۶۳- الف) داریم

$$Df(x,y)=\begin{pmatrix}۳x^{۲}-۳y\\ ۳y^{۲}-۳x\end{pmatrix}$$

چون $dim\ \mathbb{R}^{۲} > dim\ \mathbb{R}$ پس f نمی‌تواند ایمرسیون باشد.
حال سوبمرسیون بودن f را بررسی می‌کنیم. نقاطی که f در آنها سوبمرسیون است، نقاطی است که در آنها $rank\ Df$ برابر ۱ باشد یعنی f در نقاطی که در معادله زیر صدق می‌کنند، نمی‌تواند سوبمرسیون باشد:

$$\begin{cases}۳x^{۲}-۳y=۰\\ ۳y^{۲}-۳x=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^{۲}=y\\ y^{۲}=x\end{cases}\Rightarrow x^{۴}=x\Rightarrow\begin{cases}x=۰\Rightarrow y=۰\\ x=۱\Rightarrow y=۱\end{cases}$$

اما $f(۰,۰)=۰$ و $f(۱,۱)=-۱$. در نتیجه تمام مجموعه‌های تراز به جز احتمالا $f^{-۱}(-۱)$ و $f^{-۱}(۰)$ بنا به قضیه رتبه، زیرمنیفلد $\mathbb{R}^{۲}$ هستند.

ب) داریم :

$$Df(x,y,z)=\begin{pmatrix}۴x(x^{۲}+y^{۲}-۴)\\ ۴y(x^{۲}+y^{۲}-۴)\\ ۲z\end{pmatrix}$$

در نقاطی که در معادلات زیر صدق می‌کنند f نمی‌تواند یک سوبمرسیون باشد :

$$\begin{cases}۴x(x^{۲}+y^{۲}-۴)=۰ & \Rightarrow\quad x=۰\vee x^{۲}+y^{۲}-۴=۰\\ ۴y(x^{۲}+y^{۲}-۴)=۰ & \Rightarrow\quad y=۰\vee x^{۲}+y^{۲}-۴=۰\\ ۲z=۰ & \Rightarrow\quad z=۰\end{cases}$$

مجموعه جواب دستگاه فوق عبارتست از $A\cup\{(۰,۰,۰)\}$ که در آن $A=\{(x,y,۰)\,|\,x^{۲}+y^{۲}=۴\}$
حال $f(۰,۰,۰)=۱۵$ و به ازای هر $(x,y,۰)\in A$ داریم $f(x,y,۰)=-۱$. پس تمام مجموعه‌های تراز به جز احتمالاً $f^{-۱}(۱۵)$ و $f^{-۱}(-۱)$ بنا به قضیه رتبه، زیرمنیفلد $\mathbb{R}^{۳}$ هستند.

ج) داریم :

$$Df(x,y,z)=\begin{pmatrix} ۲(۸x-۱۶x^{۳})(۴x^{۲}(۱-x^{۲})-y^{۲}) \\ -۴y(۴x^{۲}(۱-x^{۲})-y^{۲}) \\ ۲z \end{pmatrix}$$

f نمی‌تواند در نقاطی که در معادلات زیر صدق می‌کنند یک سوبمرسیون باشد:

$$\begin{cases} ۲(۸x-۱۶x^{۳})(۴x^{۲}(۱-x^{۲})-y^{۲})=۰ \\ ۴y(۴x^{۲}(۱-x^{۲})-y^{۲})=۰ \\ z=۰ \end{cases}$$

مجموعه جواب دستگاه فوق عبارتست از $A\cup\{(۰,۰,۰)\,,\,(\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲},۰,۰)$ که در آن

$$A=\left\{(x,y,۰)\,\middle|\,۴x^{۲}(۱-x^{۲})=y^{۲}\right\}$$

حال $f(۰,۰,۰)=\frac{۱}{۴}$ ، $f(\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲},۰,۰)=\frac{۳}{۴}$ و به ازای هر $(x,y,۰)\in A$ داریم:

$$f(x,y,۰)=-\frac{۱}{۴}$$

در نتیجه تمام مجموعه‌های تراز به جز احتمالا $f^{-۱}(-\frac{۱}{۴})$ ، $f^{-۱}(\frac{۳}{۴})$ و $f^{-۱}(\frac{۱}{۴})$ بنا به قضیه رتبه، زیرمنیفلد هستند.

۶۴- اگر $f:M^{m}\longrightarrow N^{n}$ یک سوبمرسیون باشد در این صورت به ازای هر $x\in M$ وجود دارند کارت‌های (X,U) حول x و (Y,V) حول $f(x)$ بطوریکه:

$$\begin{cases} Y\circ f\circ X^{-۱}:X(U\cap f^{-۱}(V))\subseteq I\!R^{m}\longrightarrow Y(V)\subseteq I\!R^{n} \\ (y^{۱},\ldots,y^{n},y^{n+۱},\ldots,y^{m})\mapsto(y^{۱},\ldots,y^{n}) \end{cases}$$

بنابراین $Y\circ f\circ X^{-۱}$ مانند تصویرگر روی nمولفه اول است و تصویرگرها باز هستند. چون Y,X دیفئومورفیسم می‌باشند نتیجه می‌شود که f نیز یک نگاشت باز است.

روش دوم : فرض می‌کنیم $f:M^m \longrightarrow N^n$ یک سوبمرسیون باشد و U بازی از M باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که $f(U)$ در N باز است. فرض می‌کنیم $q \in f(U)$ و $p \in U$ چنان باشد که $f(p)=q$. حال بُرش موضعی $g:V \longrightarrow M$ از f حول q را چنان در نظر می‌گیریم که $g(q)=p$. چون g پیوسته است بنابراین $g^{-1}(U)$ باز است از طرف دیگر $f(p) \in g^{-1}(U)$. زیرا g یک بُرش از f حول $q=f(p)$ می‌باشد بنابراین $q=g^{-1}(U)$ و همچنین $g^{-1}(U) \subseteq f(U)$ زیرا از $U \subseteq f^{-1} \circ f(U)$ نتیجه می‌گردد که:

$$g^{-1}(U) \subseteq g^{-1} \circ f^{-1} \circ f(U) = Id \circ f(U) = f(U)$$

۶۵- ابتدا نشان می دهیم که به ازای هر $x \in M$ همسایگی $U_{f(x)}$ از $f(x)$ در N و نگاشت C^∞، $s:U_{f(x)} \longrightarrow M$ چنان وجود دارند که $f \circ s = \mathbf{1}_U$. بعلاوه $s(f(x))=x$. (بُرش‌های موضعی) با فرض اینکه مطلب فوق نشان داده شده است، به ازای $y \in N$ چون f پوشاست وجود دارد $x \in M$ بطوریکه $f(x)=y$ و بنا بر مطلب فوق همسایگی U_y از y در N و نگاشت C^∞، $s:U_y \longrightarrow M$ موجود است بطوریکه $f \circ s = \mathbf{1}_{U_y}$. حال چون ترکیب دو تابع C^∞ مجدداً C^∞ است بنابراین $g|_{U_y} = g \circ \mathbf{1}_{U_y} = g \circ f \circ s : U \longrightarrow P$، C^∞ است. حال چون g بطور موضعی C^∞ است با استفاده از قضیه افراز یکانی نتیجه می‌گردد که g نیز C^∞ است.

اثبات وجود بُرش‌های موضعی : کارت‌های (X,U) و (Y,V) را حول x و $f(x)$ در نظر می‌گیریم بطوریکه:

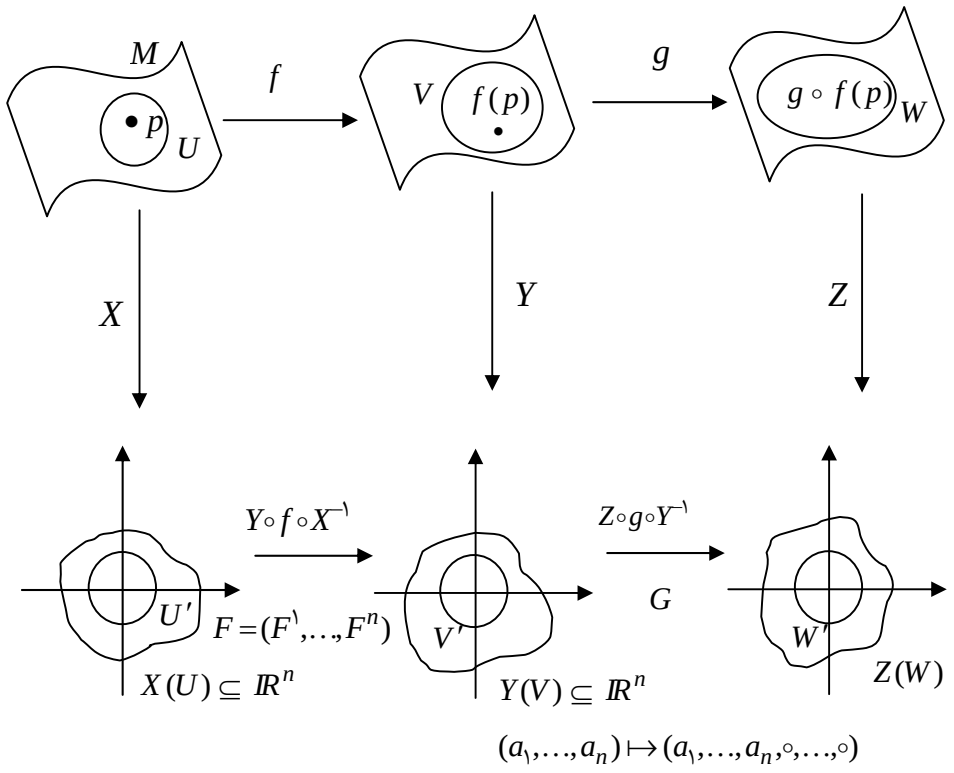
$$Y \circ f \circ X^{-1}(b^1,\dots b^n,b^{n+1},\dots,b^m) = (b^1,\dots,b^n,\dots\circ,\dots,\circ)$$

حال اگر $X(x)=(a_\circ,b_\circ) \in I\!R^{n+k}$ باشد. نگاشت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \tilde{g} : I\!R^n \longrightarrow I\!R^{n+k} \\ \tilde{g}(c)=(c,b_\circ) \end{cases}$$

که بوضوح یک بُرش از $F = Y \circ f \circ X^{-1}$ است. زیرا از $F(a,b)=a$ نتیجه می‌شود که $(F \circ \tilde{g})(c) = F(c,b_\circ) = c$ و لذا $g = X^{-1} \circ F \circ Y$ یک بُرش موضعی از f خواهد بود.

۶۶- فرض می‌کنیم $p \in M$ باشد و $(Z,W),(Y,V),(X,U)$ به ترتیب کارت‌هایی حول p ، $f(p)$ ، $g \circ f(p)$ باشند بطوریکه بنا به قضیه رتبه داشته باشیم:



چون f پیوسته است، بنابراین $F = Y \circ f \circ X^{-1}$ و $G \circ F$ نیز پیوسته‌اند. در نتیجه:

$$U^{1} = (G \circ F)^{-1}(Z(W))$$

در $X(U)$ باز است. حال با جایگذاری U^{1} به جای $X(U)$ داریم:

$$b = (b_1,\ldots,b_m) \in U^{1} \subseteq \mathbb{R}^m \xrightarrow{F} V^{1} \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{G} W^{1} \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$$

$$G \circ F(b_1,\ldots,b_m) = (F^{1}(b),\ldots,F^{n}(b),0,\ldots,0)$$

چون $G \circ F$ دیفرانسیل‌پذیر است بنابراین F^iها نیز دیفرانسیل‌پذیرند اما در این صورت F دیفرانسیل‌پذیر است و در نتیجه $f = Y^{-1} \circ F \circ X$ دیفرانسیل‌پذیر است.

۶۷- بله، از آنجائیکه ترکیب دو نگاشت یک به یک مجدداً یک به یک است، حکم نتیجه می‌شود.

۶۸- بله، از آنجائیکه ترکیب دو نگاشت پوشا مجدداً پوشا است، حکم نتیجه می‌شود.

۶۹- روش اول (برهان خلف): اگر $f : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ یک ایمرسیون باشد و کارت (φ, U) را برای S^1 چنان در نظر بگیریم که

$$\varphi^{-1}(\theta) = e^{i\theta} \qquad \theta \in (-\pi, \pi)$$

در این صورت $f \circ \varphi^{-1}$ یک ایمرسیون از $(-\pi, \pi)$ به $\mathbb{R}$ می‌باشد. بنابراین به طور اکید یکنوا می‌باشد و چون f روی کل S^1 تعریف شده است در نتیجه باید

$$\lim_{\theta \longrightarrow \pi} f \circ \varphi^{-1}(\theta) = \lim_{\theta \longrightarrow -\pi} f \circ \varphi^{-1}(\theta)$$

که تناقض است.

روش دوم: می‌دانیم هرگاه $f : M \longrightarrow N$ یک ایمرسیون بین دو منیفلد همبُعد باشد آنگاه f یک نگاشت باز خواهد بود. بنابراین اگر $f : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ یک ایمرسیون باشد آنگاه f یک نگاشت باز خواهد بود بنابراین مجموعه ناتهی $f(S^1)$ در $\mathbb{R}$ هم باز و هم بسته است. از آنجائیکه $\mathbb{R}$ همبند است، نتیجه می‌گردد $f(S^1) = \mathbb{R}$. بنابراین $\mathbb{R}$ فشرده خواهد بود که تناقض است.

۷۰- خیر. زیرا در این صورت بطری کلاین یک زیرمنیفلد دو بُعدی و فشرده $\mathbb{R}^3$ می‌باشد. بنابراین باید جهت‌پذیر باشد لیکن می‌دانیم که بطری کلاین جهت‌پذیر نمی‌باشد و این تناقض است. (به مساله ۲۰ از مسائل تکمیلی مراجعه کنید).

۷۱- باید نشان دهیم یک امبدینگ (نشاننده) $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^d$ موجود است. از آنجائیکه M یک منیفلد فشرده است، بنابراین می‌توانیم با تعداد متناهی دستگاه مختصات $(z^k, W^k), \ldots, (z^1, W^1)$ کل M را بپوشانیم یعنی $M = W^1 \cup \cdots \cup W^k$. می‌دانیم وجود دارند مجموعه‌های باز $U^1, \ldots, U^k \subseteq M$ بطوریکه:

$$\begin{cases} i = 1, \ldots, k \quad \overline{U}^i \subseteq W^i \\ M = U^1 \cup \ldots \cup U^k \end{cases}$$

و $\overline{U^i}$ فشرده باشند، همچنین توابع C^∞، $\varphi_i : M \longrightarrow [0,1]$ چنان موجودند بطوریکه:

$$\begin{cases} \varphi_i(\overline{U}^i) = \{1\} \\ Supp\ \varphi_i \subset W^i \end{cases}$$

حال قرار می‌دهیم $d = (k+1)\ dim\, M$ و تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} f : M \longrightarrow \mathbb{R}^d \\ p \mapsto f(p) = (\varphi_1(p), \ldots, \varphi_k(p), \varphi_1(p)\, z(p), \ldots, \varphi_k(p)\, z^k(p)) \end{cases}$$

$\varphi_i\, z^i$ برای نقاط در دامنه z^i تعریف شده است و در خارج از آن صفر می‌باشد و همگی توابع C^∞ هستند. چون مولفه‌ها توابع C^∞ هستند، بنابراین f تابعی C^∞ است.

بعلاوه f یک به یک نیز می‌باشد. زیرا اگر $f(p) = f(q)$ باشد نشان می‌دهیم $p = q$. حداقل یک اندیس i موجود است که $p \in W^i$ و لذا $\varphi_i(p) = 1$ و چون $f(p) = f(q)$ می‌باشد بنابراین $\varphi_i(q) = 1$ در نتیجه $q \in Supp(\varphi_i) \subseteq W^i$ همچنین $p, q \in W^i$. بعلاوه از $f(p) = f(q)$ نتیجه می‌گردد که $\varphi_i(p)\, z^i(p) = \varphi_i(q)\, z^i(q)$.

بنابراین $z^i(p) = z^i(q)$ و چون z^i یک دیفئومورفیسم روی W^i می‌باشد نتیجه می‌گردد $p = q$. f یک ایمرسیون نیز می‌باشد. زیرا به ازای هر $p \in M$ اندیس i چنان موجود است که $p \in U^i$ و لذا

کافی است نشان دهیم تحدید f به هر U^i یک ایمرسیون است. اما تحدید f به U^i بصورت $f(q) = (\ldots, z^i(q), \ldots)$ است و این مولفه به تنهایی رتبه‌ای برابر با بُعد M تولید می‌کند. حال از آنجائیکه هر تابع ایمرسیون و یک به یک با دامنه فشرده یک امبدینگ (نشاننده) می‌باشد، بنابراین $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^d$ یک امبدینگ می‌باشد و حکم بدست می‌آید.

۷۲- می‌دانیم که اگر ایمرسیون $f : M \longrightarrow N$ یک به یک و بر روی تصویرش نگاشت باز یا بسته باشد در این صورت یک نشاننده است. همچنین می‌توان شرط بسته بودن را با شرط سره بودن f جایگزین کرد. (f را سِره گوییم در صورتیکه برای هر $K \subset N$ فشرده، $f^{-1}(K)$ در M فشرده باشد).

حال $f : \mathbb{R} - \{\circ\} \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(t) = \frac{1}{t}$ تعریف می‌کنیم. وقتی t به سمت ∞ میل کند، $f(t)$ به سمت صفر میل می‌کند، در نتیجه $f^{-1}(\circ)$ بی‌کران است، لذا فشرده نیست. ولی f یک امبدینگ (نشاننده) است.

۷۳- فرض کنیم $h : x \mapsto (\ x, f(x)\ )$. واضح است که h، C^r است. زیرا f، C^r است. برای امبدینگ بودن h باید ثابت کنیم h یک همئومورفیسم بین M و $h(M)$ است و در ضمن باید ایمرسیون نیز باشد. توجه کنید که h یک به یک است :

$$(x, f(x)) = (y, f(y)) \Rightarrow x = y$$

h_{*_x} نیز یک به یک است :

$$h_{*_x}(h) = (\ h,\ f_{*_x}(h)\ ) = \circ \Rightarrow h = \circ$$

برای اثبات همئومورفیسم بودن باید ثابت کنیم $h : M \longrightarrow h(M)$ باز است. فرض کنیم $U \subset M$ باز باشد. داریم :

$$h(U) = \{\ (x, f(x))\ ,\ x \in U\ \} = (U \times N) \cap \Gamma f$$

که بنا به توپولوژی القایی $(U \times N) \cap \Gamma f \subset \Gamma f = h(M)$ باز است. بنابراین h یک نشاننده است.

۷۴- $(\Leftarrow)$ اگر G هاسدورف باشد زیرمجموعه‌های تک عضوی از G در آن بسته هستند. حال تابع پیوسته $\begin{cases} f: G\times G \longrightarrow G \\ (g,h)\mapsto gh^{-1} \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم در این صورت $\Delta = f^{-1}(\{e\})$ و لذا Δ در $G\times G$ بسته است.

$(\Rightarrow)$ فرض می‌کنیم Δ در $G\times G$ بسته باشد و $g,h\in G$ دو عضو دلخواه باشند در این صورت $(g,h)\in \Delta^c$ و چون Δ بسته است لذا Δ^c باز است بنابراین یک همسایگی باز به فرم $U\times V\subseteq G\times G$ از (g,h) چنان موجود است که $U,V\subseteq G$ باز باشند و $g\in G, h\in V$ همچنین $U\times V\subseteq \Delta^c$. ادعای ما این است که $U\cap V=\phi$ زیرا در غیر این صورت اگر $z\in U\cap V$ آنگاه $(z,z)\in U\times V$ و این یعنی $(U\times V)\cap\Delta\neq\phi$ که خلاف فرض $U\times V\subseteq\Delta^c$ می‌باشد.

۷۵- $(\Rightarrow)$ اگر $\{e\}$ بسته باشد بنا به استدلال مساله فوق، Δ در $G\times G$ بسته است و لذا G هاسدورف می‌باشد.

$(\Leftarrow)$ بدیهی است.

۷۶- فرض می‌کنیم $G\supseteq U$ در G باز باشد بطوریکه $e\in U$. همچنین فرض می‌کنیم $g\in G$. باید نشان دهیم $g\in <U>$. به عبارت دیگر $G=<U>$. قرار می‌دهیم:

$$H=\bigcup_{g\in U} Ug$$

در اینصورت چون U باز است و $L_g: G\longrightarrow G$ به ازای هر g یک دیفئومورفیسم است بنابراین $H\subseteq G$ باز و ناتهی است. حال نشان می‌دهیم H' متمم H نیز باز است و لذا هم باز هم بسته خواهد بود بنابراین چون G همبند و H ناتهی است نتیجه می‌گردد که $G=H$. اما باز بودن H' نیز مشابه اثبات باز بودن H است. $H'=\bigcup_{g\notin U} Ug$.

۷۷- فرض کنیم G یک گروه توپولوژیک و H زیرگروهی از آن باشد، باید نشان دهیم $\overline{H} \le G$ و این معادل است با اینکه نشان دهیم $\forall x, y \in \overline{H} \quad , \quad xy^{-1} \in \overline{H}$. یعنی $\overline{H}$ زیرگروه G است. چون G گروهی توپولوژیک است تابع $j(x, y) = xy^{-1}$ پیوسته است. برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم برای هر همسایگی از xy^{-1} مانند $V_{xy^{-1}}$ داریم $V_{xy^{-1}} \cap \overline{H} \neq \phi$.

چون xy^{-1} در بُرد j است بنا بر تعریف پیوستگی، به ازای هر همسایگی مانند $V_{xy^{-1}}$، همسایگی V_x از x و V_y از y وجود دارند بطوریکه $V_x \cdot V_y^{-1} = j(V_x \times V_y) \subseteq V_{xy^{-1}}$.

اما چون $x \in \overline{H}$ و V_x همسایگی حول x می‌باشد، درنتیجه $V_x \cap \overline{H} \neq \phi$ و همچنین $V_y \cap \overline{H} \neq \phi$. فرض کنیم $h' \in V_x \cap H$ و $h'' \in V_y \cap H$ باشند، داریم

$$h = h' h''^{-1} \in V_x \cdot V_y^{-1}$$

در نتیجه $h \in V_x \cdot V_{y^{-1}} \subseteq V_{xy^{-1}}$. در ضمن چون H زیرگروه G می‌باشد خواهیم داشت

$$h \in H$$

در نتیجه $h \in V_{xy^{-1}} \cap H$ یعنی $H \cap V_{xy^{-1}} \neq \phi$.

۷۸- می‌دانیم $G' = \bigcup_n G_n$ که $G_n = \left\{ \prod_{i=1}^{n} x_i y_i x_i^{-1} y_i^{-1} \quad , \quad x_i, y_i \in G \right\}$. اگر نشان دهیم به ازای هر n، G_n همبند است ، چون $e \in \bigcap_n G_n$ آنگاه می‌توان نتیجه گرفت که G' همبند است. اما از آنجا که G همبند است پس حاصلضرب G در خودش (حتی بینهایت بار) نیز همبند است و چون تابع حاصلضرب تابعی پیوسته است نتیجه می‌شود که هر مجموعه همبند را به مجموعه همبند می‌برد، بنابراین به ازای هر n، G_n همبند است.

۷۹- داریم:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad A_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{bmatrix} \in Sl(n, \mathbb{R})$$

$SL(n, \mathbb{R})$ فشرده نیست $\Rightarrow SL(n, \mathbb{R})$ بی‌کران است $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|A_n\| = +\infty \;,\; detA_n = 1$

۸۰- با توجه به تعریف $SU(2)$، یعنی:

$$SU(2) = \left\{ A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}) \;\middle|\; A \cdot A^* = I \,, det(A) = 1 \right\}$$

می‌توان دید که :

$$SU(2) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{C} \,,\, a\bar{a} + b\bar{b} = 1 \right\}$$

حال از آنجائیکه $a, b \in \mathbb{C}$ می‌توان فرض کرد $a = x_1 + i\, x_2 \;,\; b = x_3 + i\, x_4$ که در آن:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$$

اکنون نگاشت $\begin{cases} SU(2) \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ A \mapsto (x_1, x_2, x_3, x_4) \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم که در آن:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} \in SU(2)$$

و $a = x_1 + i\, x_2 \;,\; b = x_3 + i\, x_4$ است. تصویر این نگاشت عبارتست از نقاطی مانند a, b بطوریکه $a\bar{a} + b\bar{b} = 1$ و یا $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$. بنابراین می‌توان یک یکریختی مانند:

$$\begin{cases} f : SU(۲) \longrightarrow S^{۳} \\ A \mapsto (x_{۱}, x_{۲}, x_{۳}, x_{۴}) \end{cases}$$

تعریف کرد. در نتیجه $SU(۲) \cong S^{۳}$.

برای بدست آوردن جبر لی $SU(۲)$ یعنی $S^{۳}$ کافی است جبر لی $T_1 S^{۳}$ یعنی:

$$su(۲) = T_I\, SU(۲)$$

را بدست آوریم. برای این کار از روش زیر استفاده می‌کنیم که مبتنی بر چند قضیه در مورد گروه‌های لی می‌باشد. خم‌های زیر را در نظر می‌گیریم و با مشتق گیری از آن‌ها و محاسبه مشتقات در $t = ۰$ فضای مماس بر $SU(۲)$ را در ماتریس همانی بدست می‌آوریم.

$$\begin{cases} \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow SU(۲) \\ t \mapsto e^{tA} \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^{tA} e^{tA^*} = I \\ A e^{tA} e^{tA^*} + e^{tA} A^* e^{tA^*} = ۰ \\ A + A^* = ۰ \end{cases} \qquad \text{با قرار دادن } t = ۰$$

$$\begin{cases} det\,(e^{tA}) = e^{t \cdot trace(A)} = ۱ \\ trace(A) \cdot e^{t \cdot trace(A)} = ۰ \\ trace(A) = ۰ \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \text{با مشتق‌گیری نسبت به } t \text{ داریم} \\ \\ \text{با قرار دادن } t = ۰ \end{array}$$

در نتیجه $su(۲) = \left\{ A \in M_{۲\times۲}(\mathbb{C}) \;\middle|\; A + A^* = ۰ \,,\, trace(A) = ۰ \right\}$ که با ساختار جبر لی القایی از $M_{۲\times۲}(\mathbb{C})$ یک جبر لی حقیقی می‌باشد که یکریخت با جبر لی $(\mathbb{R}^{۳}, \times)$ است، که در آن $\times$، ضرب خارجی $\mathbb{R}^{۳}$ می‌باشد. بنابراین جبر لی $S^{۳}$ همان $(\mathbb{R}^{۳}, \times)$ است.

۸۱- نگاشت $N : I\!H^* \longrightarrow I\!R$ را به صورت زیر:

$$x = x_۱ + x_۲ i + x_۳ j + x_۴ k \mapsto x_۱^۲ + x_۲^۲ + x_۳^۲ + x_۴^۲$$

تعریف می‌کنیم در این صورت:

$$S^۳ = \left\{ x \in I\!H^* \;\middle|\; N(x) = ۱ \right\} = N^{-۱}(\{۱\})$$

و چون نگاشت N پیوسته می‌باشد بنابراین $S^۳$ زیرمجموعه بسته‌ای از $I\!H^*$ می‌باشد. از طرفی

$$N(x \cdot y) = N(x)\, N(y)$$

بنابراین $S^۳$ زیرگروه بسته‌ای از $I\!H^*$ است. حال چون هر زیرگروه بسته از یک گروه لی خود گروه لی است نتیجه می‌شود که $S^۳$ نیز گروه لی می‌باشد.

محاسبه جبر لی $S^۳$:

از آنجاکه $S^۳ = N^{-۱}(\{۱\})$ و لذا بنا به مساله ۵۹ داریم $T_۱S^۳ = ker\, N_{*_۱}$. می‌توان دید

$$N_{*_x}(h) = \bar{x}h + \bar{h}x$$

که در آن $\bar{x}$ مزدوج x می‌باشد و بصورت $\bar{x} = x_۱ - x_۲ i - x_۳ j - x_۴ k$ تعریف می‌گردد.

بنابراین $ker\, N_{*_۱} = \left\{ h \in I\!H^* \,\middle|\, h + \bar{h} = ۰ \right\} = Span(i, j, k)$. در نتیجه جبر لی $S^۳$ عبارتست از $Span(i, j, k)$ با کروشه لی زیر:

$$[i, i] = [j, j] = [k, k] = ۰$$
$$[i, j] = k$$
$$[j, k] = i$$
$$[k, i] = -j$$

بنابراین همانطور که انتظار داشتیم جبر لی $S^۳$ با $(I\!R^۳, \times)$ ایزومورف می‌باشد.

۸۲- داریم $S^۱ = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; z \cdot \bar{z} = ۱ \right\} = U(۱)$. حال چون $U(۱)$ یک گروه لی است بنابراین $S^۱$ می‌تواند ساختار گروه لی بپذیرد و چون $S^۱$ یک منیفلد یک بعدی است جبر لی آن ایزومورف با جبر لی بدیهی $I\!R$ می‌باشد.