۱- می‌دانیم که

$$SL(۲, \mathbb{R}) = \{ A \in M(۲, \mathbb{R}) \,|\, det(A) = ۱ \}$$

هر عضو $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(۲, \mathbb{R})$ را با $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^۴$ یکی می‌گیریم. بنابراین کافی است $f : \mathbb{R}^۴ \longrightarrow \mathbb{R}$ را باضابطه زیر در نظر بگیریم:

$$\forall A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M(۲, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^۴ \quad f(a,b,c,d) := ac - bd - ۱ = \det(A) - ۱$$

دراینصورت $SL(۲, \mathbb{R}) = f^{-۱}(۰)$.

۲- با توجه به قضیه ۴ از فصل اول ، وجود دارند توابع هموار و نامنفی $f_۰ , f_۱$ روی $\mathbb{R}^n$ بطوریکه :

$$A_۱ = f_۱^{-۱}(۱) \;\; , \;\; A_۰ = f_۰^{-۱}(۰)$$

چون $A_۰ \cap A_۱ = \phi$ بنابراین $f(x) = \dfrac{f_۰(x)}{f_۰(x) + f_۱(x)}$ یک تابع C^∞ روی $\mathbb{R}^n$ تعریف می‌کند، بطوریکه در شرایط مساله صدق می‌کند.

۳- به مساله ۲ مراجعه شود.

۴- می‌دانیم تابع هموار $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ چنان موجود است که

$$۰ \le \psi \le ۱ \;\; , \;\; A_۰ = \psi^{-۱}(۰) \;\; , \;\; A_۱ = \psi^{-۱}(۱)$$

حال تعریف می‌کنیم :

$$\begin{cases} g : [۰,۱] \longrightarrow [a,b] \\ g(x) = (۱-x)a + xb \end{cases}$$

g یک دیفئومورفیسم بین $[۰,۱] , [a,b]$ برقرار می‌سازد. حال قرار می‌دهیم $f = g \circ \psi$. در این صورت:

$$\begin{cases} f^{-۱}(a) = (g \circ \psi)^{-۱}(a) = \psi^{-۱} \circ g^{-۱}(a) = \psi^{-۱}(۰) = A_۰ \\ f^{-۱}(b) = \psi^{-۱}(۱) = A_۱ \end{cases}$$

و $a \le f(x) = g(\psi(x)) \le b$

۵- به ازای $p \in X$ عدد مناسب $n \in \mathbb{N}_\circ$ را بُعد X در p می‌نامیم و قرار می‌دهیم:

$$U_n := \{ p \in X \mid \text{بعد } X \text{ در } p \text{ برابر } n \text{ است} \}$$

ادعا می‌کنیم U_n به ازای هر $n \in \mathbb{N}_\circ$ باز است. زیرا برای هر $p \in U_n$ اگر V همسایگی باز حول p باشد که همئومورف با یک باز $\mathbb{R}^n$ است، بدیهی است که برای هر نقطه $q \in V$ مجدداً V یک همسایگی باز است که همئومورف با $\mathbb{R}^n$ است پس $p \in V \subseteq U_n$ و بعلاوه داریم

$$X = \bigcup_{n=\circ}^{+\infty} U_n$$

و توجه داریم که به ازای $n = \circ$، قرار می‌دهیم $\mathbb{R}^\circ = \{\circ\}$ و هر یک از نقاط ایزوله X با $\mathbb{R}^\circ$ همئومورف هستند. به خاطر همبندی X دقیقاً یکی از U_nها ناتهی و بقیه تهی هستند. پس وجود دارد $n \in \mathbb{N}_\circ$ بطوریکه $X = U_n$.

۶- فرض کنید (x,U) کارت دلخواهی از M باشد که $x : U \longrightarrow x(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ و همچنین (y,V) کارت دیگری از M باشد که $y : V \longrightarrow y(V) \subseteq \mathbb{R}^n$. چون M همبند است لذا نمی‌توان آن را بصورت اجتماع دو مجموعه باز ناتهی نوشت لذا $U \cap V \neq \phi$. حال چون M، C^r می‌باشد لذا نگاشت‌های زیر هر دو C^r می‌باشند:

$$x \circ y^{-1} : y(U \cap V) \longrightarrow x(U \cap V)$$
$$y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \longrightarrow y(U \cap V)$$

و چون این دو نگاشت حداقل C^1 می‌باشند، پس مشتق آنها نیز در هرنقطه از دامنه‌شان موجود است. بنابراین بنا به قضیه تابع وارون ماتریس تبدیل آنها که ماتریس‌های $m \times n$ و $n \times m$ می‌باشند باید وارون‌پذیر باشند در نتیجه باید $m = n$ باشد.

۷- برای اثبات این موضوع فضاهای موضعاً اقلیدسی غیرهاسدورف و بدون پایه شمارا را مثال می‌زنیم :

- **فضای موضعاً اقلیدسی بدون پایه شمارا :** فرض کنید M یک مجموعه ناشمارا با توپولوژی گسسته باشد. به ازای هر $x \in M$، کارت $(\varphi, \{x\})$ را حول x در نظر می‌گیریم که در آن:

$$\varphi(x) = ۰ \in R^{۰} = \{۰\}$$

بنابراین M یک منیفلد صفر بعدی است.

- **فضای موضعاً اقلیدسی غیر هاسدورف :** فرض کنید $M = (۰,۱] \cup [۲,۳) \subseteq \mathbb{R}$ قرار می‌دهیم:

$$N_{\varepsilon_۱,\varepsilon_۲} = (۱-\varepsilon_۱, ۱] \cup (۲, ۲+\varepsilon_۲)$$
$$N'_{\delta_۱,\delta_۲} = (۱-\delta_۱, ۱) \cup [۲, ۲+\delta_۲)$$

که در آن $۰ < \varepsilon_۱, \varepsilon_۲, \delta_۱, \delta_۲ < ۱$.

حال به ازای $۰ < a < ۱$ و $۰ < \varepsilon < min\{a, ۱-a\}$ قرار می‌دهیم $U_{a,\varepsilon} := (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ و برای $۲ < b < ۳$ و $۰ < \delta < min\{b-۲, ۳-b\}$ قرار می‌دهیم $V_{a,\delta} := (b-\delta, b+\delta)$.

حال خانواده

$$\left\{ N_{۱,\varepsilon_۱,\varepsilon_۲}\ ,\ N'_{۲,\varepsilon_۱,\varepsilon_۲}\ ,\ U_{a,\varepsilon}\ ,\ V_{b,\delta} \;\middle|\; \begin{matrix} ۰ < \varepsilon_۱, \varepsilon_۲, \delta < ۱ & ۰ < \delta < min\{b-۲, ۳-b\} \\ ۰ < \varepsilon < min\{a, ۱-a\} & ۰ < a < ۱\ ,\ ۲ < b < ۳ \end{matrix} \right\}$$

را پایه یک توپولوژی روی M در نظر می‌گیریم. نسبت به این توپولوژی M موضعاً اقلیدسی است. زیرا اگر $x \in M$ و U_x همسایگی باز شامل x باشد، کارت (φ_x, U_x) را در چهار حالت ممکن به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x = ۱\ ,\ U_x = N_{۱,\varepsilon,\varepsilon} \qquad \varphi_x : U_x \longrightarrow (۱-\varepsilon\ ,\ ۱+\varepsilon)$$
$$\varphi_x(t) = \begin{cases} t & (۱-\varepsilon\ ,\ ۱] \\ ۱-t & (۲\ ,\ ۲+\varepsilon) \end{cases}$$
$$x = ۲\ ,\ U_x = N_{۲,\varepsilon,\varepsilon} \qquad \varphi_x : U_x \longrightarrow (۲-\varepsilon\ ,\ ۲+\varepsilon)$$
$$\varphi_x(t) = \begin{cases} ۱+t & (۱-\varepsilon\ ,\ ۱) \\ t & [۲\ ,\ ۲+\varepsilon) \end{cases}$$
$$۰ < x < ۱\ ,\ U_x = U_{x,\varepsilon} \quad \varphi_x = ۱_{U_x}$$
$$۲ < x < ۳\ ,\ U_x = V_{x,\varepsilon} \quad \varphi_x = ۱_{U_x}$$

همچنین M دارای پایه شمارا است اما هاسدورف نمی‌باشد. زیرا ۱ و ۲ را در M نمی‌توان با بازها از هم جدا کرد. (چرا ؟)

۸- $X(U)$ زیرمجموعه بازی از $\mathbb{R}^n$ می‌باشد و با کارت همانی خود یک منیفلد $n-$بُعدی است. حال به ازای هر کارت مانند (Y,V) از M با شرط $U \cap V \neq \phi$ نگاشت زیر:

$$1_{X(U)} \circ X \circ Y^{-1} = X \circ Y^{-1}$$

نگاشتِ گذر می‌باشد، بنابراین با توجه به ساختمان C^∞ روی M، نگاشت بالا C^∞ است و بطور مشابه $Y \circ X^{-1} \circ 1^{-1}_{X(U)} = Y \circ X^{-1}$ نیز C^∞ است و لذا بنا به تعریف، نگاشت X یک دیفئومورفیسم روی بُردش می‌باشد.

۹- به مساله ۱۰ مراجعه شود.

۱۰- فرض می‌کنیم M یک منیفلد فشرده $n-$بُعدی باشد. هرگاه M را بتوان با یک کارت (X,M) پوشاند، در این صورت $X(M)$ به عنوان زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$، فشرده است. زیرا تصویر مجموعه فشرده M تحت همئومورفیسم X می‌باشد، بنابراین $X(M)$ از طرفی بنا به تعریف یک کارت زیرمجموعه باز از $\mathbb{R}^n$ و از طرف دیگر زیرمجموعه‌ای بسته از $\mathbb{R}^n$ می‌باشد و چون $\mathbb{R}^n$ همبند می‌باشد، نتیجه می‌گردد که $X(M)$ یا تهی است یا کل $\mathbb{R}^n$. از آنجا که $X(M)$ ناتهی است نتیجه می‌شود که $X(M) = \mathbb{R}^n$ و لذا $\mathbb{R}^n$ فشرده خواهد بود که این تناقض است.

۱۱- با در نظر گرفتن دو کارت کنج‌نگاری برای S^2 می‌توان دید اجتماع دو کارت لزوماً یک کارت نمی‌باشد.

۱۲- فرض می‌کنیم:

$$(\varphi_۱ , U_۱) = (۱_{U_۱}, (-۲,۲))$$
$$(\varphi_۲ , U_۲) = (۱_{U_۲}, (۱,۲))$$
$$(\varphi_۳ , U_۳) = (t^۳, (-۲,۲))$$

در اینصورت $(\varphi_۱, U_۱)$ با $(\varphi_۲, U_۲)$، C^∞-مرتبط است. همچنین $(\varphi_۲, U_۲)$ با $(\varphi_۳, U_۳)$. ولیکن $(\varphi_۱, U_۱)$ با $(\varphi_۳, U_۳)$، C^∞-مرتبط نیست.

۱۳- معادله خط l_N بصورت زیر است

$$l_N : Y - ۱ = \frac{y-۱}{x}(X - ۰)$$

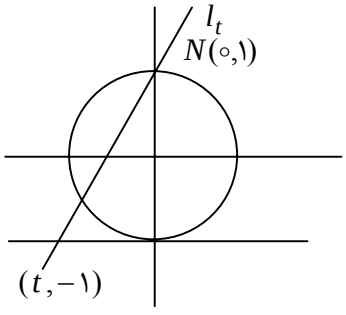
با قرار دادن $Y = -۱$ داریم $X = \frac{۲x}{۱-y}$. نگاشت‌های π_S , π_N را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{cases} \pi_N : S^۱ - \{N\} \xrightarrow{C^\infty} I\!R \\ \pi_N(x,y) = \frac{۲x}{۱-y} \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_S : S^۱ - \{S\} \xrightarrow{C^\infty} I\!R \\ \pi_S(x,y) = \frac{۲x}{۱+y} \end{cases}$$

همچنین

$$\begin{cases} \pi_N^{-۱} : I\!R \longrightarrow S^۱ - \{N\} \\ \pi_N^{-۱}(t) = (\frac{۴t}{۴+t^۲}, \frac{t^۲-۴}{t^۲+۴}) \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_S^{-۱} : I\!R \longrightarrow S^۱ - \{S\} \\ \pi_S^{-۱}(t) = (\frac{۴t}{۴+t^۲}, \frac{۴-t^۲}{۴+t^۲}) \end{cases}$$

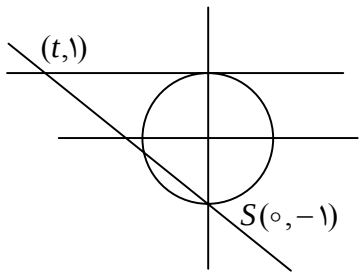
زیرا



$$l_t : Y - ۱ = \frac{-۲}{t}X \Rightarrow Y = ۱ - \frac{۲}{t}X$$
$$Y^۲ = ۱ - \frac{۴}{t}X + \frac{۴}{t^۲}X^۲$$

$$X^2+Y^2=1 \Rightarrow X\left[(1+\frac{4}{t^2})X-\frac{4}{t}\right]=0 \Rightarrow X=0 \text{ یا } X=\frac{4t}{4+t^2},\ Y=\frac{t^2-4}{t^2+4}$$

و



$$l_t: Y+1=\frac{2}{t}X \Rightarrow Y=-1+\frac{2}{t}X$$

$$Y^2=1-\frac{4}{t}X+\frac{4}{t^2}X^2$$

$$X^2+Y^2=1 \Rightarrow X\left[(1+\frac{4}{t^2})X-\frac{4}{t}\right]=0 \Rightarrow X=0 \text{ یا } X=\frac{4t}{4+t^2}, Y=\frac{-t^2+4}{t^2+4}$$

$$\begin{cases}\pi_S\circ\pi_N^{-1}: \mathbb{R}-\{0\}\longrightarrow \mathbb{R}-\{0\}\\ \pi_S\circ\pi_N^{-1}(t)=\pi_S(\frac{4t}{4+t^2},\frac{t^2-4}{t^2+4})=\frac{4}{t}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\pi_N\circ\pi_S^{-1}: \mathbb{R}-\{0\}\longrightarrow \mathbb{R}-\{0\}\\ \pi_N\circ\pi_S^{-1}(t)=\pi_N(\frac{4t}{4+t^2},\frac{4-t^2}{t^2+4})=\frac{4}{t}\end{cases}$$

بنابراین نگاشت‌های گذر C^∞ می‌باشند، در نتیجه این دو کارت تشکیل یک اطلس C^∞ برای S^1 می‌دهند.

۱۴- الف) داریم:

$$\begin{cases}\varphi_0^{-1}: \mathbb{R}^2\longrightarrow U_0\\ \varphi_0^{-1}(y,z)=[1\ ,\ y\ ,\ z]\end{cases}\quad \begin{cases}\varphi_1^{-1}: \mathbb{R}^2\longrightarrow U_1\\ \varphi_1^{-1}(x,z)=[x\ ,\ 1\ ,\ z]\end{cases}\quad \begin{cases}\varphi_2^{-1}: \mathbb{R}^2\longrightarrow U_2\\ \varphi_2^{-1}(y,z)=[x\ ,\ y\ ,\ 1]\end{cases}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} \varphi_{\circ}\circ\varphi_{1}^{-1}(x,z)=\varphi_{\circ}([x,1,z])=(\frac{1}{x},\frac{z}{x}) & x\neq\circ \\ \varphi_{1}\circ\varphi_{\circ}^{-1}(y,z)=\varphi_{1}([1,y,z])=(\frac{1}{y},\frac{z}{y}) & y\neq\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_{\circ}\circ\varphi_{2}^{-1}(x,y)=\varphi_{\circ}([x,y,1])=(\frac{y}{x},\frac{1}{x}) & x\neq\circ \\ \varphi_{2}\circ\varphi_{\circ}^{-1}(y,z)=\varphi_{2}([1,y,z])=(\frac{1}{z},\frac{y}{z}) & z\neq\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_{1}\circ\varphi_{2}^{-1}(x,y)=\varphi_{1}([x,y,1])=(\frac{x}{y},\frac{1}{y}) & y\neq\circ \\ \varphi_{2}\circ\varphi_{1}^{-1}(x,z)=\varphi_{2}([x,1,z])=(\frac{x}{z},\frac{1}{z}) & z\neq\circ \end{cases}$$

بوضوح تمام نگاشت‌های گذر C^{∞} می‌باشند، بنابراین $\{(\varphi_i,U_i)\mid i=\circ,1,2\}$ یک اطلس C^{∞} برای $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ تشکیل می‌دهد.

ب) با توجه به اینکه $(x\neq\circ)$ $\frac{\partial(\varphi_{\circ}\circ\varphi_{2}^{-1})}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ -\frac{1}{x^2} & \circ \end{vmatrix}=\frac{1}{x^3}$ بنابراین علامت ثابتی روی $U_{\circ}\cap U_2$ ندارد.

ج) با توجه به اینکه $(y\neq\circ)$ $\frac{\partial(\varphi_{1}\circ\varphi_{2}^{-1})}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \\ \circ & -\frac{1}{y^2} \end{vmatrix}=-\frac{1}{y^3}$ بنابراین علامت ثابتی روی $U_1\cap U_2$ ندارد.

۱۵- با در نظر گرفتن ۴ کارت زیر استوانه را می‌پوشانیم و سپس نشان می‌دهیم اطلس بدست آمده دیفرانسیل‌پذیر است و نتیجه می‌گیریم که استوانه یک منیفلد C^∞ است که بوضوح دو بُعدی است.

$$V_1=\{(x,y,z)\,|\,y=0\,,-a<x<a\} \qquad V_2=\{(x,y,z)\,|\,x=0\,,-a<y<a\}$$
$$U_1^+=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2=a^2\,,x>0\} \qquad U_2^+=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2=a^2\,,y>0\}$$
$$U_1^-=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2=a^2\,,x<0\} \qquad U_2^-=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2=a^2\,,y<0\}$$

$$\begin{cases}\varphi_{+1}:U_1^+\subseteq M\to V_2\\ \varphi_{+1}(x,y,z)=(0,y,z)\end{cases} \qquad \begin{cases}\varphi_{-1}:U_1^-\subseteq M\to V_2\\ \varphi_{-1}(x,y,z)=(0,y,z)\end{cases}$$
$$\begin{cases}\varphi_{+2}:U_2^+\subseteq M\to V_1\\ \varphi_{+2}(x,y,z)=(x,0,z)\end{cases} \qquad \begin{cases}\varphi_{-2}:U_2^-\subseteq M\to V_1\\ \varphi_{-2}(x,y,z)=(x,0,z)\end{cases}$$

از آنجاییکه $U_2^+\cap U_2^-=U_1^+\cap U_1^-=\phi$ می‌باشد بنابراین φ_{+1}، φ_{-1} با هم و φ_{+2}، φ_{-2} باهم $C^\infty-$ مرتبط هستند. امّا :

$$U_1^+\cap U_2^-=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2=a^2\,,y<0\,,x>0\}$$
$$U_1^-\cap U_2^+=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2=a^2\,,y>0\,,x<0\}$$
$$U_1^+\cap U_2^+=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2=a^2\,,y>0\,,x>0\}$$
$$U_1^-\cap U_2^-=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2=a^2\,,y<0\,,x<0\}$$

$$\begin{cases}\varphi_{+1}^{-1}:V_2\to U_1^+\subseteq M\\ \varphi_{+1}^{-1}(0,y,z)=(\sqrt{a^2-y^2},y,z)\end{cases} \qquad \begin{cases}\varphi_{+2}^{-1}:V_1\to U_2^+\subseteq M\\ \varphi_{+2}^{-1}(x,0,z)=(x,\sqrt{a^2-x^2},z)\end{cases}$$
$$\begin{cases}\varphi_{-1}^{-1}:V_2\to U_1^-\subseteq M\\ \varphi_{-1}^{-1}(0,y,z)=(-\sqrt{a^2-y^2},y,z)\end{cases} \qquad \begin{cases}\varphi_{-2}^{-1}:V_1\to U_2^-\subseteq M\\ \varphi_{-2}^{-1}(x,0,z)=(x,-\sqrt{a^2-x^2},z)\end{cases}$$

بنابراین:

$$\begin{cases}\varphi_{+1}\circ\varphi_{-2}^{-1}:V_1\to V_2 & U_1^+\cap U_2^- \quad \text{روی}\\ \varphi_{+1}\circ\varphi_{-2}^{-1}(x,\circ,z)=\varphi_{+1}(x,-\sqrt{a^2-x^2},z)=(\circ,-\sqrt{a^2-x^2},z)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\varphi_{+2}\circ\varphi_{-1}^{-1}:V_2\to V_1 & U_1^+\cap U_2^- \quad \text{روی}\\ \varphi_{-2}\circ\varphi_{-1}^{-1}(\circ,y,z)=\varphi_{-2}(-\sqrt{a^2-y^2},y,z)=(-\sqrt{a^2-y^2},\circ,z)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\varphi_{+1}\circ\varphi_{+2}^{-1}:V_1\to V_2 & U_1^+\cap U_2^+ \quad \text{روی}\\ \varphi_{+1}\circ\varphi_{+2}^{-1}(x,\circ,z)=\varphi_{+1}(x,\sqrt{a^2-x^2},z)=(\circ,\sqrt{a^2-x^2},z)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\varphi_{+2}\circ\varphi_{+1}^{-1}:V_2\to V_1 & U_1^+\cap U_2^+ \quad \text{روی}\\ \varphi_{+2}\circ\varphi_{+1}^{-1}(\circ,y,z)=\varphi_{+2}(\sqrt{a^2-y^2},y,z)=(\sqrt{a^2-y^2},\circ,z)\end{cases}$$

در نتیجه چون تمام نگاشت‌های گذر C^∞ هستند، بنابراین تمام کارت‌های اطلس بالا با هم C^∞ – مرتبطند و لذا یک ساختار منیفلدی روی استوانه القا می‌کنند.

۱۶- روی M توپولوژی گسسته را در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم:

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad U_n:=\{\frac{1}{n}\}$$

U_n در M باز می‌باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases}\varphi_n:U_n\longrightarrow \mathbb{R}^\circ:=\{\circ\}\\ \quad \frac{1}{n}\mapsto\circ\end{cases}$$

در این صورت φ_n همئومورفیسم است و اگر $n\neq m$ داریم: $U_n\cap U_m=\phi$. بنابراین کارت‌ها همگی با هم مرتبط هستند و لذا M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر صفر بُعدی است.

در مورد $M\cup\{\circ\}$، از آنجا که صفر نقطه حدی M می‌باشد هر همسایگی حول مبدا حداقل شامل یک نقطه از M می‌باشد و لذا یک به یک بودن کارت‌های شامل صفر، زیر سؤال می‌رود. اگر $U_\circ$ یک همسایگی حول صفر باشد و $\varphi_\circ:U_\circ\cap M\longrightarrow\mathbb{R}^\circ$ ، در این صورت $n\in\mathbb{N}$ وجود دارد

بطوریکه $\frac{1}{n} \in U_0 \cap M$ در این صورت $\varphi_0(\frac{1}{n}) = \varphi_0(0) = 0$ در نتیجه φ_0 یک به یک نیست و لذا نمی‌تواند کارتی برای $M \cup \{0\}$ باشد. توجه داریم که در اینجا $M \cup \{0\}$ را با توپولوژی القایی از $\mathbb{R}$ در نظر گرفته‌ایم.

۱۷- خیر. هیچ همسایگی بازی از M حول مبدا نمی‌تواند با بازه‌ای از $\mathbb{R}$ همئومورف باشد. زیرا با حذف مبدا و تصویر آن تحت همئومورفیسم مفروض، همسایگی مذکور دارای چهار مؤلفه همبندی خواهد شد در حالیکه بازهٔ باز محذوف در $\mathbb{R}$ دارای دو مؤلفه همبندی است، که این تناقض است.

۱۸- فرض می‌کنیم $A \in R_m$ در این صورت طبق تعریف نتیجه می‌گردد که A دارای یک مینور $m \times m$ می‌باشد که دارای دترمینان ناصفر است. با توجه به پیوستگی تابع دترمینان نتیجه می‌گردد که این مینور روی یک همسایگی A در $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ ناصفر است و لذا یک همسایگی از A مانند $U \subseteq M_{m\times n}(\mathbb{R})$ چنان وجود دارد که $A \subset U \subseteq R_m$ یعنی R_m یک زیرمجموعه باز $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ می‌باشد و لذا یک منیفلد از همان بُعد $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ یعنی از بُعد mn می‌باشد.

۱۹- مشابه مساله قبل قابل حل است.

۲۰- فرض می‌کنیم V یک فضای برداری حقیقی و n –بُعدی باشد. در اینصورت می‌دانیم که به عنوان دو فضای برداری $V \cong \mathbb{R}^n$ و لذا از روی $\mathbb{R}^n$ توپولوژی معمولی را روی V می‌گذاریم. بنابراین V دارای پایه شمارا است و همچنین V هاسدورف می‌شود. حال فرض کنیم $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ یک پایه مرتب برای V باشد. در اینصورت وجود دارد یکریختی فضاهای برداری زیر:

$$\begin{cases} \varphi_e : V \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ v \mapsto (x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

که در آن $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. حال با توجه به تعریف توپولوژی روی V نتیجه می‌گردد که (φ_e, V) یک کارت و در واقع یک اطلس برای V می‌باشد. بنابراین V یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر n –بُعدی است. نکته قابل توجه این است که بُعد V به عنوان منیفلد و فضای برداری با هم برابر است.

۲۱- نگاشت پیوسته زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} det : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ A \mapsto detA \end{cases}$$

در نتیجه $GL(n,\mathbb{R}) = det(\mathbb{R} - \{\circ\})$ زیرمجموعه ی باز $M_{n\times n}$ می‌باشد. بنابراین یک زیرمنیفلد آن و همبعد با آن می‌باشد و چون بعد $M_{n\times n}$ برابر n^2 می‌باشد (چرا؟) داریم:

$$dim\, GL(n,\mathbb{R}) = dim\, M_{n\times n} = n^2$$

۲۲- فرض کنیم $p \in M$ و (X,U) یک کارت حول p باشد بطوریکه $X(p) = \circ \in \mathbb{R}^n$ و $X(U) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \|y\| < 1 \right\}$. حال از آنجاکه $\mathbb{R}^n$ موضعاً فشرده است ، همسایگی باز V شامل مبدا چنان وجود دارد که $\overline{V}$ فشرده باشد (چنین همسایگی را یک همسایگی فشرده می‌نامیم). به ازای $r > \circ$ تبدیل

$$\begin{cases} T_r : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \qquad x \mapsto \frac{1}{r} x \end{cases}$$

را یک تجانس می‌نامیم که یک همئومورفیسم $\mathbb{R}^n$ می‌باشد. در صورت نیاز با استفاده از تجانس مناسب می‌توان فرض کرد که $V \subset \overline{V} \subseteq X(U)$. حال چون X یک همئومورفیسم می‌باشد نتیجه می‌گردد که $X^{-1}(V)$ یک همسایگی فشرده شامل p در M می‌باشد.

۲۳- مشابه مساله قبل قابل حل است.