‌های بالا باشند. می‌دانیم که روابط زیر برقرارند:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}\quad (1)$$

$$dx^i=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x^i}{\partial y^j}dy^j\quad (2)$$

حال تعریف می‌کنیم $\delta=\sum_{i,j}\delta^i_j\ dx^j\otimes\frac{\partial}{\partial x^i}$ که در آن $\delta^i_j=\delta(\frac{\partial}{\partial x^j},dx^i)$. باید نشان دهیم ضرایب δ^i_j تحت تغییر دستگاه مختصات طبق قانون تبدیل تانسورهای از نوع $(1,1)$ تغییر می‌کند. برای این منظور فرض می‌کنیم ضرایب δ در دستگاه مختصات (y^i) عبارت باشد از δ'^i_j یعنی $\delta'^i_j=\delta(\frac{\partial}{\partial y^j},dy^i)$. شرط اینکه δ یک تانسور از نوع $(1,1)$ تعریف کند این است که:

$$\delta^i_j=\delta(\frac{\partial}{\partial x^j},dx^i)=\delta(\sum_k\frac{\partial y^k}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^k},\sum_l\frac{\partial x^i}{\partial y^l}dy^l)=\sum_{k,l}\frac{\partial y^k}{\partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial y^l}\delta(\frac{\partial}{\partial y^k},dy^l)$$

$$=\sum_{k,l}\frac{\partial y^k}{\partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial y^l}\delta'^l_k$$

بنابراین باید داشته باشیم $\delta^i_j = \sum_{k,l} \frac{\partial y^k}{\partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial y^l}\delta'^l_k$ تا δ یک تانسور از نوع $(1,1)$ تعریف کند. با توجه به اینکه ماتریس‌های $(\frac{\partial x^i}{\partial y^j})$ و $(\frac{\partial y^i}{\partial x^j})$ معکوس یکدیگرند، داریم:

$$\sum_{k,l} \frac{\partial y^k}{\partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial y^l}\delta'^l_k = \sum_k \frac{\partial y^k}{\partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial y^k} = \delta^i_j$$

زیرا عبارت اخیر درایه ijام ماتریس همانی می‌باشد.

۱۱۷- فرض می‌کنیم (x^i) و (y^i) دو دستگاه مختصات موضعی برای $\mathbb{R}^3$ باشند.
می‌دانیم گرادیان f که با ∇f نمایش داده می‌دهیم، در هر یک از دستگاه مختصات بالا به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial f}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x^3}\frac{\partial}{\partial x^3}$$
$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial y^1}\frac{\partial}{\partial y^1} + \frac{\partial f}{\partial y^2}\frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial y^3}\frac{\partial}{\partial y^3}$$

حال تعریف می‌کنیم:

$$T = \sum_{i,j,k} T_{ijk}\, dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k$$

که در آن $T(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}) = T_{ijk} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^k}$ می‌باشد. شرط اینکه T یک تانسور از نوع $(0,3)$ تعریف کند این است که ضرایب T_{ijk} تحت تغییر دستگاه مختصات، طبق قانون تبدیل تانسورهای از نوع $(0,3)$ تغییر کند که این قانون تبدیل عبارت است از:

$$T_{ijk} = \sum_{m,n,p} \frac{\partial y^m}{\partial x^i}\frac{\partial y^n}{\partial x^j}\frac{\partial y^p}{\partial x^k} T'_{mnp}$$

که در آن $T'_{mnp} = T(\frac{\partial}{\partial y^m}, \frac{\partial}{\partial y^n}, \frac{\partial}{\partial y^p}) = \sum_{m,n,p} \frac{\partial f}{\partial y^m}\frac{\partial f}{\partial y^n}\frac{\partial f}{\partial y^p}$. اما با توجه به قانون مشتقات زنجیره‌ای داریم :

$$T_{ijk}=\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^k}=(\sum_m \frac{\partial f}{\partial y^m}\frac{\partial y^m}{\partial x^i})(\sum_n \frac{\partial f}{\partial y^n}\frac{\partial y^n}{\partial x^j})(\sum_p \frac{\partial f}{\partial y^p}\frac{\partial y^p}{\partial x^k})$$

$$=(\sum_{m,n,p}\frac{\partial f}{\partial y^m}\frac{\partial f}{\partial y^n}\frac{\partial f}{\partial y^p})\frac{\partial y^m}{\partial x^i}\frac{\partial y^n}{\partial x^j}\frac{\partial y^p}{\partial x^k}=\sum_{m,n,p}\frac{\partial y^m}{\partial x^i}\frac{\partial y^n}{\partial x^j}\frac{\partial y^p}{\partial x^k}T'_{mnp}$$

بنابراین T یک تانسور از نوع $(۰,۳)$ می‌باشد.

۱۱۸- داریم:

$$[[\alpha,\beta],\gamma]=[\alpha,\beta]\wedge\gamma-\gamma\wedge[\alpha\wedge\beta]$$
$$[[\alpha,\beta],\gamma]=(\alpha\wedge\beta-\beta\wedge\alpha)\wedge\gamma\wedge(\alpha\wedge\beta-\beta\wedge\alpha)$$
$$[[\alpha,\beta],\gamma]=(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma-(\beta\wedge\alpha)\wedge\gamma-\gamma\wedge(\alpha\wedge\beta)+\gamma\wedge(\beta\wedge\alpha)$$

اگر $\alpha\in\Lambda^p(M)\,,\ \beta\in\Lambda^q(M)\,,\ \gamma\in\Lambda^r(M)$ باشند آنگاه

$$[[\alpha,\beta],\gamma]=(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma-(-۱)^{pq}(\beta\wedge\alpha)\wedge\gamma-(-۱)^{(p+q)r}\gamma\wedge(\alpha\wedge\beta)+(-۱)^{pq+(p+q)r}\gamma\wedge(\beta\wedge\alpha)$$
$$=(۱+(-۱)^{pq}+(-۱)^{(p+q)r+۱}+(-۱)^{pq+(p+q)r})(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma$$

اگر p زوج باشد در این صورت $[\alpha,\beta]=۰$ و در نتیجه $[[\alpha,\beta],\gamma]=۰$.

اگر q زوج باشد در این صورت $[\alpha,\beta]=۰$ و در نتیجه $[[\alpha,\beta],\gamma]=۰$.

اگر p,q هر دو فرد باشند مجدداً چون $(-۱)^{pq+(p+q)r}=-۱$ و $(-۱)^{(p+q)r+۱}=-۱$ و $(-۱)^{pq+۱}=۱$ حکم نتیجه می‌شود.

۱۱۹-می‌دانیم که $f^*(g)=g\circ f\quad,\quad f^*\circ dw=d(f^*(w))$. بنابراین داریم:

$$\begin{cases}x=s\\ y=t\\ z=s^۲+t^۲\end{cases}\Rightarrow dx=ds\,,\ dy=dt\ ,\ dz=۲sds+۲tdt$$

$$f^*(\alpha)=(t^۳+s^۳+(s^۲+t^۲)^۳)\,(ds\wedge dt+۲tdt\wedge ds+۲sdt\wedge ds)$$
$$dz\wedge dx=(۲sds+۲tdt)\wedge ds=۲tdt\wedge ds$$
$$dy\wedge dz=dt\wedge(۲sds+۲tdt)=۲s\,dt\wedge ds$$
$$f^*(\alpha)=(t^۳+s^۳+(s^۲+t^۲)^۳)\,(۲t+۲s-۱)\,dt\wedge ds$$

-۱۲۰

الف) $[X,Y]=[\ y\frac{\partial}{\partial x}+y^{۲}x\frac{\partial}{\partial y}\ ,\ (x+y)\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y}\ ]$

$$=[y\frac{\partial}{\partial x},(x+y)\frac{\partial}{\partial x}]+[y\frac{\partial}{\partial x},x\frac{\partial}{\partial y}]+[y^{۲}x\frac{\partial}{\partial y},(x+y)\frac{\partial}{\partial x}]$$
$$+[y^{۲}x\frac{\partial}{\partial y},x\frac{\partial}{\partial y}]$$

حال با توجه به رابطه $[X,fY]=f[X,Y]+(X.f)Y$ هر یک از کروشه‌های فوق را محاسبه می‌کنیم

$$[y\frac{\partial}{\partial x},(x+y)\frac{\partial}{\partial x}]=(x+y)[y\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}]+\left((y\frac{\partial}{\partial x})\cdot(x+y)\right)\frac{\partial}{\partial x}=y^{۲}\frac{\partial}{\partial x}$$

$$[y\frac{\partial}{\partial x},x\frac{\partial}{\partial y}]=x[y\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}]+\left((y\frac{\partial}{\partial x})\cdot x\right)\frac{\partial}{\partial y}=-x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}$$

$$[y^{۲}x\frac{\partial}{\partial y},(x+y)\frac{\partial}{\partial x}]=(x+y)[y^{۲}x\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial x}]+\left((y^{۲}x\frac{\partial}{\partial y})\cdot(x+y)\right)\frac{\partial}{\partial x}$$
$$=y^{۲}x\frac{\partial}{\partial x}-y^{۲}(x+y)\frac{\partial}{\partial y}$$

$$[y^{۲}x\frac{\partial}{\partial y},x\frac{\partial}{\partial y}]=x[y^{۲}x\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial y}]+\left((y^{۲}x\frac{\partial}{\partial y})\cdot x\right)\frac{\partial}{\partial y}=-۲x^{۲}y\frac{\partial}{\partial y}$$

بنابراین

$$\boxed{[X,Y]=(y^{۲}-x+y^{۲}x)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y^{۳}-y^{۲}x-۲x^{۲}y)\frac{\partial}{\partial y}}$$

ب) $L_X(\alpha)=L_X(-dx+xdy)=L_X(-dx)+L_X(x\,dy)=L_X(-۱)\wedge dx-L_X(dx)$
$$+L_X(x)\wedge dy+x\,L_X(dy)=۰-dy+y\,dy+x(y^{۲}dx+۲yx\,dy)$$
$$=(۲yx^{۲}+y-۱)dy+xy^{۲}dx$$

ج) $d\alpha = d(-dx + xdy) = d(-1) \wedge dx + dx \wedge dy = dx \wedge dy$

$$L_Y(d\alpha) = L_Y(dx \wedge dy) = L_Y(dx) \wedge dy + dx \wedge L_Y(dy)$$
$$= (dx + dy) \wedge dy + dx \wedge dx = dx \wedge dy + dy \wedge dy = dx \wedge dy$$

تذکر: در حالت کلی هرگاه $X = f\frac{\partial}{\partial x} + g\frac{\partial}{\partial y}$ باشد، دراینصورت داریم:

$$L_X(dy) = dg \text{ و } L_X(dx) = df$$

۱۲۱- فرض کنیم $Z^r(M)$ مجموعه تمام $r-$فرم‌های دیفرانسیل بسته و $B^r(M)$ مجموعه تمام $r-$فرم‌های دیفرانسیل کامل روی منیفلد M باشند. در این صورت اگر $\omega \in Z^r(M)$ و $\psi \in Z^s(M)$ آنگاه $\omega \wedge \psi \in Z^{r+s}(M)$ زیرا:

$$\begin{cases} \omega \in Z^r(M) \Rightarrow d\omega = 0 \\ \psi \in Z^s(M) \Rightarrow d\psi = 0 \end{cases} \Rightarrow d(\omega \wedge \psi) = d\omega \wedge \psi + (-1)^r \omega \wedge d\psi = 0$$
$$\Rightarrow \omega \wedge \psi \in Z^{r+s}(M)$$

همچنین اگر $\omega \in Z^r(M)$ و $\psi \in B^s(M)$ آنگاه $\omega \wedge \psi \in B^{r+s}(M)$ زیرا:

$$\begin{cases} \omega \in Z^r(M) \Rightarrow d\omega = 0 \\ \psi \in B^s(M) \Rightarrow \psi = d\eta \quad \eta \in \Lambda^{s-1}(M) \end{cases} \Rightarrow \psi \wedge \omega = d\eta \wedge \omega + (-1)^{s-1}\eta \wedge d\omega$$
$$= d(\eta \wedge \omega)$$

از طرفی $\omega \wedge \psi = (-1)^{rs}\psi \wedge \omega$ بنابراین:

$$\omega \wedge \psi = (-1)^{rs} d(\eta \wedge \omega) \Rightarrow \omega \wedge \psi \in B^{r+s}(M)$$

حال تعریف می‌کنیم $Z(M) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} Z^p(M)$ و $B(M) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} B^p(M)$. بررسی حلقه بودن $Z(M)$ نسبت به عمل ضرب گوه‌ای با توجه به مطالب فوق به سادگی حاصل می‌شود. همچنین ایدال

بودن $B(M)$ در $Z(M)$ از اینکه این حکم برای هر $B^s(M)$ و $Z^r(M)$ برقرار است، نتیجه می‌گردد.

۱۲۲- با توجه به اینکه $x : I\!R^2 \longrightarrow I\!R^3$ می‌باشد نتیجه می‌شود که

$$x^*(\omega) \in \Lambda^2(I\!R^2)$$

و لذا وجود دارد $g \in C^\infty(I\!R^2)$ بطوریکه $x^*(\omega) = g\, du^1 \wedge du^2$. بنابراین:

$$\begin{aligned} g &= x^*(\omega)\left(\frac{\partial}{\partial u_1}, \frac{\partial}{\partial u_2}\right) = \omega\left(x_*\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right), x_*\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)\right) \\ &= \omega\left((X_{u_1}, Y_{u_1}, Z_{u_1}), (X_{u_2}, Y_{u_2}, Z_{u_2})\right) \\ &= f_1(Y_{u_1}Z_{u_2} - Z_{u_1}Y_{u_2}) + f_2(X_{u_1}Z_{u_2} - Z_{u_1}X_{u_2}) + f_3(X_{u_1}Y_{u_2} - Y_{u_1}X_{u_2}) \\ &= \langle V(x(u_1, u_2)),\ x_*\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right) \times x_*\left(\frac{\partial}{\partial u_2}\right) \rangle \end{aligned}$$

و لذا حکم ثابت می‌شود.

۱۲۳- تابع $f : I\!R^3 \longrightarrow I\!R$ را با ضابطه $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ در نظر می‌گیریم. می‌دانیم عدد یک، یک مقدار عادی تابع f است و $f^{-1}(1) = S^2$ یک زیرمنیفلد ۲ بعدی $I\!R^3$ است و با توجه به اینکه $\ker f_{*_p} = T_p(f^{-1}(1)) = T_p S^2$، برای اینکه $X(p)$ یک میدان برداری مماس بر S^2 باشد، باید $X(p)$ بر $\nabla f(p)$ عمود باشد، که بنا به رابطه زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(p),\ X(p) \rangle &= \langle (2x, 2y, 2z),\ X(p) \rangle \\ &= 2x(y - z) + 2y(z - x) + 2z(x - y) = 0 \end{aligned}$$

بنابراین $X(p)$ بر S^2 مماس است و چون ضرایب میدان برداری یعنی $y - z$ و $z - x$ و $x - y$ هموارند پس X نیز هموار است.

$$\begin{aligned} j^*\alpha = j^*(xdy \wedge dz) &= (x \circ j)\, j^*dy \wedge j^*dz = (x \circ j)d(y \circ j) \wedge d(z \circ j) \\ &= xdy \wedge dz \end{aligned}$$

پس $j^*\alpha = \alpha$. و