۸۳- هر گروه لی توازی‌پذیر است. از آنجاکه در بین S^nها فقط S^1, S^3, S^7 توازی‌پذیرند، و از طرف دیگر ثابت می‌شود که S^7 نمی‌تواند ساختار گروه لی بپذیرد، حکم بدست می‌آید.

۸۴- می‌دانیم هر ماتریس $A \in SO(3)$ بیانگر یک دوران حول محوری است که از مبدا می‌گذرد. همچنین هر دوران به طور کامل توسط محور تقارنش (بردار یکه $v \in \mathbb{R}^3$) و زاویه‌ی دوران $\theta \in [0, \pi]$ ، مشخص می‌شود. به عبارت دیگر، هر دوران، متناظر با نقطه‌ای مانند θv در گوی B^3 به شعاع π در $\mathbb{R}^3$ می‌باشد. اما این تناظر یک به یک نیست، زیرا هر دوران حول v تحت زاویه π، معادل با دوران حول $-v$ تحت زاویه π است. بنابراین نقاطی از مرز $B^3 \supseteq S^2$ که روی یک محور که از مبدا می‌گذرد، واقع هستند، در یک کلاس هم‌ارزی قرار دارند، که این نیز همان تعریف $\mathbb{RP}^3(\mathbb{R})$ می‌باشد. بنابراین حکم بدست می‌آید.

۸۵- فرض کنیم :

$$\sigma = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در اینصورت $det\sigma = -1$ همچنین $\sigma^t = \sigma^{-1}$. به عبارت دیگر $\sigma\sigma^t = I_n$ بنابراین $\sigma \in O(n)$. از طرفی $I_n \in SO(n)$ می‌باشد و $SO(n) = SL(n) \cap O(n)$.

از جبر خطی می‌دانیم که با انتخاب پایه مناسب می‌توان هر $A \in SO(n)$ را به این صورت درآورد:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ & ۰ \\ ۰ & Cos\theta_۱ & -Sin\theta_۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & Sin\theta_۱ & Cos\theta_۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ \vdots & ۰ & ۰ & \ddots & ۰ & ۰ \\ ۰ & \vdots & \vdots & \vdots & Cos\theta_k & -Sin\theta_k \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & Sin\theta_k & Cos\theta_k \end{bmatrix}$$

$$n = ۲k+۱$$

$$\begin{bmatrix} Cos\theta_۱ & -Sin\theta_۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ Sin\theta_۱ & Cos\theta_۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۰ & \ddots & ۰ & ۰ \\ \vdots & \vdots & ۰ & Cos\theta_k & -Sin\theta_k \\ ۰ & \cdots & ۰ & Sin\theta_k & Cos\theta_k \end{bmatrix}$$

$$n = ۲k$$

بنابراین در حالت A ،$n = ۲k$ به k چرخش در زیرفضاهای ۲ بُعدی مستقل تجزیه می‌شود و در حالت $n = ۲k+۱$ یک محور ثابت نیز وجود دارد. حال نشان می‌دهیم $SO(n)$ همبند راهی است و برای این کار نشان می‌دهیم هر عضو $A \in SO(n)$ را می‌توانیم به I_n متصل نمائیم.

$\gamma : [۰,1] \longrightarrow SO(n)$ را با ضابطه $\gamma(t)$ مساوی با ماتریس‌های بالا تعریف می‌کنیم فقط به جای θ_jها قرار می‌دهیم $t\theta_j$. بنابراین یک تابع پیوسته بدست می‌آید که $\gamma(۰) = I_n$, $\gamma(۱) = A$.
حال نگاشت زیر پیوسته است پس $\sigma \cdot SO(n)$ نیز همبند راهی است.

$$\begin{cases} SO(n) \longrightarrow O(n) \\ A \mapsto \sigma \cdot A \end{cases}$$

و چون $O(n) = SO(n) \cup \sigma \cdot SO(n)$ نتیجه می‌گردد که $O(n)$ حداکثر دارای دو مؤلفه همبند راهی است. اما از آنجائیکه تابع det پیوسته است و برای $A \in SO(n)$ داریم $det\, A = ۱$ و برای $A \in \sigma \cdot SO(n)$ داریم $det\, A = -۱$ نتیجه می‌شود که $O(n)$ حداقل دارای دو مؤلفه همبندی و به طریق اولی حداقل دو مؤلفه همبند راهی است. پس $O(n)$ دقیقاً دو مؤلفه همبندی دارد که یکی $SO(n)$ و دیگری $\sigma \cdot SO(n)$ می‌باشد و چون $I_n \in SO(n)$ و لذا حکم مساله بدست می‌آید.

۸۶- الف) نگاشت پیوسته زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} f : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ A \mapsto AA^t \end{cases}$$

این نگاشت C^∞ می‌باشند و همچنین دارای رتبه ثابت $\frac{n(n+۱)}{۲}$ روی $O(n)$ می‌باشد.

زیرا $f = h \circ g$ می‌باشد که در آن :

$$h : M_{n\times n} \times M_{n\times n} \longrightarrow M_{n\times n} \quad (A, B) \mapsto A.B \qquad g : M_{n\times n} \longrightarrow M_{n\times n} \times M_{n\times n} \quad A \mapsto (A, A^t)$$

بنابراین داریم $f_{*_A}(B) = h_{*_{g(A)}} \circ g_{*_A}(B)$. از آنجاکه g خطی است داریم:

$$g_{*_A}(B) = g(B) = (B, B^t)$$

همچنین از آنجاکه h نگاشتی دو خطی است داریم:

$$h_{*_{(A,A^t)}}(B, B^t) = h(A, B^t) + h(B, A^t) = AB^t + BA^t$$

بنابراین : $$f_{*_A}(B) = AB^t + BA^t$$

اگر $Sym(n)$ مجموعه ماتریس‌های متقارن مرتبه n باشد به وضوح به ازای هر $A \in M_{n\times n}$ داریم

$$Im(f_{*_A}) \subseteq Sym(n)$$

و ادعا می‌کنیم هرگاه $A \in O(n)$ باشد آنگاه $Im(f_{*_A}) = Sym(n)$. کافی است نشان دهیم:

$$Sym(n) \subseteq Im(f_{*_A})$$

اگر $C \in Sym(n)$ باشد، قرار می‌دهیم $B = \frac{CA}{2}$، در این صورت داریم:

$$f_{*_A}(B) = \frac{1}{2} AA^t C^t + \frac{1}{2} CAA^t$$

و چون $A \in O(n)$ می‌باشد داریم $AA^t = I$. بنابراین $f_{*_A}(B) = C$ یعنی:

$$Sym(n) \subseteq Im(f_{*_A})$$
$$rank(f)(A) := rank(f_{*_A}) = dim(Im(f_{*_A}))$$
$$= dim(Sym(n)) = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \forall A \in O(n)$$

بنا به یکی از قضایا $O(n) = f^{-1}(I)$ زیرمنیفلد $M_{n\times n}$ می‌باشد، بنابراین خود نیز یک منیفلد است و بُعد آن برابر است با : $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

ب) با توجه به اینکه هر $A \in GL(n, \mathbb{R})$ را می‌توان بنا به تجزیه قطبی به صورت یکتایی به حاصلضرب $A = A_1 \cdot A_2$ تجزیه کرد که در آن $A_1 \in O(n)$ و A_2 یک ماتریس مثبت معین و متقارن است. بنابراین تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \varphi : GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow O(n) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \\ A \mapsto (A_1, A_2) \end{cases}$$

براحتی می‌توان نشان داد که φ یک دیفئومورفیسم می‌باشد. بنابراین

$$GL(n, \mathbb{R}) \cong O(n) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

در نتیجه $\dim O(n) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

۸۷- الف) از آنجائیکه $det\ J = ۱$ می‌باشد، هرگاه $A \in Sp(n)$ باشد، داریم:

$$det(A)^{۲} = det\ (A^T JA) = det\ J = ۱$$

در نتیجه $det\ A \neq ۰$ می‌باشد، بنابراین $Sp(n) \subseteq GL(۲n)$. از طرف دیگر $Sp(n)$ نسبت به ضرب بسته است، زیرا اگر $A, B \in Sp(n) \subseteq GL(۲n)$ در این صورت:

$$(AB)^T J\,(AB) = (B^T A^T)\,J\,(AB) = B^T\,(A^T J\,A)\,B = B^T J\,B = J$$

بنابراین $AB \in Sp(n)$ و این یعنی $Sp(n)$ نسبت به ضرب ماتریسی بسته است. در نتیجه $Sp(n)$ یک زیرگروه $GL(۲n)$ می‌باشد. حال تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} f : GL(۲n) \longrightarrow M_{۲n\times ۲n} \\ A \mapsto A^T JA \end{cases}$$

f پیوسته است و $f^{-۱}(J) = Sp(n)$. بنابراین $Sp(n)$ یک زیرمجموعه بسته $GL(۲n)$ می‌باشد و از آنجائیکه هر زیرگروه بسته یک گروه لی یک زیرگروه لی آن می‌باشد بنابراین $Sp(n)$ یک زیرگروه لی $GL(۲n)$ می‌باشد.

ب) برای یافتن جبر لی $Sp(n)$ یعنی $sp(n)$، به تمام ماتریس‌های $۲n \times ۲n$ مانند A نیاز داریم که در شرط زیر صدق کنند:

$$(e^{\varepsilon A})^T J\,(e^{\varepsilon A}) = J$$

با مشتق گرفتن از رابطه فوق نسبت به ε و قرار دادن $\varepsilon = ۰$ به رابطه $JA + A^T J = ۰$ می‌رسیم. بنابراین:

$$sp(n) \cong \left\{ A \in M_{۲n\times ۲n} \mid JA + A^T J = ۰ \right\}$$

حال بُعد جبر لی $Sp(n)$ را به عنوان یک فضای برداری حقیقی محاسبه می‌کنیم. اکنون ماتریس $A \in M_{۲n\times ۲n}$ را به صورت بلوکی می‌نویسیم:

$$A = \begin{bmatrix} A_۱ & A_۲ \\ A_۳ & A_۴ \end{bmatrix}$$

در این صورت $A \in sp(n)$ اگر و فقط اگر:

$$A_۳^T = A_۳, \quad A_۲^T = A_۲, \quad A_۱^T = -A_۴$$

بنابراین A_2 و A_3 باید ماتریس‌های $n\times n$ متقارن باشند و A_1 یک ماتریس $n\times n$ دلخواه می‌تواند باشد و از آنجائیکه A_4 بر حسب A_1 نوشته می‌شود آن را در نظر نمی‌گیریم. بنابراین:

$$dim\ sp(n)=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}+n^2=2n^2+n$$

و از آنجائیکه بُعد هر گروه لی با بُعد جبر لی آن یکی می‌باشد، بنابراین بُعد گروه لی $Sp(n)$ برابر با $2n^2+n$ است.

۸۸- $Im\varphi$ یک زیرگروه $\mathbb{R}$ می‌باشد اما چون φ پیوسته است بنابراین $Im\varphi$ بخاطر فشرده بودن S^1، باید فشرده باشد اما تنها زیرگروه جمعی فشرده $\mathbb{R}$، زیرگروه صفر می‌باشد بنابراین:

$$Im\varphi=\{\circ\}$$

۸۹- می‌دانیم که هر گروه لی توازی‌پذیر است، لذا با توجه به مساله ۴۸ حکم بدست می‌آید.

۹۰- الف) تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} f: M_{n\times n}\longrightarrow M_{n\times n} \\ A\mapsto AA^t \end{cases}$$

در این صورت f ، C^∞ است و $O(n)=f^{-1}(I)$ در نتیجه $T_I\,O(n)\cong kerf_{*I}$. اما

$$\begin{cases} f_{*B}: T_BM_{n\times n}\longrightarrow T_{BB^t}M_{n\times n} \\ (B,A)\mapsto (BB^t, A^tB+AB^t) \end{cases}$$

در حالت $B=I$ داریم:

$$\begin{cases} f_{*I}: T_IM_{n\times n}\longrightarrow T_IM_{n\times n} \\ f_{*I}(I,A)\mapsto (I, A+A^t) \end{cases}$$

لذا: مجموعه ماتریس‌های پادمتقارن $kerf_{*I}\cong\left\{A\in M_{n\times n}\mid A=-A^t\right\}=$

$$dim\,O(n) = dim\,o(n) = dim T_I O(n) = \frac{n(n-1)}{2}$$

ب) تعریف می‌کنیم $det : M_{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$. داریم $SL(n) = det^{-1}(1)$. تابع det یک تابع n خطی است. بنابراین اگر هر ماتریس $A \in M_{n\times n}$ را به صورت $A = (A_1, \ldots, A_n)$ نمایش دهیم که A_iها ستون‌های ماتریس A می‌باشند، در این صورت می‌توان نوشت

$$det(A) = det(A_1, \ldots, A_n)$$

و چون det، n خطی است، داریم

$$(*)\ det_{*_B}(A) = det(B_1, A_2, \ldots, A_n) + det(A_1, B_2, A_3, \ldots, A_n) + \cdots + det(A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, B_n)$$

در حالت کلی‌تر اگر $f : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{n} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابع n خطی باشد، آنگاه داریم:

$$f_{*_{(B_1,\ldots,B_n)}}(A_1, \ldots, A_n) = f(B_1, A_2, \ldots, A_n) + f(A_1, B_2, A_3, \ldots, A_n) + \cdots + f(A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, B_n)$$

حال در رابطه $(*)$ اگر قرار دهیم $B = I$ در این صورت خواهیم داشت:

$$det_{*_I}(A) = trace(A)$$

بنابراین $T_I\ SL(n) \cong ker(det_{*_I}) = \{A \in M_{n\times n} \mid trace(A) = 0\}$.

$$dim\,SL(n) = dim\,sl(n) = dim T_I SL(n) = n^2 - 1$$

۹۱- طبق تعریف داریم:

$$G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\} \qquad G_y = \{g \in G \mid g \cdot y = y\}$$

باید نشان دهیم وجود دارد $h \in G$ بطوریکه $G_y = h^{-1} G_x h$. چون عمل G ترایاست، بنابراین وجود دارد $h \in G$ بطوریکه $y = h\,x$ باشد. حال ادعا می‌کنیم $G_y = h^{-1} G_x h$.

$$h^{-1}gh \in G_x \Leftrightarrow (h^{-1}gh)(x) = x \Leftrightarrow gh \cdot x = h \cdot x \Leftrightarrow gy = y \Leftrightarrow g \in G_y$$

۹۲- عمل $\begin{cases} SO(n+1)\times IP_n(IR)\longrightarrow IP_n(IR) \\ (\ A\ ,\ [X]\ )\mapsto [A\cdot X] \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم.

از آنجاکه A یک ماتریس معکوس‌پذیر می‌باشد عمل فوق خوشتعریف و C^∞ می‌باشد. حال فرض می‌کنیم $X_\circ=[(1,\circ,\ldots,\circ)]\in IP_n(IR)$ و زیرگروه پایاگر $X_\circ$ را می‌یابیم

$$SO(n+1)_{X_\circ}=\left\{ A\in SO(n+1)\,\middle|\, A\cdot[X_\circ]=[X_\circ]\right\}$$

$$=\left\{ A=\left[\begin{array}{c|c} \pm 1 & o \\ \hline o & B \end{array}\right]\ \middle|\ B\in O(n)\right\}\cong O(n)$$

بنابراین نگاشت پیوسته زیر بدست می آید:

$$\tilde{\varphi}^X:\frac{SO(n+1)}{O(n)}\longrightarrow IP_n(IR)$$

ادعا می‌کنیم عمل فوق ترایا می‌باشد. یعنی به ازای هر $[X],[Y]\in IP_n(IR)$ وجود دارد $A\in SO(n+1)$ بطوریکه $A\cdot[X]=[Y]$. می‌توان فرض کرد بردارهای ناصفر X و Y یکه باشند. حال X را به یک پایه متعامد یکه‌ای با جهت مثبت $\beta_1=\{X,e_1,\ldots,e_n\}$ و بردار Y را به یک پایه متعامد یکه‌ای با جهت مثبت $\beta_2=\{Y,f_1,\ldots,f_n\}$ برای IR^{n+1} گسترش می‌دهیم. حال ماتریس تغییر پایه از β_1 به β_2 عضوی از $SO(n+1)$ می‌باشد که $[X]$ را به $[Y]$ می‌برد.

حال چون $SO(n+1)$ فشرده، عمل فوق ترایا و $IP_n(IR)$ هاسدورف است نتیجه می‌گردد که $\tilde{\varphi}^X$ یک دیفئومورفیسم است. بنابراین $IP_n(IR)\cong\dfrac{SO(n+1)}{O(n)}$.

یادآوری :

اگر $\varphi:G\times X\longrightarrow X$ یک عمل و $x\in X$ باشد همچنین فرض کنیم

$$G_x=\left\{ g\in G\,\middle|\, g\cdot x=x\right\}$$

و $\begin{cases} \tilde{\varphi}^x : \dfrac{G}{G_x} \longrightarrow X \\ g \cdot G_x \mapsto g \cdot x \end{cases}$ در این صورت

الف) $\tilde{\varphi}^x$ یک به یک است.

ب) اگر φ عملی ترایا باشد، $\tilde{\varphi}^x$ پوشاست.

ج) اگر φ پیوسته باشد، $\tilde{\varphi}^x$ نیز پیوسته است.

د) اگر X هاسدورف باشد، G_x یک زیرگروه بسته G است.

ه) اگر X هاسدورف، G فشرده و ترایا باشد در این صورت $\tilde{\varphi}^x$ یک دیفئومورفیسم است.

نکته‌ای کلی از توپولوژی: هر نگاشت وارون‌پذیر از یک فضای فشرده به یک فضای هاسدورف، همئومورفیسم است.

۹۳- خیر، فرض می‌کنیم $M = \mathbb{R}^2$ و $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

همچنین میدان برداری $X = \dfrac{\partial}{\partial y}$ را روی M در نظر می‌گیریم. X بوضوح کامل است. زیرا خم انتگرال آن بصورت $\varphi_t(x,y) = (x, t+y)$ می‌باشد. اما X روی U کامل نیست. زیرا خم انتگرال گذرنده از $p = (0,-1) \in U$ مربوط به X را نمی‌توان به کل $\mathbb{R}$ گسترش داد.

$$\varphi_t(0,-1) = (0, t-1) \qquad -\infty < t < 1$$

۹۴- خیر، فرض کنید $X = \dfrac{\partial}{\partial x}$ ، $M = \mathbb{R}$ و $f(x) = x^2$. به وضوح X روی M کامل است، در صورتیکه $f \cdot X = x^2 \dfrac{\partial}{\partial x}$ روی M کامل نیست. زیرا اگر α خم انتگرال X و β خم انتگرال $f \cdot X$ باشد آنگاه:

$$\alpha(t) = t + c$$

$$\beta(t) = -\frac{1}{t} + d$$

۹۵- داریم $Z = xy\frac{\partial}{\partial y} - \frac{x^۲}{۲}\frac{\partial}{\partial x}$ و لذا معادلات دیفرانسیل زیر را باید حل کنیم:

$$\begin{cases} x' = xy \\ y' = -\frac{x^۲}{۲} \end{cases}$$

اما چون $\varphi(t,(x,y))$ داده شده است مسیر برعکس را طی می‌کنیم

$$\varphi(t,(x,y)) = (\ \frac{۲x}{۲+xt}\ ,\ \frac{y}{۴}(tx+۲)^۲\ )$$

$$\varphi'(t,(x,y)) = (\ \frac{-۲x^۲}{(۲+xt)^۲}\ ,\ \frac{y}{۴}\times ۲x(tx+۲)\ )$$

$$\varphi'(\circ,(x,y)) = xy\frac{\partial}{\partial y} - \frac{x^۲}{۲}\frac{\partial}{\partial x} = Z$$

بنابراین $\varphi(t,(x,y))$ شار موضعی Z می‌باشد. حال چون دامنه خم‌های انتگرال Z لزوماً کل $\mathbb{R}$ نمی‌باشد، بنابراین Z کامل نیست.

۹۶- فرض می‌کنیم میدان‌های برداری $X_۱,\ldots,X_m$ چنان موجود باشند بطوریکه در هر نقطه $p \in M$، بردارهای $X_۱(p)\ ,\ldots,X_m(p)$ در T_pM مستقل خطی باشند. همچنین فرض می‌کنیم $v \in T_pM$، در این صورت اسکالرهای یکتای $\lambda_v^۱,\ldots,\lambda_v^m \in \mathbb{R}$ وجود دارند بطوریکه:

$$v = \lambda_v^۱\ X_۱(p) + \cdots + \lambda_v^m\ X_m(p)$$

حال تعریف می‌کنیم :

$$\begin{cases} \varphi : TM \longrightarrow M \times \mathbb{R}^m \\ (p,v) \mapsto (p,\lambda^۱,\ldots,\lambda^m) \end{cases}$$

φ یک دیفئومورفیسم می‌باشد. بنابراین:

$$TM \cong M \times \mathbb{R}^m$$

برعکس، اگر M توازی‌پذیر باشد، تعریف می‌کنیم: $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad i = ۱,\ldots,m$

۹۷- الف) قرار می‌دهیم:

$$S^m(r)=\left\{(x^1,\ldots,x^{m+1})\in \mathbb{R}^{m+1}\;\middle|\;(x^1)^2+\cdots+(x^{m+1})^2=r^2\right\}$$

و لذا $S^m=S^m(1)$ می‌باشد. S^m را به عنوان زیرمنیفلدی از $\mathbb{R}^{m+1}$ در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم:

$$\begin{cases}\widetilde{X}:S^m\longrightarrow T\mathbb{R}^{m+1}\\ x\mapsto (x,X(x))\end{cases}$$

نگاشتی C^∞ باشد.

می‌دانیم که $\widetilde{X}$ یک میدان برداری روی S^m تعریف می‌کند اگر و فقط اگر:

$$\forall x\in S^m\qquad \langle x,X(x)\rangle=0$$

حال تابع $f:S^m\longrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ را با ضابطه $f(x)=x+\varepsilon X(x)$ در نظر می‌گیریم که در آن $\varepsilon>0$ یک عدد ثابت است. اگر فرض کنیم میدان برداری $\widetilde{X}$ در هیچ نقطه از S^m صفر نگردد، می‌توانیم فرض کنیم دارای طول ثابت یک باشد یعنی

$$\forall x\in S^m\qquad \langle X(x),X(x)\rangle=1$$

حال داریم $\|f(x)\|^2=\langle x+\varepsilon X(x),\ x+\varepsilon X(x)\rangle=1+\varepsilon^2$.

بنابراین بُرد f در $S^m(r)$ می‌باشد که در آن $r=\sqrt{1+\varepsilon^2}$ می‌باشد. یعنی:

$$f:S^m\longrightarrow S^m(r)$$

یک دیفئومورفیسم می‌باشد. حال فرم حجمی طبیعی روی $S^m(r)$ را در نظر می‌گیریم:

$$\omega=\sum_{i=1}^{m+1}(-1)^i x^i\,dx^1\wedge\ldots\wedge d\hat{x}^i\wedge\ldots\wedge dx^{m+1}$$

با محاسبه انتگرال $\frac{1}{r}\int_{S^m(r)}\omega$ نتیجه می‌گردد که وجود دارد عدد ثابت $C_m\in\mathbb{R}^+$ بطوریکه:

$$\frac{1}{r}\int_{S^m(r)}\omega=C_m r^m$$

حال با استفاده از تغییر متغیر انتگرال‌ها داریم:

$$\int_{S^m(r)} \omega = \int_{S^m} f^*\omega = C_m r^{m+1} = C_m (1+\varepsilon^2)^{\frac{m+1}{2}}$$

از طرفی با توجه به ضابطه f نتیجه می‌گردد که $\int_{S^m} f^*\omega$ یک چندجمله‌ای بر حسب ε می‌باشد.

اگر $m = 2n$ زوج باشد $C_m (1+\varepsilon^2)^{\frac{m+1}{2}}$ یک چندجمله‌ای بر حسب ε نمی‌باشد و این تناقض می‌باشد.

ب) بنا به قسمت الف هر میدان برداری روی S^{2n} در نقطه‌ای از آن صفر می‌شود. بنابراین نمی‌توان تعداد $2n$ میدان برداری پیوسته مانند $X_1,\ldots,X_{2n}$ روی S^{2n} چنان یافت که در هر نقطه $p \in S^{2n}$، $\{X_1(p),\ldots,X_{2n}(p)\}$ پایه‌ای برای T_pS^{2n} باشد.

۹۸- الف) میدان‌های برداری X_i بدلیل مستقل بودن ∂_iها، تنها در نقطه‌ی صفر، صفر می‌شوند. بنابراین روی $\mathbb{R}^4 - \{0\}$ ناصفرند، و در نتیجه روی S^3.

ب) چون بُعد T_pS^3 برابر ۳ می‌باشد، کافی است نشان دهیم مجموعه

$$\{X_1(p), X_2(p), X_3(p)\}$$

به ازای هر $p \in S^3$ مستقل خطی است. فرض می‌کنیم $p = (x_1,x_2,x_3,x_4) \in S^3$ در این صورت $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$. همچنین

$$X_1(p) = (-x_2, x_1, x_4, -x_3)$$
$$X_2(p) = (-x_4, x_3, -x_2, x_1)$$
$$X_3(p) = (-x_3, -x_4, x_1, x_2)$$

با در نظر گرفتن $a,b,c \in \mathbb{R}$ که $a X_1(p)+b X_2(p)+c X_3(p)=0$، می‌توان نتیجه گرفت $a=b=c=0$. بنابراین مجموعه $\{X_1(p), X_2(p), X_3(p)\}$ مستقل خطی است و لذا پایه‌ای برای T_pS^3 تشکیل می‌دهد.

ج) با توجه به قسمت‌های (الف) و (ب) و مساله ۹۶ حکم نتیجه می‌شود.

د) فرض می‌کنیم

$$\alpha(t)=(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))$$

خم انتگرال X_1 باشد. در این صورت باید این معادلات را حل کنیم:

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 \\ x_2' = x_1 \\ x_3' = x_4 \\ x_4' = -x_3 \end{cases}$$

جواب دستگاه بالا عبارتست از:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 e^t + c_2 e^{-t} \\ x_2(t) &= -c_1 e^t + c_2 e^{-t} \\ x_3(t) &= -c_3 e^t + c_4 e^{-t} \\ x_4(t) &= c_3 e^t + c_4 e^{-t} \end{aligned}$$

ه) برای این منظور کافی است نشان دهیم $X \cdot f = 0$.

$$X \cdot f = \langle \nabla f, X \rangle = \langle (-x_2, x_1, x_4, -x_3), (x_3, -x_4, x_1, -x_2) \rangle = 0$$

و) به راحتی می‌توان دید:

$$X_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_2, x_1, x_4, -x_3) = (x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k) \cdot i$$

بنابراین طبق تعریف X_1 همان میدان برداری راست پایای تولید شده توسط i می‌باشد. به طور مشابه برای X_2 و X_3 حکم بدست می‌آید.

۹۹- فرض می‌کنیم $X = \nabla f = 2x\frac{\partial}{\partial x} - 2y\frac{\partial}{\partial y}$ در این صورت با توجه به اینکه α_n خم انتگرال X است، داریم $X(\alpha_n(t)) = \alpha_n'(t)$. بنابراین $\alpha_n(t) = (\frac{1}{n^2}e^{2t}, e^{-2t})$. به همین ترتیب می‌توان β_n و γ_n را محاسبه کرد.

$$\beta_n(t) = (\frac{1}{n}e^{2t}, \frac{1}{n}e^{-2t})$$
$$\gamma_n(t) = (e^{2t}, \frac{1}{n^2}e^{-2t})$$

همچنین:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n(t) = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n^2}e^{2t}, e^{-2t}) = (0, e^{-2t})$$
$$\lim_{n\to\infty} \beta_n(t) = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n}e^{2t}, \frac{1}{n}e^{-2t}) = (0, 0)$$
$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n(t) = \lim_{n\to\infty} (e^{2t}, \frac{1}{n^2}e^{-2t}) = (e^{2t}, 0)$$

۱۰۰- Y یک میدان برداری تحت φ روی T^2 القا می‌کند اگر و فقط اگر:

$$\forall k_1, k_2 \in Z \qquad Y(\theta_1 + 2k_1\pi, \theta_2 + 2k_2\pi) = Y(\theta_1, \theta_2)$$

بویژه می‌توان میدان برداری ثابت را در نظر گرفت. حال اگر E_1 و E_2 میدان‌های برداری کانونیک روی $\mathbb{R}^2$ باشند. یعنی:

$$\begin{cases} E_1 : I\!R^2 \longrightarrow TI\!R^2 \\ p \mapsto (p,(1,0)) \end{cases} \qquad \begin{cases} E_2 : I\!R^2 \longrightarrow TI\!R^2 \\ p \mapsto (p,(0,1)) \end{cases}$$

در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\sigma : T^2 \times I\!R^2 \longrightarrow T(T^2)$$
$$(m, x_1, x_2) \mapsto x_1 \widetilde{E}_1(m) + x_2 \widetilde{E}_2(m)$$

که در آن $\widetilde{E}_i$ میدان برداری القایی روی T^2 از روی E_i تحت نگاشت φ می‌باشد. می‌توان دید که σ یک ایزومورفیسم کلاف‌های برداری روی T^2 می‌باشد، بنابراین:

$$T(T^2) \cong T^2 \times I\!R^2$$

در نتیجه چنبره یک منیفلد توازی‌پذیر می‌باشد.

البته از آنجائیکه $T^2 \cong S^1 \times S^1$ حاصلضرب دو منیفلد جهت‌پذیر می‌باشد، خود جهت‌پذیر است.

۱۰۱- الف) فرض می‌کنیم $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ خم انتگرال X باشد. در این صورت برای بدست آوردن آن باید معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \end{cases} \Rightarrow x'' = x' + y' \Rightarrow x'' = x' + x - y \Rightarrow x'' = x + y + x - y \Rightarrow x'' = 2x$$

$$\Rightarrow x(t) = c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t}$$

$$\Rightarrow y(t) = (\sqrt{2} - 1)c_1 e^{\sqrt{2}t} - (\sqrt{2} + 1)c_2 e^{-\sqrt{2}t}$$

ب) از آنجائیکه $\gamma(0) = (0, 2\sqrt{2})$ می‌باشد بنابراین:

$$\begin{cases} x(0) = c_1 + c_2 = 0 \\ y(0) = (\sqrt{2} - 1)c_1 - (\sqrt{2} + 1)c_2 = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

با حل دستگاه فوق خواهیم داشت $c_1 = 1$ و $c_2 = -1$. در نتیجه خم انتگرال مورد نظر عبارت است از $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ که در آن:

$$x(t) = e^{\sqrt{2}t} - e^{-\sqrt{2}t}$$

$$y(t) = (\sqrt{2} - 1)e^{\sqrt{2}t} + (\sqrt{2} + 1)e^{-\sqrt{2}t}$$

با توجه به عبارات اخیر γ روی کل $\mathbb{R}$ تعریف شده است.

ج) با توجه به خم‌های انتگرال X، می‌توان گفت که X یک میدان برداری کامل است.

۱۰۲- با توجه به خواص شار و تعریف آن در این مساله می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}\varphi(\circ,x)=g(\circ)h(x)\\ \varphi(\circ,x)=x\end{cases}\Rightarrow\ g(\circ)h(x)=x\ \Rightarrow\ h(x)=\frac{1}{g(\circ)}x$$

$$\varphi(t+s,x)=\varphi(t,\varphi(s,x))\Rightarrow g(t+s)h(x)=\varphi(t,g(s)\cdot h(x))=g(t)\cdot h(g(s)\cdot h(x))$$

$$\Rightarrow g(t+s)h(x)=g(t)\cdot h(g(s)\cdot h(x))$$

$$\Rightarrow g(t+s)\cdot\frac{1}{g(\circ)}x=g(t)\frac{1}{g(\circ)}g(s)\cdot h(x)=g(t)\frac{1}{g(\circ)}g(s)\frac{x}{g(\circ)}$$

$$\Rightarrow g(\circ)\cdot g(t+s)=g(t)\cdot g(s)$$

اما می‌دانیم چنین توابعی مانند g به شکل a^t می‌باشد که $a\in\mathbb{R}-\{\circ\}$. یعنی φ باید به شکل زیر باشد:

$$\varphi(t,x)=xa^t.$$

حال اگر X میدان برداری مولد φ باشد، آنگاه

$$X=\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x)\Big|_{t=\circ}=xlna\frac{\partial}{\partial x}$$

۱۰۳- خیر. زیرا اگر $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\xrightarrow{C^{+\infty}}\mathbb{R}$ نسبت به مؤلفه اولش خطی باشد، باید داشته باشیم:

$$f(t+t',x)=f(t,x)+f(t',x)$$

حال اگر f شار موضعی روی $\mathbb{R}$ باشد، آنگاه:

$$f(t,f(t',x))=f(t+t',x)=f(t,x)+f(t',x)$$

با فرض $t=\circ$ خواهیم داشت:

$$f(\circ,f(t',x))=f(\circ,x)+f(t',x)\ \Rightarrow\ f(t',x)=x+f(t',x)\quad\Rightarrow\quad x=\circ$$

که تناقض است.