$$\forall \alpha, \beta \in I \qquad det\Big(D(x_\beta \circ x_\alpha^{-1})(x_\alpha(p))\Big) \neq 0$$

بنابراین:

$$det\Big(D(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(x_\alpha(p), u)\Big) > 0$$

پس TM جهت‌پذیر است.

۴۲- فرض می‌کنیم:

$$\beta = \Big\{(y_\beta, V_\beta)\Big|\beta \in J\Big\} \text{ و } \pi = \Big\{(x_\alpha, U_\alpha)\Big|\alpha \in I\Big\}$$

اطلس‌های C^∞ روی N, M باشند. می‌دانیم که:

$$\pi \times \beta = \Big\{(x_\alpha \times y_\beta, U_\alpha \times V_\beta)\Big|\alpha \in I, \beta \in J\Big\}$$

اطلسی برای $M \times N$ می‌باشد که در آن:

$$(x_\alpha \times y_\beta)(u, v) = (x_\alpha(u), y_\beta(v))$$

تعریف شده است. حال نگاشت‌های گذر اطلس $\pi \times \beta$ را می‌یابیم

اگر $(x_{\alpha_1}, U_{\alpha_1}), (x_{\alpha_2}, U_{\alpha_2}) \in \pi$ باشند و $U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2} \neq \phi$ در این صورت نگاشت گذر از x_{α_1} به x_{α_2} به صورت زیر است:

$$x_{\alpha_2} \circ x_{\alpha_1}^{-1} : x_{\alpha_1}(U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2}) \longrightarrow x_{\alpha_2}(U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2})$$

و اگر $(y_{\beta_1}, V_{\beta_1}), (y_{\beta_2}, V_{\beta_2}) \in \beta$ باشند و $V_{\beta_1} \cap V_{\beta_2} \neq \phi$ در این صورت نگاشت گذر از y_{β_1} به y_{β_2} به صورت زیر است:

$$y_{\beta_2} \circ y_{\beta_1}^{-1} : y_{\beta_1}(V_{\beta_1} \cap V_{\beta_2}) \longrightarrow y_{\beta_2}(V_{\beta_1} \cap V_{\beta_2})$$

حال نگاشت گذر $(x_{\alpha_2} \times y_{\beta_2}) \circ (x_{\alpha_1} \times y_{\beta_1})^{-1}$ از اطلس $\pi \times \beta$ در شرط زیر صدق می‌کند:

$$det\, D\Big((x_{\alpha_2} \times y_{\beta_2}) \circ (x_{\alpha_2} \times y_{\beta_1})^{-1}\Big) = det \begin{bmatrix} D(x_{\alpha_2} \circ x_{\alpha_1}^{-1}) & \circ \\ \circ & D(y_{\beta_2} \circ y_{\beta_1}^{-1}) \end{bmatrix} =$$

$$= det\,(D(x_{\alpha_2} \circ x_{\alpha_1}^{-1})) \cdot det\,(D(y_{\beta_2} \circ y_{\beta_1}^{-1}))$$

بنابراین $M \times N$ جهت‌پذیر است اگر و تنها اگر M و N هر دو جهت‌پذیر باشند.

۴۳- الف) فرض می‌کنیم:

$$\beta = \{(y_\beta, V_\beta) \mid \beta \in J\} \text{ و } \pi = \{(x_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in I\}$$

اطلس‌های C^∞ روی N, M باشند. برای جهت‌پذیر بودن N، باید نشان دهیم که برای هر $\beta_1, \beta_2 \in J$ که $V_{\beta_1} \cap V_{\beta_2} \neq \phi$ داریم $det(D(y_{\beta_2} \circ y_{\beta_1}^{-1})) > 0$.

اما در وضعیت فوق می‌دانیم $(y_{\beta_1} \circ f, f^{-1}(V_{\beta_1}))$ و $(y_{\beta_2} \circ f, f^{-1}(V_{\beta_2}))$ دو کارت از π می‌باشند و چون M جهت‌پذیر است داریم:

$$det\left(D(y_{\beta_2} \circ f) \circ (y_{\beta_1} \circ f)^{-1}\right) > 0$$

اما

$$\begin{aligned} det\left(D(y_{\beta_2} \circ f) \circ (y_{\beta_1} \circ f)^{-1}\right) &= det\left(D(y_{\beta_2} \circ f \circ f^{-1} \circ y_{\beta_1}^{-1})\right) \\ &= det\left(D(y_{\beta_2} \circ y_{\beta_1}^{-1})\right) \end{aligned}$$

پس:

$$det\left(D(y_{\beta_2} \circ y_{\beta_1}^{-1})\right) > 0$$

در نتیجه N جهت‌پذیر است.

ب) می‌دانیم که TM برای هر منیفلد دلخواه از بُعد زوج و جهت‌پذیر می‌باشد. بنابراین اگر n فرد باشد اگرچه $\mathbb{RP}_n(\mathbb{R})$ جهت‌پذیر است ولیکن دیفئومورف با فضای مماس هیچ منیفلدی نمی‌باشد و اگر n زوج باشد چون $\mathbb{RP}_n(\mathbb{R})$ جهت‌پذیر نمی‌باشد بنابراین دیفئومورف با فضای مماس هیچ منیفلدی نمی‌باشد.

۴۴- الف) قرار می‌دهیم:

$$U_1 = ((0,1) \times \mathbb{R}) / \sim$$

$$U_2 = ([0, \tfrac{1}{2}) \cup (\tfrac{1}{2}, 1]) \times \mathbb{R} / \sim$$

$$\varphi_{۲}: U_{۲} \longrightarrow \mathbb{R}^{۲}$$

$$\varphi_{۱}: U_{۱} \longrightarrow \mathbb{R}^{۲} \qquad (x,y) \mapsto \begin{cases} (x,y) & x > \frac{۱}{۲} \\ (x+۱, -y) & x < \frac{۱}{۲} \end{cases}$$
$$(x,y) \mapsto (x,y)$$

بدین ترتیب همئومورفیسم‌های $\varphi_{۱}$ و $\varphi_{۲}$ را بدست می‌آوریم که نگاشت گذر آنها عبارتست از:

$$f = \varphi_{۱} \circ \varphi_{۲}^{-۱} : ((\frac{۱}{۲},۱) \times (۱,\frac{۳}{۲})) \times \mathbb{R} \longrightarrow ((۰,\frac{۱}{۲}) \cup (\frac{۱}{۲},۱)) \times \mathbb{R}$$
$$f(x,y) = \begin{cases} (x,y) & x < ۱ \\ (x-۱, -y) & x > ۱ \end{cases}$$

f یک دیفئومورفیسم است. بنابراین $\{(\varphi_{۱}, U_{۱}), (\varphi_{۲}, U_{۲})\}$ یک اطلس C^{∞} برای M تعریف می‌کند.

ب) با توجه به اطلس بالا $U_{۱} \cap U_{۲}$ به دو زیرمجموعه باز همبند V و W تجزیه می‌گردد بطوریکه روی V (به ترتیب روی W) نگاشت گذر دارای دترمینان مثبت (به ترتیب دترمینان منفی) می‌باشد.

اگر M جهت‌پذیر باشد در این صورت وجود دارد یک اطلس $\{(\psi_j, W_j) \mid j \in J\}$ بطوریکه نگاشت‌های گذر f_{ij} دارای دترمینان مثبت باشند. قرار می‌دهیم

$$U_{۱}^{+} := \{x \in U_{۱} \mid \forall j \in J \quad Jacob(\psi_j \circ \varphi_{۱}^{-۱})(\varphi_{۱}(x)) > ۰\}$$
$$U_{۱}^{-} := \{x \in U_{۱} \mid \forall j \in J \quad Jacob(\psi_j \circ \varphi_{۱}^{-۱})(\varphi_{۱}(x)) < ۰\}$$

بدین ترتیب یک تجزیه از مجموعه باز همبند $U_{۱}$ بدست می‌آید. بنابراین یا $U_{۱}^{+} = U_{۱}$ یا $U_{1}^{-} = U_{1}$ می‌باشد. بطور مشابه حکم مشابه برای $U_{۲}$ داریم. حال اگر فرض کنیم $U_{۱}^{+} = U_{۱}$ و $U_{۲}^{+} = U_{۲}$ در این صورت نتیجه می‌گردد که $Jacob(\varphi_{۲} \circ \varphi_{۱}^{-۱})$ روی $U_{۱} \cap U_{۲}$ همواره مثبت است که تناقض است و اگر $U_{۱}^{+} = U_{۱}$ و $U_{۲}^{-} = U_{۲}$ باشد نتیجه می‌گردد که $Jacob(\varphi_{۲} \circ \varphi_{۱}^{-۱})$ روی $U_{۱} \cap U_{۲}$ همواره منفی است که مجدداً تناقض است. حالت‌های دیگر نیز به تناقض می‌انجامد. بنابراین M جهت‌پذیر نیست.

۴۵- الف) داریم

$$TM \cong M \times I\!R^m \Rightarrow T(TM) = T(M \times I\!R^m) \cong TM \times T I\!R^m$$

$$T(TM) \cong TM \times I\!R^m \times I\!R^m \cong TM \times I\!R^{۲m}$$

چون TM، $۲m$ بُعدی است نتیجه می‌گیریم که TM نیز توازی‌پذیر است.

ب) فرض کنیم M و N دو منیفلد توازی‌پذیر به ترتیب از بُعد m و n باشند، در این صورت داریم $TM \cong M \times I\!R^m$ و $TN \cong N \times I\!R^n$ بنابراین

$$T(M \times N) \cong TM \times TN \cong (M \times I\!R^m) \times (N \times I\!R^n) \cong (M \times N) \times I\!R^{m+n}$$

در نتیجه $M \times N$ نیز توازی‌پذیر است.

۴۶- نگاشت $\begin{cases} \alpha : [۰, ۲\pi] \longrightarrow S^۱ \\ \alpha(\theta) = (cos\theta, sin\theta) \end{cases}$ پوشا است. بنابراین هر عضو $p \in S^۱$ را می‌توان به صورت $p = (cos\theta, sin\theta)$ نمایش دهیم. به ازای $p \in S^۱$ قرار می‌دهیم:

$$X(p) = (\, p,\, (-sin\theta, cos\theta)) \in T_p S^۱ \quad \text{که} \quad (-sin\theta, cos\theta) \neq ۰.$$

از آنجائیکه $T_p S^۱ \cong I\!R$ یک بُعدی است نتیجه می‌گردد که هر عضو دلخواه $(p,v) \in T_p S^۱$ مضربی از $X(p)$ خواهد بود، یعنی وجود دارد $\lambda_v \in I\!R$ بطوریکه:

$$(p,v) = \lambda_v \, X(p)$$

حال تعریف می‌کنیم $\begin{cases} \varphi : TS^۱ \longrightarrow S^۱ \times I\!R \\ \varphi(p,v) = (p, \lambda_v) \end{cases}$. φ یک تناظر دو سویی است بطوریکه نسبت به v خطی است. (در واقع φ یک دیفئومورفیسم کلاف‌های برداری می‌باشد) لذا

$$TS^۱ \cong S^۱ \times I\!R$$

۴۷- بله، مشابه مساله قبل نتیجه می‌شود.

۴۸- فرض می‌کنیم M منیفلد توازی‌پذیر باشد در این صورت داریم: $TM \cong M \times \mathbb{R}^n$ که $dimM = n$. از طرف دیگر TM جهت‌پذیر است بنابراین بنا به مساله۴۲، M جهت‌پذیر است. عکس مطلب برقرار نیست زیرا به عنوان مثال S^2 جهت‌پذیر است ولی توازی‌پذیر نیست.

۴۹- در حالت کلی هرگاه $T : V_1 \longrightarrow V_2$ یک ایزومورفیسم خطی بین دو فضای برداری V_1 , V_2 و $S : V_2 \longrightarrow V_3$ یک تبدیل خطی بین دو فضای برداری V_2 , V_3 باشند، در جبر خطی ثابت می‌شود که $rank(S \circ T) = rank(S)$.

حال چون $g : M \longrightarrow M$ یک دیفئومورفیسم است لذا در هر $p \in M$ ،

$$g_{*_p} : T_pM \longrightarrow T_{g(p)}M$$

یک ایزومورفیسم خطی است و از طرف دیگر به ازای هر $q \in M$، $f_{*_q} : T_qM \longrightarrow T_{f(q)}M$ یک تبدیل خطی دلخواه است. کافی است قرار دهیم $q = g(p)$ و $T = g_{*_p}$ و $S = f_{*_q}$. بنابراین حکم بدست می‌آید.

۵۰- فرض می‌کنیم $\Gamma(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \;\middle|\; y = f(x)\right\}$ و تعریف می‌کنیم

$$\begin{cases} \varphi : \Gamma(f) \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \varphi(x, y) = x \end{cases}$$

یکم) φ یک به یک و پوشا است.

دوم) φ پیوسته است زیرا :

$$\begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{R}^n \\ (x, y) \mapsto x \end{cases}$$

پیوسته است و داریم $\varphi = \pi_1 \mid_{\Gamma(f)}$. در حالت کلی‌تر حتی می‌توان گفت φ، C^∞ است.

سوم)

$$\begin{cases} \varphi^{-1} : I\!R^n \longrightarrow \Gamma(f) \\ \varphi^{-1}(x) = (x, f(x)) \end{cases}$$

φ^{-1} نیز C^∞ است. زیرا مولفه‌های آن C^∞ است. در نتیجه φ یک دیفئومورفیسم است. ولذا $(\Gamma(f), \varphi)$ یک کارت برای هر نقطه $(x, y) \in \Gamma(f)$ می‌باشد. بنابراین $\Gamma(f)$ یک منیفلد $n-$بُعدی خواهد بود.

روش دوم : تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} F : I\!R^n \times I\!R^m \xrightarrow{C^{+\infty}} I\!R^m \\ F(x, y) = y - f(x) \end{cases}$$

داریم $\Gamma(f) = F^{-1}(\circ)$. حال رتبه F را روی $\Gamma(f)$ محاسبه می‌کنیم.

$$dF(x, y) = \left[-Df(x)_{m\times n} \quad I_{m\times m} \right]_{m\times(m+n)}$$

بنابراین $dF(x, y)$ در هر نقطه روی $\Gamma(f)$ دارای رتبه m می‌باشد در نتیجه $F^{-1}(\circ)$ در $I\!R^n \times I\!R^m$ یک زیرمنیفلد $(n+m)-m=n$ بُعدی است.

۵۱- خیر. بطور مثال $I\!P^3(I\!R)$ دارای زیرمنیفلد یکریخت با $I\!P^2(I\!R)$ می‌باشد و چون $I\!P^2(I\!R)$ جهت‌پذیر نمی‌باشد، این زیرمنیفلد نیز جهت‌پذیر نمی‌باشد.

۵۲- فرض می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$$

در این صورت $A \in O(۳)$ اگر و تنها اگر

$$\sum x_i^۲ = \sum y_i^۲ = \sum z_i^۲ = ۱ \quad , \quad \sum x_i y_i = \sum x_i z_i = \sum y_i z_i = ۰$$

حال نگاشت $f : I\!R^۹ \xrightarrow{C^\infty} I\!R^۶$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x_۱, x_۲, x_۳, y_۱, y_۲, y_۳, z_۱, z_۲, z_۳) =$$
$$(\sum x_i^۲ - ۱, \sum y_i^۲ - ۱, \sum z_i^۲ - ۱, \sum x_i y_i, \sum x_i z_i, \sum y_i z_i)$$

بوضوح $f^{-۱}(۰) = O(۳)$.

$$df(x,y,z) = \begin{bmatrix} ۲x_۱ & ۲x_۲ & ۲x_۳ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۲y_۱ & ۲y & ۲y_۳ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۲z_۱ & ۲z_۲ & ۲z_۳ \\ y_۱ & y_۲ & y_۳ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & x_۱ & x_۲ & x_۳ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & z_۱ & z_۲ & z_۳ \end{bmatrix}$$

رتبه df در هر نقطه (x,y,z) برابر با ۶ می‌باشد بنابراین $f^{-۱}(۰)$ یک منیفلد ۳=۶-۹ بُعدی است. در حالت کلی $O(n)$ها فشرده‌اند. زیرا بسته و کراندارند و در $I\!R^{n^۲}$ هر زیرمجموعه بسته و کراندار فشرده است. بنابراین $O(n)$ فشرده است. بسته بودن $O(n)$ بخاطر این است که صفرهای یک تابع پیوسته می‌باشد و کرانداری آن نیز با توجه به اینکه داریم:

$$\forall A \in O(n) \quad \|A\| = \sqrt{n} \quad \Rightarrow \quad \|A\| \le n$$

که در آن $\|A\|$ نرم اقلیدسی $I\!R^{n^۲}$ می‌باشد، نتیجه می‌گردد.

۵۳- با توجه به تعریف M می‌توان نوشت:

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \;\middle|\; ad - cb = ۱ \;,\; ab + cd = ۰ \right\}$$

$$M = \left\{ (a,b,c,d) \in I\!R^۴ \;\middle|\; ad - cb = ۱ \;,\; ab + cd = ۰ \right\}$$

حال نگاشت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$f(a,b,c,d) = (ad - cb \ , \ ab + cd)$$

این نگاشت C^∞ است و داریم $M = f^{-1}(0,1)$. همچنین

$$df(a,b,c,d) = \begin{bmatrix} d & -c & -b & a \\ b & a & d & c \end{bmatrix}$$

بنابراین df روی M دارای رتبه ۲ می‌باشد. در نتیجه M یک زیرمنیفلد ۲=۲-۴ بُعدی از $\mathbb{R}^4$ است.

۵۴- می‌دانیم که چنبره $T^2 = S^1 \times S^1$ یک زیرمنیفلد ۲ بُعدی $\mathbb{R}^4$ می‌باشد و $M \subseteq T^2$. اگر M یک زیرمنیفلد $\mathbb{R}^4$ باشد در این صورت باید از بُعد ۱ یا ۲ باشد. اما M دو بُعدی نمی‌تواند باشد. زیرا در این صورت باید شامل یک باز ناتهی در T^2 باشد و در این صورت $T^2 - M$ در T^2 چگال نیست، اما ملاحظه می‌شود که $T^2 - M$ در T^2 چگال است. از طرف دیگر چون M در T^2 چگال است بنابراین یک بُعدی نیز نمی‌تواند باشد و این تناقض است. بنابراین M یک زیرمنیفلد $\mathbb{R}^4$ نمی‌باشد.

۵۵- الف) $f^{-1}(q)$ در M بسته است و چون بسته‌های یک مجموعه فشرده، خود فشرده‌اند، لذا $f^{-1}(q)$ فشرده است. فرض می‌کنیم $p \in f^{-1}(q)$ باشد در این صورت:

$$f_{*_p} : T_pM \longrightarrow T_qN$$

دارای رتبه ثابت $dimM$ می‌باشد. یعنی f_{*_p} یک به یک است. اما چون $dimN = dimM$ می‌باشد نتیجه می‌گردد که f_{*_p} پوشا نیز می‌باشد. بنابراین f_{*_p} یک یکریختی است. حال بنا به قضیه تابع وارون وجود دارد یک همسایگی U از p در M و یک همسایگی V از q در N بطوریکه $f\big|_U : U \longrightarrow V$ دیفئومورفیسم باشد. اما

$$\forall x \in U \cap f^{-1}(q) \qquad f\big|_U(x) = q$$

یعنی f یک به یک نیست، مگر اینکه $U \cap f^{-1}(q)$ تک نقطه‌ای باشد. اما $p \in U \cap f^{-1}(q)$ بنابراین $U \cap f^{-1}(q) = \{p\}$. یعنی بازهای $f^{-1}(q)$ القاء شده از M بصورت تک نقطه‌ای هستند و این یعنی اینکه توپولوژی القایی از M روی $f^{-1}(q)$ توپولوژی گسسته است.
ب) در توپولوژی گسسته مجموعه‌های فشرده، مجموعه‌های متناهی هستند. بنابراین از آنجائیکه $f^{-1}(q)$ فشرده است لذا متناهی است.

۵۶- بنا به مساله ۵۵، $f^{-1}(c)$ متناهی است در صورتیکه $\mathbb{RP}^1(\mathbb{R})$ نامتناهی است.

۵۷- الف) N یک منیفلد n^2 –بُعدی است زیرا تصویر وارون زیرمجموعه باز $\mathbb{R}-\{0\}$ تحت نگاشت پیوسته زیر می‌باشد و در نتیجه یک زیرمجموعه باز از $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ خواهد بود، و چون هر زیرمجموعه باز یک منیفلد، منیفلدی از همان بُعد است بنابراین N یک منیفلد n^2 –بُعدی است.

$$\begin{cases} M_{n\times n} \xrightarrow{T} M_{n\times n} \xrightarrow{det} \mathbb{R} \\ A \mapsto I + A \mapsto det(I+A) \end{cases}$$

$$f = det \circ T : M_{n\times n} \xrightarrow{\text{پیوسته}} \mathbb{R}$$

$$N = f^{-1}(\mathbb{R}-\{0\})$$

ب) فرض می‌کنیم $A \in N$ در این صورت داریم:

$$I + \sigma(A) = I + (I-A)(I+A)^{-1} = (I+A)(I+A)^{-1} + (I-A)(I+A)^{-1}$$
$$= (I+A+I-A)(I+A)^{-1} = 2I(I+A)^{-1} = 2(I+A)^{-1}$$

در نتیجه:

$$\det(I+\sigma(A)) = 2^n \det(I+A)^{-1} = \frac{2^n}{\det(I+A)} \neq 0 \Rightarrow \sigma(A) \in N$$

ج)

$$I - \sigma(A) = I - (I-A)(I+A)^{-1} = (I+A)(I+A)^{-1} - (I-A)(I+A)^{-1}$$
$$= (I+A-I+A)(I+A)^{-1} = 2A(I+A)^{-1}$$

بنابراین:

$$\sigma(\sigma(A)) = (I-\sigma(A))(I+\sigma(A))^{-1} = 2A(I+A)^{-1}\cdot\frac{1}{2}(I+A) = A$$
$$\Rightarrow \sigma(\sigma(A)) = A$$

د) σ نگاشتی C^∞ است. زیرا ترکیب سه تابع C^∞ زیر می‌باشد.

$$f_1 : N \longrightarrow M_{n\times n}\times GL(n) \qquad f_1(A) = (I-A, I+A)$$
$$f_2 : M_{n\times n}\times GL(n) \longrightarrow M_{n\times n}\times GL(n) \qquad f_2(A,B) = (A, B^{-1})$$
$$f_3 : M_{n\times n}\times M_{n\times n} \longrightarrow M_{n\times n}\times M_{n\times n} \qquad f_3(A,B) = A.B$$

و از آنجا که معکوس σ خود σ می‌باشد (با توجه به قسمت ج) بنابراین معکوس آن نیز C^∞ می‌باشد. و در نتیجه σ یک دیفئومورفیسم می‌باشد.

ه) $\alpha_{*_A}(B) = f_{3*_{(f_2\circ f_1)(A)}} \circ f_{2*_{(f_1)(A)}} \circ f_{1*_{(A)}}$ و از آنجاکه:

$$f_{1*_A}(B) = (-B, B)$$
$$f_{2*_{(C,D)}}(E,F) = (E, -D^{-1}FD^{-1})$$
$$f_{3*_{(C,D)}}(E,F) = f_3(C,F) + f_3(E,D)$$

با جایگذاری این مشتقات در ضابطه σ_{*_A} نتیجه می‌گردد که:

$$\sigma_{*_A}(B) = -(\sigma(A)+I)B(I+A)^{-1}$$

حال به محاسبه رتبه σ می‌پردازیم. برای این کار باید بُعد بُرد σ_{*_A} را به ازای $A\in N$ بیابیم. می‌توان دید که $ker\,\sigma_{*_A} = 0$، زیرا اگر $\sigma_{*_A}(B) = 0$ باشد با توجه به اینکه $\sigma(A)+I$ و $I+A$ هر دو وارون‌پذیرند نتیجه می‌گردد $B = 0$. یعنی σ_{*_A} یک به یک است، و از طرفی چون یک نگاشت خطی است که بُعد دامنه و بُرد آن باهم برابرند، نتیجه می‌گردد که σ_{*_A} پوشا نیز می‌باشد، بنابراین :

$$rank\ \sigma_{*_A} = dim\, M_{n\times n} = n^2$$

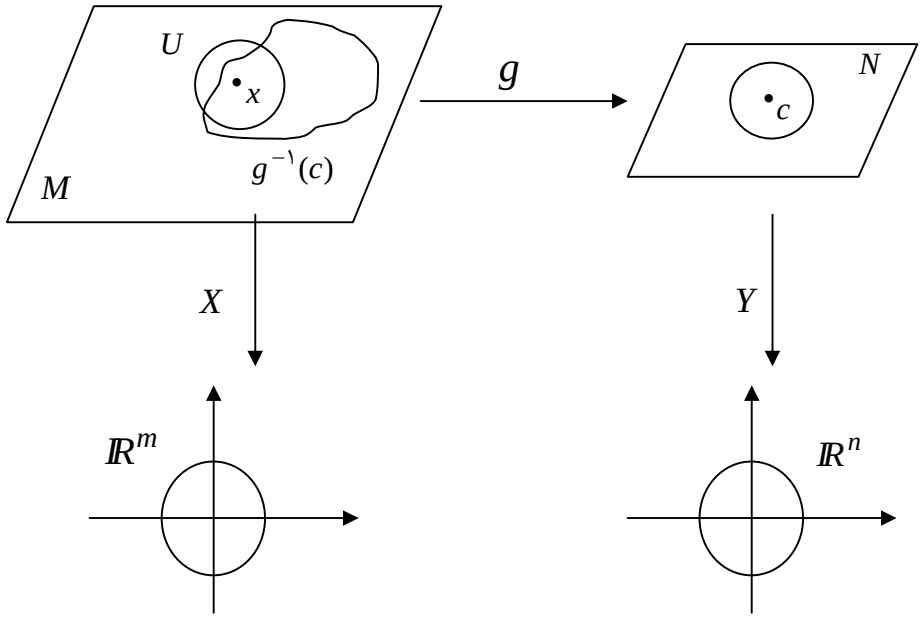
البته نتیجه اخیر را از دیفئومورفیسم بودن σ نیز می‌توان بدست آورد.

و) N در $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ باز است و $O(n)$ یک منیفلد است و لذا $N \cap O(n)$ یک باز در $O(n)$ می‌باشد و چون هر زیرمجموعه باز یک منیفلد خودش یک منیفلد است نتیجه می‌شود که $N \cap O(n)$ نیز یک منیفلد از همان بُعد $O(n)$ است.

۵۸- الف) M یک زیرفضای برداری $\frac{n(n-1)}{2}$-بُعدی از $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ می‌باشد بنابراین خودش یک فضای برداری $\frac{n(n-1)}{2}$-بُعدی است و چون هر فضای برداری یک منیفلد است نتیجه می‌شود که M نیز یک منیفلد $\frac{n(n-1)}{2}$-بُعدی است.

ب) مشابه قسمت (و) مساله ۵۷ قابل حل است.

۵۹- می‌دانیم $g_{*_x} : T_xM \longrightarrow T_{g(x)}N$ یک نگاشت خطی است در نتیجه $ker\,(g_{*_x})$ یک زیرفضای T_xM می‌باشد که می‌خواهیم نشان دهیم در واقع همان $T_x(g^{-1}(c))$ می‌باشد.



می‌دانیم که:

$$g_{*_x}\left([x,v]\right)=\left[g(x)\ ,\ D(Y\circ g\circ X^{-1})\,(X(x))\,v\right]$$

اما اگر $Y\circ g\circ X^{-1}$ را به $X(U\cap g^{-1}(c))$ تحدید کنیم در این صورت به ازای هر

$$X(p)=q\in X(U\cap g^{-1}(c))$$

داریم $Y\circ g\circ X^{-1}(q)=Y\circ g(p)=Y(c)$.

بنابراین تحدید $Y\circ g\circ X^{-1}$ به $X(U\cap g^{-1}(c))$ تابعی ثابت است. در نتیجه:

$$\forall\ p\in U\cap g^{-1}(c)\qquad D(Y\circ g\circ X^{-1})(X(p))=\circ$$

بنابراین اگر $[x,v]\in T_x(g^{-1}(c))$ باشد خواهیم داشت $g_{*_x}\left([x,v]\right)=(\ g(x)\ ,\circ\ )$.

بنابراین $[x,v]\in kerg_{*_x}$ خواهد بود. یعنی $T_x(g^{-1}(c))\subseteq kerg_{*_x}$. اما g در هر $x\in M$ دارای رتبه ثابت k می‌باشد، یعنی رتبه نگاشت خطی g_{*_x} برابر k می‌باشد. به عبارت دیگر:

$$dim\,(kerg_{*_x})=m-k$$

از طرف دیگر چون $g^{-1}(c)$ یک زیرمنیفلد $m-k$ بُعدی است. لذا

$$dim\,T_x(g^{-1}(c))=m-k$$

و لذا داریم $T_x(g^{-1}(c))=ker\,(g_{*_x})$.

۶۰- به مساله ۵۹ مراجعه شود.

۶۱- الف) نگاشت C^∞، $\begin{cases} f:IR^4\longrightarrow IR^2 \\ f(x,y,z,t)=(x^2+y^2,z^2+t^2)\end{cases}$ را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$Df(x,y,z,t)=\begin{bmatrix}2x & 2y & \circ & \circ\\ \circ & \circ & 2z & 2t\end{bmatrix}$$

همچنین $M=f^{-1}(1,1)$ و f روی M رتبه ثابت ۲ دارد. بنابراین طبق قضیه رتبه چون M ناتهی است، لذا یک زیرمنیفلد ۲-۴=۲ بُعدی از IR^4 می‌باشد.

ب) حال فرض می‌کنیم $p=(x_\circ,y_\circ,z_\circ,t_\circ)\in M$. چون $M\subseteq \mathbb{R}^4$ می‌باشد بنابراین $T_pM\subseteq T_p\mathbb{R}^4$ یک زیرفضای دو بعدی آن است. اما بنا به مساله ۵۹ داریم $T_pM\cong kerf_{*_p}$.
درنتیجه:

$$\ker f_{*_p}=\left\{[u,v,w,r]\in IR^4 \;\middle|\; \begin{bmatrix} 2x_\circ & 2y_\circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & 2z_\circ & 2t_\circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ r \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \circ \\ \circ \end{bmatrix}\right\}$$

یا بطور معادل:

$$\begin{cases} 2ux_\circ+2y_\circ v=\circ \\ 2z_\circ w+2t_\circ v=\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ux_\circ+y_\circ v=\circ \\ z_\circ w+t_\circ v=\circ \end{cases}$$

با فرض اینکه $z_\circ,x_\circ\neq\circ$ نتیجه می‌شود که $u=-\frac{y_\circ}{x_\circ}v$, $r=-\frac{t_\circ}{z_\circ}w$. بنابراین

$$T_pM\cong\left\{(-\frac{y}{x_\circ}v,v,w,-\frac{t_\circ}{z_\circ}w)\;\middle|\;v,w\in IR\right\}$$
$$=\left\{v(-y_\circ,x_\circ,\circ,\circ)+w(\circ,\circ,z_\circ,-t_\circ)\;\middle|\;v,w\in IR\right\}$$

که بوضوح یک زیرفضای ۲ بُعدی از $\mathbb{R}^4\cong T_p\mathbb{R}^4$ می‌باشد.

ج) از آنجاکه $M=S^1\times S^1$ می‌باشد و S^1 توازی‌پذیر است و حاصلضرب دو منیفلد توازی‌پذیر، خود توازی‌پذیر است نتیجه می‌گردد که M توازی‌پذیر است.

۶۲- چون $GL(n,IR)$ در $M_{n\times n}(IR)$ باز و همچنین $M_{n\times n}(IR)$ یک فضای برداری می‌باشد نتیجه می‌شود که فضای مماس $GL(n,IR)$ در هر نقطه‌اش همان $M_{n\times n}(IR)$ است. (با مساله ۳۲ مقایسه شود)