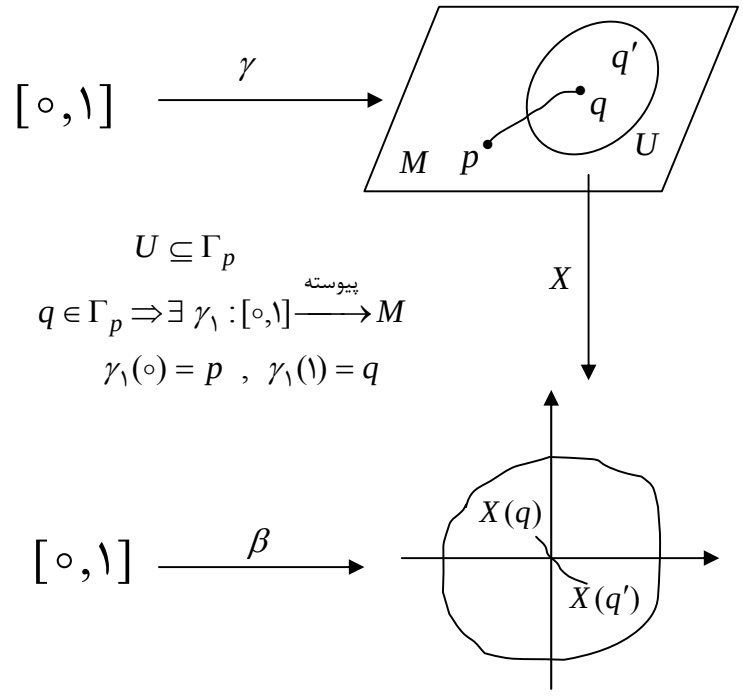
۲۴- قبل از اینکه به حل بپردازیم، این نکته لازم به ذکر است که در حالت کلی همبند راهی بودن، همبند بودن را نتیجه می‌دهد ولی از همبند بودن نمی‌توان همبند راهی بودن را نتیجه گرفت. در صورتیکه در منیفلدها می‌توان از همبند بودن، همبند راهی بودن را نتیجه گرفت.

برای حل فرض می‌کنیم $p \in M$ و قرار می‌دهیم:

$$\Gamma_p = \left\{ q \in M \;\middle|\; \exists \alpha : [\circ,\text{۱}] \xrightarrow{\text{پیوسته}} M \; ; \; \alpha(\circ) = p \; , \; \alpha(\text{۱}) = q \right\}$$

چون $p \in \Gamma_p$ نتیجه می‌شود که $\Gamma_p \neq \phi$. نشان می‌دهیم Γ_p در M هم باز و هم بسته است، که در اینصورت چون M همبند است و تنها زیرمجموعه‌های هم باز و هم بسته آن M, ϕ است و همچنین چون $\Gamma_p \neq \phi$، خواهیم داشت $\Gamma_p = M$. از آنجائیکه $p \in M$ دلخواه بود نتیجه می‌گردد که M همبند راهی است.

اثبات باز بودن Γ_p : فرض می‌کنیم $q \in \Gamma_p$. باید همسایگی U از M حول q چنان بیابیم که



$$U \subseteq \Gamma_p$$

$$q \in \Gamma_p \Rightarrow \exists\, \gamma_{\text{۱}} : [\circ,\text{۱}] \xrightarrow{\text{پیوسته}} M$$

$$\gamma_{\text{۱}}(\circ) = p \;\; , \;\; \gamma_{\text{۱}}(\text{۱}) = q$$

حال چون M منیفلد C^∞ می‌باشد، بنابراین می‌توانیم کارت (X,U) حول q را در نظر بگیریم.

اگر $q' \in U$ دلخواه باشد می‌خواهیم ثابت کنیم $q' \in \Gamma_p$. چون $X(q), X(q')$ دو نقطه از $\mathbb{R}^n$ می‌باشند و $\mathbb{R}^n$ همبند راهی است و لذا

$$\exists \beta : [0,1] \xrightarrow{\text{پیوسته}} V = X(U)$$
$$\beta(0) = X(q)\ ,\ \beta(1) = X(q')$$

(در صورت نیاز V را کوچکتر یا بزرگتر می‌کنیم). حال قرار می‌دهیم:

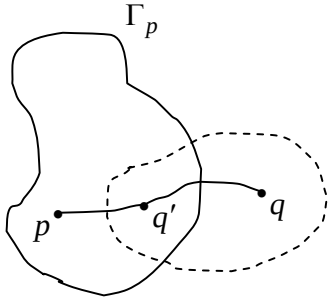
$$\begin{cases} \gamma_2 : [0,1] \to U \\ \gamma_2(t) = X^{-1} \circ \beta(t) \end{cases}$$

در این صورت $\gamma_2(0) = q\ ,\ \gamma_2(1) = q'$ و چون X^{-1} و β پیوسته‌اند و لذا γ_2 نیز پیوسته است. حال تعریف می‌کنیم:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

γ پیوسته است (چرا؟) و داریم $\gamma(0) = p\ ,\ \gamma(1) = q'$ بنابراین $q' \in \Gamma_p$. پس $U \subseteq \Gamma_p$ یعنی Γ_p باز است.

اثبات بسته بودن Γ_p : نشان می‌دهیم متمم Γ_p باز است. فرض می‌کنیم $q \in \Gamma_p^c$ در این صورت خم پیوسته‌ای مانند



$$\alpha : [0,1] \longrightarrow M$$

بطوریکه $\alpha(0) = p\ ,\ \alpha(1) = q$ باشد، وجود ندارد.

حال کارت (X,U) را حول q در نظر می‌گیریم. اگر $q' \in U$ چنان باشد که $q' \in \Gamma_p$ در این صورت چون $X(q)\ ,\ X(q')$ را در $X(U)$ می‌توان با خمی به‌هم وصل نمود با برگرداندن آن خم تحت X^{-1}، $q'\ ,\ q$ را می‌توان در U به‌هم وصل کرد و لذا q را نیز به p می‌توان وصل نمود، که این خلاف فرض است. بنابراین به ازای هر $q' \in U$ داریم $q' \notin \Gamma_p$ و یا $q' \in \Gamma_p^c$ و این یعنی Γ_p^c باز است. بنابراین Γ_p بسته است.

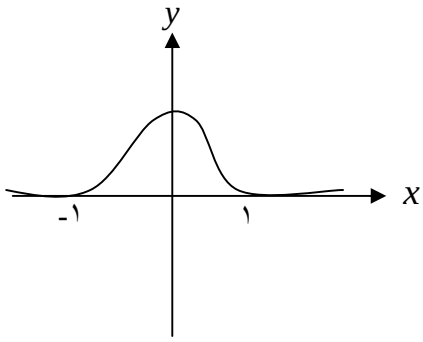
۲۵- به ازای $p \in C$ کارت (X,V) را حول p چنان انتخاب می‌کنیم که $X(p) = \circ , \overline{V} \subseteq U$.
در این صورت وجود دارد $\varepsilon > \circ$ بطوریکه

$$(-\varepsilon,\varepsilon)\times\cdots\times(-\varepsilon,\varepsilon) \subseteq X(V)$$

تعریف می‌کنیم $j : I\!R \xrightarrow{C^\infty} I\!R$ بطوریکه:

$$j(x) = \begin{cases} e^{-(x-1)^{-2}} e^{-(x+1)^{-2}} & x \in (-1,1) \\ \circ & x \notin (-1,1) \end{cases}$$

j دارای نموداری به صورت مقابل است.



حال تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} g_n : I\!R^n \to I\!R \\ g_n(x) = j(\frac{x^1}{\varepsilon})\cdots j(\frac{x^n}{\varepsilon}) \end{cases}$$

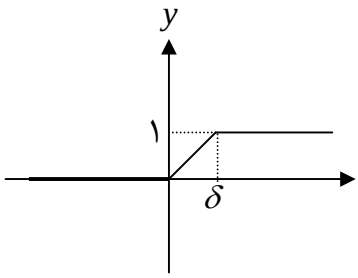
تابع $g \circ X : V \subset M \longrightarrow I\!R$ یک نگاشت C^∞ است. زیرا ترکیب دو نگاشت C^∞، خود C^∞ است.
اکنون روی $M - V$ قرار می‌دهیم $g \circ X \equiv \circ$. در این صورت $g \circ X$ یک تابع C^∞ روی M می‌باشد. فرض می‌کنیم f_p توسیع C^∞، $g \circ X$ باشد. به ازای $p \in C$ ، f_p قابل تعریف است بطوریکه در یک همسایگی p که بستار آن در U واقع است، مخالف صفر است. چون C فشرده است با تعداد متناهی از این همسایگی‌ها، پوشیده می‌شود. حال $f_{p_1} + \cdots + f_{p_n}$ دارای بستاری زیرمجموعه U می‌باشد و روی C مثبت است. بنابراین وجود دارد $\delta > \circ$ بطوریکه روی C داریم:

$$f_{p_1} + \cdots + f_{p_n} \geq \delta$$

حال فرض می‌کنیم $k : I\!R \xrightarrow{c^\infty} I\!R$ چنان باشد که خارج بازه $(\circ,\delta) \subseteq I\!R$ صفر و روی آن بازه مقادیر مثبت اختیار کند و از روی آن نگاشتی به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} l : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ l(x) = \dfrac{\int_{0}^{x} k(t)\,dt}{\int_{0}^{\delta} k(t)\,dt} \end{cases}$$

نمودار l به صورت زیر خواهد بود:



تعریف می‌کنیم $f = l \ \ (f_{p_1} + \cdots + f_{p_n})$. در این صورت $f : M \xrightarrow{C^\infty} [0,1]$ می‌باشد و اگر $x \in C$ در این صورت

$$f_{p_1}(x) + \cdots + f_{p_n}(x) \geq \delta \Rightarrow l\left(f_{p_1}(x) + \cdots + f_{p_n}(x)\right) = 1 \Rightarrow f(x) = 1$$

و این یعنی $f|_C = 1$.

اگر $x \in M - U$ در این صورت به ازای $i = 1,\ldots,n$ داریم $f_{p_i}(x) = 0$ و در نتیجه:

$$f(x) = l(0) = 0$$

و این یعنی $f|_{M-U} = 0$.

راه حل دوم: فرض می‌کنیم $U_1 = U$ و $U_2 = K^c = M - K$ باشند، در این صورت $\{U_1, U_2\}$ یک پوشش باز موضعاً متناهی برای M می‌باشد. حال بنا به قضیه افراز یکانی وجود دارند توابع C^∞

$$\varphi_1, \varphi_2 : M \longrightarrow [0,1]$$

بطوریکه $\begin{cases} Supp\,\varphi_i \subseteq U_i \\ i = 1,2 \end{cases}$ و $\forall x \in M \quad \varphi_1(x) + \varphi_2(x) = 1$. در این صورت $f = \varphi_1$ جواب مساله است.

توجه : راه حل دوم حتی برای زمانی که K فقط بسته باشد، نیز برقرار است.

۲۶- کارت (x,U) را حول p با شرط $U \subseteq W$ در نظر می‌گیریم. زیرمجموعه‌های باز V_1 , V_2 در U وجود دارند بطوریکه $p \in V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq V_2 \subseteq \overline{V_2} \subseteq U$. (از حالت $\mathbb{R}^n$ برای $x(U)$ و نرمال بودن فضای توپولوژیک $\mathbb{R}^n$ استفاده می‌کنیم.) حال وجود دارد تابع C^∞، $f : U \longrightarrow [0,1]$ بطوریکه $U - V_2 = f^{-1}(0)$, $\overline{V_1} = f^{-1}(1)$. حال $g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ را با شرط

$$g\big|_U = f \quad , \quad g\big|_{M-\overline{V_2}} = 0$$

تعریف می‌کنیم. g خوش‌تعریف است زیرا

$$U \cap (M - \overline{V_2}) = U - \overline{V_2} \subseteq U - V_2 = f^{-1}(0)$$

بعلاوه g، C^∞ است و از آنجاکه g روی V_1 برابر یک و روی $M - V_2 \supseteq M - W$ برابر صفر است، حکم بدست می‌آید.

۲۷- الف) قرار می‌دهیم $M = \mathbb{R}$، $U = (0,1)$ و $\begin{cases} f : U \longrightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$.

در این صورت اگر $\widetilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ توسیع C^∞ از f باشد در این صورت

$$\widetilde{f}(0) = \widetilde{f}(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{f}(\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = +\infty$$

که تناقض است.

تذکر: همانطور که ملاحظه می‌شود حکم بالا حتی برای توابع پیوسته نیز برقرار نمی‌باشد.

ب) با استفاده از افراز یکانی حکم بدست می‌آید.

۲۸- نشان می‌دهیم f در هر $p \in M$ پیوسته است. برای این کار باید نشان دهیم به ازای هر همسایگی باز V از $q = f(p)$ در N تصویر معکوس آن تحت f، یعنی $f^{-1}(V)$ در M باز است. ابتدا فرض می‌کنیم V دامنه کارتی از N مانند (y,V) باشد بنا به تعریف هرگاه (x,U) کارتی از M حول p باشد در این صورت نگاشت $y \circ f \circ x^{-1} : x(U \cap f^{-1}(V)) \subseteq \mathbb{R}^m \to y(V) \subset \mathbb{R}^n$ یک

نگاشت دیفرانسیل‌پذیر و در نتیجه پیوسته است. بنابراین مجموعه زیر:

$$x(f^{-1}(V)) = (y \circ f \circ x^{-1})^{-1}(y(V))$$

در $x(U)$ باز است. چون x همئومورفیسم است نتیجه می‌شود $f^{-1}(V)$ در M باز است.

در حالتی که V دامنه کارتی از N نباشد می‌توان دید که به صورت اجتماع خانواده $\{V_\alpha\}$ می‌باشد که هر یک از V_αها دامنه کارتی از N است و لذا حکم در این حالت نیز برقرار است. پس f در p پیوسته است و چون p دلخواه بود، f روی M پیوسته است.

۲۹- خیر. فرض می‌کنیم $V = W = \mathbb{R}$ و $(V, \varphi(x) = x^3)$ ، $(W, 1_{\mathbb{R}})$ باشند. تبدیل خطی f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} f : V \longrightarrow W \\ f(x) = x \end{cases}$$

در این صورت $\varphi^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ که $1_{\mathbb{R}} \circ f \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1}$ نیست بنابراین f ، C^∞ نیست.

تذکر: اگر اطلس متشکل از کارت همانی را روی فضاهای برداری V و W در نظر بگیریم، در این صورت هر تبدیل خطی C^∞ می‌باشد.

۳۰- اولاچون $U \subseteq M$ باز است بنابراین U یک منیفلد می‌باشد و چون $f : M \longrightarrow N$ دیفرانسیل‌پذیر است به ازای هر $p \in U$ وجود دارد یک همسایگی باز U_1 در M حول $f(p)$ در N بطوریکه $y \circ f \circ x^{-1} : x(U_1) \longrightarrow y(V)$ دیفرانسیل‌پذیر باشد. حال چون U باز است و لذا $U_1 \cap U$ نیز باز است و با در نظر گرفتن کارت $(U_1 \cap U, x|_{U_1 \cap U})$ برای U، $y \circ f|_U \circ x^{-1}$ نیز C^∞ است. بنابراین $f|_U$ نیز دیفرانیسل‌پذیر است.

۳۱- قرار می‌دهیم $C^\infty(N)$ مجموعه تمام توابع دیفرانسیل‌پذیر روی N و $C^\infty(M)$ مجموعه تمام توابع دیفرانسیل‌پذیر روی M باشد. همچنین $C^\infty(M,N)$ مجموعه تمام توابع دیفرانسیل‌پذیر از M به N باشد. بنابراین حکم سؤال را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\Big[\forall\, g\in C^\infty(N)\Rightarrow g\circ f\in C^\infty(M)\Big]\Leftrightarrow f\in C^\infty(M,N)$$

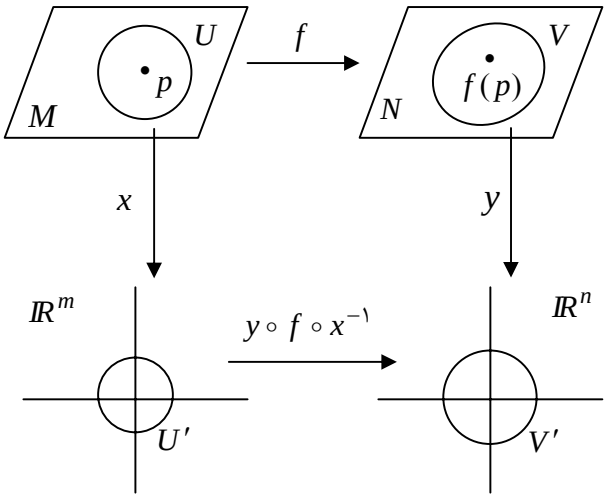
$(\Leftarrow)$ از آنجا که ترکیب دو تابع C^∞ خود C^∞ است، بنابراین اگر $f\in C^\infty(M,N)$ باشد و $g\in C^\infty(N)$ در این صورت $g\circ f\in C^\infty(M)$.

$(\Rightarrow)$ حال فرض می‌کنیم به ازای هر $g\in C^\infty(N)$، $g\circ f\in C^\infty(M)$ باشد.

از این شرط نتیجه می‌گردد، هرگاه $g:N\longrightarrow \mathbb{R}$ در نقطه $q=f(p)$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه $g\circ f:M\longrightarrow \mathbb{R}$ در p مشتق‌پذیر است.

فرض می‌کنیم $p\in M$ و کارت‌های $(y,V),(x,U)$ را به ترتیب حول p در M و حول $f(p)$ در N در نظر می‌گیریم. باید نشان دهیم که:

$$y\circ f\circ x^{-1}:U'\subseteq \mathbb{R}^m\longrightarrow V'\subseteq \mathbb{R}^n$$



که در آن $U'=x(U)$ و $V'=y(U)$ می‌باشد، در نقطه $x(p)$ مشتق‌پذیر است. برای این کار اگر قرار دهیم

$$y_i=\pi_i\circ y:V\longrightarrow \mathbb{R}$$

که در آن $\pi_i:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ تصویر روی مؤلفه i ام باشد، بوضوح به ازای $i=1,2,\ldots,n$ داریم y_i در نقطه $q=f(p)$ مشتق‌پذیر است بنابراین بنا به فرض $y_i\circ f$ در p مشتق‌پذیر است و این خود بدین

معناست که $y_i \circ f \circ x^{-1}$ در نقطه $x(p)$ مشتق‌پذیر است.
حال داریم:

$$\begin{cases} y \circ f \circ x^{-1} : U' \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow V' \subseteq \mathbb{R}^n \\ (y \circ f \circ x^{-1})(x(p)) = (y_1 \circ f \circ x^{-1}(x(p)), \ldots, y_n \circ f \circ x^{-1}(x(p))) \end{cases}$$

و چون تک تک مؤلفه‌های $y \circ f \circ x^{-1}$، در $x(p)$ مشتق‌پذیر است بنابراین $y \circ f \circ x^{-1}$ نیز در $x(p)$ مشتق‌پذیر می‌باشد. حال چون نقطه p دلخواه بود نتیجه می‌گردد f در تمام نقاط M دیفرانسیل‌پذیر است.

۳۲- در حالت کلی هرگاه U بازی از منیفلد M باشد و $p \in U$ داریم $T_pU \cong T_pM$. از طرف دیگر هرگاه M یک فضای برداری باشد و $p \in M$ داریم $T_pM \cong M$. با توجه به دو حکم اخیر، حکم مساله حاصل می‌شود.

۳۳- فرض می‌کنیم $[x,v] \in T_xM$ باشد. حال کارت (X,U) را حول $x \in M$ در نظر می‌گیریم و کارت (TX, TU) را حول $[x,v]$ در TM در نظر می‌گیریم

$$\begin{cases} TX : TU \longrightarrow X(U) \times \mathbb{R}^m \\ (TX)(x,v) = (X(x), v) \end{cases}$$

بنابراین می‌توان نوشت $X(x) = (x^1, \ldots, x^m)$, $v = (v^1, \ldots, v^m)$. حال خم

$$\begin{cases} \widetilde{\gamma} : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow X(U) \subseteq \mathbb{R}^m \\ \widetilde{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_m(t)) \end{cases}$$

را با شرایط $\widetilde{\gamma}(\circ) = X(x)$, $\widetilde{\gamma}'(\circ) = u$ می‌یابیم. (u بعداً معرفی می‌شود) یعنی:

$$\begin{cases} \gamma_1'(\circ) = u^1, \ldots, \gamma_m'(\circ) = u^m \\ \gamma_1(\circ) = x^1, \ldots, \gamma_m(\circ) = x^m \end{cases}$$

در واقع اگر تعریف کنیم $\gamma_i(t) = x^i + tu^i$ نتیجه می‌گردد که $\gamma_i'(\circ) = u^i, \gamma_i(\circ) = x^i$.
با کوچک کردن ε به قدر کافی می‌توان فرض کرد برد خم $\widetilde{\gamma}$ که با ضوابط بالا تعریف گردید داخل $X(U)$ بیفتد. حال تعریف می‌کنیم $\gamma = X^{-1}(\widetilde{\gamma})$ و لذا خواهیم داشت:

$$\gamma(\circ) = X^{-1}(\tilde{\gamma}(\circ)) = X^{-1}(x^1,\ldots,x^m) = X^{-1}(X(x)) = x$$

اما $X^{-1} : X(U) \longrightarrow U$ یک دیفئومورفیسم است و لذا:

$$(X^{-1})_{*_{X(x)}} : T_{X(x)}(X(U)) \longrightarrow T_xM$$

یکریختی است و بنابراین $[x,v] \in T_xM$ تصویر یک عضو یکتای $T_{X(x)}(X(U))$ می‌باشد. اما اگر قرار دهیم $X(U) = V, y = X(x)$ چون V زیرمجموعه بازی از $\mathbb{R}^m$ می‌باشد بنابراین $T_yV \cong \mathbb{R}^m$. چون $[x,v]$ تصویر یک عضو یکتای $T_{X(x)}(X(U))$ می‌باشد، قرار می‌دهیم:

$$(X(x),u) = ((X^{-1})_{*_{X(x)}})^{-1}[x,v]$$

حال داریم $(X^{-1})_{*_{X(x)}}(u) = v$ $\gamma'(\circ) = (X^{-1})_{*_{\tilde{\gamma}(\circ)}} \circ \tilde{\gamma}'(\circ) = (X^{-1})_{*_{X(x)}}$.

۳۴- تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} D : C^\infty(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ D(f) := l(f - f(p)) \end{cases}$$

که در آن $f(p)$ تابع ثابت روی M با مقدار $f(p)$ می‌باشد.

نشان می‌دهیم D در خواص زیر صدق می‌کند.

۱) D، $\mathbb{R}$ – خطی است

۲) به ازای هر $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ داریم

$$D(fg) = D(f)g(p) + f(p)D(g)$$

خطی بودن D با توجه به خطی بودن l نتیجه می‌شود و اما شرط دوم:

$$D(fg) = l(fg - f(p)g(p))$$

$$D(f)\cdot g(p) = l(f - f(p))\cdot g(p) = l(g(p)\cdot f - f(p)\cdot g(p))$$

$$f(p)\cdot D(g) = f(p)\cdot l(g - g(p)) = l(f(p)\cdot g - f(p)\cdot g(p))$$

$$D(f)\cdot g(p) + f(p)\cdot D(g) = l(g(p)\cdot f - f(p)\cdot g(p)) + l(f(p)\cdot g - f(p)\cdot g(p)) \quad (*)$$

اما از طرفی چون $f - f(p)\ ,\ g - g(p) \in C^\infty(M)_p$ می‌باشند، داریم:

$$l\big((f-f(p))(g-g(p))\big)=0$$
$$l\big(fg-g(p)f-f(p)g+f(p)g(p)\big)=0$$
$$\Rightarrow l\big(g(p)f-f(p)g(p)\big)=l\big(fg-f(p)g\big)$$

در نتیجه از رابطه $(*)$ خواهیم داشت:

$$D(f)\cdot g(p)+f(p)\cdot D(g)=l(fg-f(p)\cdot g)+l(f(p)\cdot g-f(p)\cdot g(p))$$
$$=l(fg-f(p)\cdot g(p))=D(fg)$$

حال اگر $f\in C^\infty(M)_p$ آنگاه $f(p)=0$ و بنابراین $D(f)=l(f)$ و لذا $D\big|_{C^\infty(M)_p}=l$.

اکنون اگر $D':C^\infty(M,\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{R}$ نیز نگاشتی با خواص (۱) و (۲) باشد و بعلاوه توسیع l نیز باشد، نشان می‌دهیم همان D می‌باشد. به عبارت دیگر

$$\forall\ f\in C^\infty(M,\mathbb{R})\qquad D'(f)=D(f)$$

برای این کار فرض می‌کنیم $f\in C^\infty(M,\mathbb{R})$ دلخواه باشد در این صورت:

$$D'(f)=D'(f)-0=D'(f)-D'(f(p))=D'(f-f(p))$$
$$=l(f-f(p))=D(f)$$

حال اگر $C^\infty_p(M,\mathbb{R}):=\{[f]\mid f\in C^\infty(M,\mathbb{R})\}$ مجموعه جِرم‌های توابع در p باشد، تعریف می‌کنیم :

$$\begin{cases}\widetilde{D}:C^\infty_p(M,\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{R}\\ \quad[f]\mapsto D(f)\end{cases}$$

$\widetilde{D}$ خوشتعریف است و اشتقاقِ یکتای وابسته به l می‌باشد.

۳۵- فرض می‌کنیم $T\in Hom_{\mathbb{R}}(\frac{C^\infty(M)_p}{W},\ \mathbb{R})$ در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases}l_T:C^\infty(M)_p\longrightarrow\mathbb{R}\\ l_T(f)=T([f])=T(f+W)\end{cases}$$

l خطی است و در شرط $\forall f,g \in C^\infty(M)_p \quad l_T(f\cdot g)=\circ$ نیز صدق می‌کند. بنا بر مساله قبل وجود دارد اشتقاق یکتایی در p مانند D_T بطوریکه D_T توسیع l_T باشد.
تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \theta : Hom_{IR}(\dfrac{C^\infty(M)_p}{W}\ ,\ I\!R) \longrightarrow D_p \\ \quad T \mapsto D_T \end{cases}$$

برعکس اگر $D \in D_p$ یک اشتقاق در p باشد تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} l_D : C^\infty(M)_p \longrightarrow I\!R \\ l_D(f) = D([f - f(p)]) \end{cases}$$

در این صورت l_D یک نگاشت $I\!R$ −خطی است و در شرط

$$\forall f,g \in C^\infty(M)_p \quad l_D(f\cdot g)=\circ$$

نیز صدق می‌کند بنابراین l_D، $T_D \in Hom_{I\!R}(\dfrac{C^\infty(M)_p}{W}\ ,\ I\!R)$ را با ضابطه زیر القاء می‌کند:

$$\forall f \in C^\infty(M)_p \quad T_D([f]) = l_D(f)$$

با توجه به خاصیت l_D، T_D خوش‌تعریف و $I\!R$ −خطی است. حال قرار می‌دهیم

$$\begin{cases} \psi : D_p \longrightarrow Hom_{I\!R}(\dfrac{C^\infty(M)_p}{W}\ ,\ I\!R) \\ \quad D \mapsto T_D \end{cases}$$

براحتی می‌توان دید که θ , ψ معکوس یکدیگرند و لذا θ یک یکریختی فضاهای برداری حقیقی است

بنابراین $D_p \cong Hom_{I\!R}(\dfrac{C^\infty(M)_p}{W}\ ,\ I\!R)$.

۳۶- نگاشت طبیعی کلاف مماس را با $\pi : TM \longrightarrow M$ نمایش می‌دهیم که به ازای هر $p \in M$ ، $\pi^{-1}(p) = T_pM$ فیبر مماس بر M در p می‌باشد. می‌دانیم که π یک نگاشت پیوسته و پوشا

می‌باشد در نتیجه M نیز همبند خواهد بود. حال فرض می‌کنیم M همبند باشد و بر فرض خلف TM ناهمبند باشد. یعنی بازهای ناتهی O_1 و O_2 در TM چنان موجود باشند که $O_1 \cap O_2 = \phi$ و $TM = O_1 \cup O_2$. می‌دانیم که به ازای هر $p \in M$ ، T_pM همئومورف با $\mathbb{R}^n$ می‌باشد.
بنابراین همبند است و لذا هر T_pM کاملاً در O_1 و یا کاملاً در O_2 قرار می‌گیرد. پس دو زیرمجموعه U و V در M بدست می‌آیند که $O_1 = TU$ و $O_2 = TV$ باشند. حال چون نگاشت π سوبمرسیون است و هر نگاشت سوبمرسیون یک نگاشت باز می‌باشد بنابراین $U = \pi(O_1)$ و $V = \pi(O_2)$ دو باز ناتهی در M می‌باشند که با هم اشتراک ندارند و بعلاوه $M = U \cup V$ که این خلاف فرض همبندی M می‌باشد.

۳۷- فرض می‌کنیم $[x,v] \in TM$ و $f_{*x}[x,v] = [f(x), w] \in TN$ باشد. با در نظر گرفتن دو کارت (X,U) حول x در M و (Y,V) حول $f(x) = y$ در N، کارت‌های زیر را حول $[x,v]$ در TM و حول $[y,w]$ در TN در نظر می‌گیریم

$$\begin{cases} TU \xrightarrow{TX} X(U) \times \mathbb{R}^m \\ [p,v'] \mapsto (X(p), v') \end{cases} \qquad \begin{cases} TV \xrightarrow{TY} Y(U) \times \mathbb{R}^n \\ [q,w'] \mapsto (Y(p), w') \end{cases}$$

حال اگر $TY \circ f_* \circ (TX)^{-1}$ را در نظر بگیریم خواهیم داشت

$$\begin{aligned} TY \circ f_* \circ (TX)^{-1}(X(p), v') &= TY(\ f_*(\ [p,v']\ )\ ) \\ &= TY(\ [\ f(p), D(Y \circ f \circ X^{-1})(X(p))(v')\ ]\ ) \\ &= (Y(f(p)),\ D(Y \circ f \circ X^{-1})(X(p))(v')) \\ &= (Y \circ f(p)\ ,\ D(Y \circ f \circ X^{-1})(X(p))(v')) \\ &= ((Y \circ f \circ X^{-1})(X(p))\ ,\ D(Y \circ f \circ X^{-1})(X(p))(v')\ ) \end{aligned}$$

اما $Y \circ f \circ X^{-1}$ نسبت به $X(p)$، C^r و $D(Y \circ f \circ X^{-1})$ نسبت به $X(p)$، C^{r-1} می‌باشد. البته $Y \circ f \circ X^{-1}$ نسبت به v' مستقل است و لذا نسبت به v'، C^∞ است. همینطور $D(Y \circ f \circ X^{-1})$ نسبت به v' خطی است و چون ما در فضای با بُعد متناهی کار می‌کنیم لذا نسبت به v'، C^∞ می‌باشد. بنابراین $TY \circ f_* \circ TX^{-1}$ در کل یک نگاشت C^{r-1} می‌باشد در نتیجه طبق تعریف، f_* یک نگاشت C^{r-1} می‌باشد.

۳۸- واضح است.

۳۹- به ازای $(p,q)\in M\times N$ فرض می‌کنیم $\xi=((p,q),w)\in T_{(p,q)}(M\times N)$ باشد. بنا به تعریف وجود دارد خم دیفرانسیل‌پذیر $\begin{cases}\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\subseteq I\!R\longrightarrow M\times N\\ t\mapsto(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\end{cases}$ بطوریکه

$$\gamma(\circ)=(p,q)\ ,\ (\gamma(\circ),\gamma'(\circ))=((p,q),w)$$

با توجه به مطالب فوق $\gamma_1'(\circ)\in T_pM$ ، $\gamma_2'(\circ)\in T_qN$ و $w=\gamma'(\circ)=(\gamma_1'(\circ),\gamma_2'(\circ))$.

نگاشت زیر:

$$\begin{cases}T_{(p,q)}(M\times N)\xrightarrow{\varphi_{(p,q)}}T_pM\times T_qN\\ \xi\mapsto((p,\gamma_1'(\circ)),(q,\gamma_2'(\circ)))\end{cases}$$

یک نگاشت خطی و خوشتعریف است و می‌توان دید در واقع یک ایزومورفیسم خطی است. برای اثبات این مطلب با توجه به اینکه بُعد دو فضای برداری $T_{(p,q)}(M\times N)$ و $T_pM\times T_qN$ هر دو برابر با $(dimM+dimN)$ می‌باشند، کافی است نشان دهیم این نگاشت یک به یک است. فرض می‌کنیم:

$$\varphi_{(p,q)}(\xi)=\varphi_{(p,q)}(\eta)\qquad(*)$$

که در آن $\eta=((p,q),v)$ عضوی از $T_{(p,q)}(M\times N)$ می‌باشد که از خم زیر :

$$\begin{cases}\beta:(-\varepsilon,\varepsilon)\subseteq I\!R\longrightarrow M\times N\\ t\mapsto(\beta_1(t),\beta_2(t))\end{cases}$$

بدست می‌آید. یعنی $\eta=(\beta(\circ),\beta'(\circ))$. با توجه به رابطه $(*)$ نتیجه می‌گردد که:

$$((p,\gamma_1'(\circ)),(q,\gamma_2'(\circ)))=((p,\beta_1'(\circ)),(q,\beta_2'(\circ)))$$

در نتیجه $\gamma_i'(\circ)=\beta_i'(\circ)$ برای $i=1,2$ و بنابراین $\eta=\xi$.

۴۰- الف) فرض کنیم $xe^y+y=x'e^{y'}+y'$ و $xe^y+\lambda y=x'e^{y'}+\lambda y'$ در این صورت داریم $(1-\lambda)y=(1-\lambda)y'$. بنابراین برای $\lambda\neq1$ داریم $y=y'$. همچنین $x=x'$. نگاشت φ بوضوح C^∞ می‌باشد و نگاشت معکوس آن به این صورت است:

$$x=\frac{\lambda u-v}{\lambda-1}\ e^{\frac{u-v}{\lambda-1}} \qquad y=\frac{u-v}{1-\lambda}$$

نگاشت معکوس φ، C^∞ است اگر و تنها اگر $\lambda\neq 1$. بنابراین φ دیفئومورفیسم است اگر و تنها اگر $\lambda\neq 1$.

ب) داریم:

$$det\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}=det\begin{pmatrix}e^y & xe^y+1\\ e^y & xe^y+\lambda\end{pmatrix}$$

بنابراین $du\wedge dv=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}dx\wedge dy=e^y(\lambda-1)\,dx\wedge dy$. در نتیجه φ حافظ جهت است اگر $\lambda>1$.

۴۱- دو کارت $(\varphi_\alpha, TU_\alpha)$ و $(\varphi_\beta, TU_\beta)$ را حول $[p,u]\in T_pM$ در نظر می‌گیریم. نگاشت گذر عبارتست از:

$$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(TU_\alpha\cap TU_\beta)\longrightarrow\varphi_\beta(TU_\alpha\cap TU_\beta)$$
$$(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})(x_\alpha(p),u)=\varphi_\beta(p,\alpha,u)=\varphi_\beta\left(p,\beta,D(x_\beta\circ x_\alpha^{-1})(x_\alpha(p))(u)\right)$$
$$=(x_\beta(p),D(x_\beta\circ x_\alpha^{-1})(x_\alpha(p))(u))=\left(D(x_\beta\circ x_\alpha^{-1})(x_\alpha(p)),D(x_\beta\circ x_\alpha^{-1})(x_\alpha(p))(u)\right)$$

بنابراین :

$$det\left(D(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})(x_\alpha(p),u)\right)$$
$$=det\begin{bmatrix}D(x_\beta\circ x_\alpha^{-1})(x_\alpha(p)) & \circ\\ D^2(x_\beta\circ x_\alpha^{-1})(x_\alpha(p))(u) & D(x_\beta\circ x_\alpha^{-1})(x_\alpha(p))\end{bmatrix}$$
$$=det\left(D(x_\beta\circ x_\alpha^{-1})(x_\alpha(p))\right)^2$$

چون M یک منیفلد C^∞ است، داریم: