تعریف ۱:

فرض کنید M یک منیفلد، TM فضای مماس آن و $\pi_M : TM \longrightarrow M$ نگاشت تصویر کلاف مماس باشند. مقصود از یک میدان برداری C^∞ روی M، نگاشتی C^∞ است مانند $X : M \longrightarrow TM$ بطوریکه $\pi_M \circ X = 1_M$. بنابراین X به هر نقطه $x \in M$، عضو $X(x)$ از T_xM را نسبت می‌دهد.

تعریف ۲:

خم مشتق‌پذیر $\gamma : I \longrightarrow M$ (I فاصله ای باز در $\mathbb{R}$)، یک خم انتگرال X نامیده می‌شود، در صورتیکه برای هر $t \in I$ داشته باشیم $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$. می‌گوییم خم انتگرال γ واجد شرط آغازی x است ($x \in M$) اگر $\circ \in I$ و $\gamma(\circ) = x$.

تعریف ۳ :

فرض کنید X یک میدان برداری C^∞ روی منیفلد M باشد. برای هر کارت (x,U) روی M، نمایش موضعی X نسبت به (x,U)، میدان برداری $x_* X$، یا به طور دقیق‌تر $x_*(X \mid U)$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(x_* X)(q) := x_{*_{x^{-1}(q)}} \circ X(\ x^{-1}(q)\ )$$

به طور معادل می‌توان نوشت:

$$x_* X = x_* \circ X \circ x^{-1}$$

در واقع دیاگرام زیر جابجایی است.

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{X} & TU \\ {\scriptstyle x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle x_*} \\ U' = x(U) & \xrightarrow[x_* X]{} & TU' \end{array}$$

تعریف ۴:

فرض کنید P و Q دو منیفلد C^∞، $h : P \longrightarrow Q$ یک دیفئومورفیسم C^∞ و X یک میدان برداری C^∞ روی P است. میدان برداری h_*X روی Q به صورت زیر تعریف می‌شود

$$h_*X := h_{*_{h^{-1}(q)}} \circ X \circ h^{-1}$$

نکته : شایان ذکر است، h_*X را به دو منظور به کار می‌بریم. یکی به مفهوم $h_* \circ X$ و دیگری میدان برداری ساخته شده از روی h و X.

قضیه ۱

فرض کنید P و Q دو منیفلد C^∞، $h : P \longrightarrow Q$ یک دیفئومورفیسم C^∞ و X یک میدان برداری C^∞ روی P باشند. در این صورت خم $\gamma : I \longrightarrow P$ یک خم انتگرال X است اگر و تنها اگر $h \circ \gamma : I \longrightarrow Q$ یک خم انتگرال h_*X باشد. در این حالت، برای هر $t \in I$ داریم

$$h_* \circ X(\ \gamma(t)\ )\ ) = h_*X(\ h(\ \gamma(t)\ )\ )$$

قضیه۲ (قضیه وجود و یگانگی)

فرض کنید M یک منیفلد و X یک میدان برداری C^∞ روی M باشند. در این صورت:

الف) برای هر $p \in M$ ، خم انتگرالی برای X با شرط آغازی p وجود دارد.

ب) برای هر $p \in M$ همسایگی بازی مانند V حول p و فاصله بازی مانند I در $\mathbb{R}$ وجود دارد بطوریکه برای هر $q \in V$، خم انتگرالی با قلمرو I و شرط آغازی q موجود است.

پ) اگر $\gamma_1 : I_1 \longrightarrow M$ و $\gamma_2 : I_2 \longrightarrow M$ دو خم انتگرال X با شرط آغازی p باشند، برای هر $t \in I_1 \cap I_2$، تساوی $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ برقرار است.

تعریف ۵ (شار موضعی وابسته به یک میدان برداری):

برای هر p ، کلیه خم‌های انتگرال $\gamma_\alpha : I_\alpha \longrightarrow M$ از میدان برداریِ هموارِ X، را در نظر می‌گیریم که واجد شرط اولیه‌ی p باشند. یعنی $\gamma_\alpha(\circ) = p$. اجتماع I_αها فاصله‌ای باز است که با $I_p = \rfloor \alpha_p, \omega_p \lfloor$ نمایش می‌دهیم و $\phi^p : I_p \longrightarrow M$ را به این صورت تعریف می‌کنیم:

اگر $t \in I_p$، وجود دارد α که $t \in I_\alpha$، آنگاه قرار می دهیم $\phi^p(t) = \gamma_\alpha(t)$.

$\phi^p : I_p \longrightarrow M$ را جواب ماکزیمال X با شرط آغازی p می‌نامیم. زیرا برای هر جواب $\gamma_\alpha : I_\alpha \longrightarrow M$ با شرط آغازی p، $I_\alpha \subset I_p$ و $\gamma_\alpha = \phi^p \Big| I_\alpha$. حال $\tilde{M} \subset \mathbb{R} \times M$ و $\phi : \tilde{M} \longrightarrow M$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{M} = \bigcup_{p \in M} I_p \times \{p\} \subset \mathbb{R} \times M$$

$$\begin{cases} \phi : \tilde{M} \longrightarrow M \\ \phi(t, p) = \phi^p(t) \end{cases}$$

از قسمت (ب) قضیه قبل نتیجه می‌شود که $\tilde{M}$ زیرمجموعه‌ای باز از $\mathbb{R} \times M$ است. نگاشت $\phi : \tilde{M} \longrightarrow M$ را شار موضعی وابسته به X می‌نامیم.

قضیه ۳:

فرض کنید P و Q دو منیفلد C^∞، $h : P \longrightarrow Q$ یک C^∞ دیفئومورفیسم و X و $Y = h_* X$ میدانهای برداری C^∞ متناظر روی P و Q باشند. اگر $\phi : \tilde{P} \longrightarrow P$ و $\psi : \tilde{Q} \longrightarrow Q$ شارهای موضعی X و Y باشند، نگاشت $\tilde{h} : \tilde{P} \longrightarrow \mathbb{R} \times Q$ که به صورت $\tilde{h}(t, p) = (t, h(p))$ تعریف می‌شود یک C^s دیفئومورفیسم میان $\tilde{P}$ و $\tilde{Q}$ است و

$$h \circ \phi = \psi \circ \tilde{h}$$

قرارداد: بجای هر یک از $\phi^p(t)$ یا $\phi(t, p)$ نماد $\phi_t(p)$ را نیز بکار می‌بریم. با این نماد قسمت آخر قضیه بالا به صورت زیر نوشته می‌شود. برای هر $t \in I_p$:

$$h \circ \phi_t = \psi_t \circ \tilde{h}$$

تعریف ۶ (میدان برداری کامل):

در حالتی که $\tilde{M}$ برابر $\mathbb{R} \times M$ باشد، (یعنی برای هر $p \in M$، $\alpha_p = -\infty$ و $\omega_p = +\infty$) X را یک میدان برداری کامل (تمام) می‌نامیم.

قضیه ۴

فرض کنید M یک منیفلد C^∞، X یک میدان برداری C^∞ روی M و ϕ شار موضعی X باشند. در این صورت:

الف) ϕ نگاشتی C^∞ است.

ب) $\phi_\circ = 1_M$.

پ) $\phi_S(\phi_t(p))$، $\phi_t(p)$ بدین مفهوم که هرگاه دو تا از $\phi_{S+t}(p) = \phi_S(\phi_t(p))$ و $\phi_{S+t}(p)$ تعریف شده باشند، سومی نیز تعریف شده است و تساوی برقرار است.

قضیه ۵

اگر ϕ_t در سراسر زیرمجموعه باز V از M تعریف شده باشد، آنگاه $\phi_t(V)$ نیز یک زیرمجموعه باز M است و ϕ_{-t} در سراسر $\phi_t(V)$ تعریف شده است و وارون $\phi_t|V$ است. اگر میدان برداری X یک میدان برداری C^∞ باشد، آنگاه $\phi_t|V$ یک C^∞ دیفئومورفیسم میان V و $\phi_t(V)$ است.

قضیه ۶

اگر X یک میدان برداری C^∞ کامل باشد، هر ϕ_t یک C^∞ دیفئومورفیسم روی M است.

تعریف ۷ (تعریف شار موضعی مستقل از میدان برداری):

فرض کنید M یک منیفلد و M' یک همسایگی باز $M\times\{\circ\}$ در منیفلد حاصلضربی $\mathbb{R}\times M$ باشند. نگاشت هموار $\psi : M' \longrightarrow M$ را یک شار موضعی C^∞ می‌نامیم در صورتیکه شرایط زیر برقرار باشند:

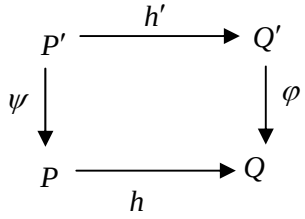
الف) M' " کوژ افقی " باشد. یعنی برای هر $p \in M$، $M' \cap (\mathbb{R}\times\{p\})$ همبند باشد و در نتیجه با یک فاصله باز در $\mathbb{R}$ همئومورف است.

ب) برای هر $p \in M$ ، $\psi(\circ, p) = p$.

پ) $\psi(s+t, p) = \psi(s, \psi(t, p))$. بدین معنی که هرگاه دو تا از (t, p)، $(s, \psi(t, p))$، و $(s+t, p)$ در M' باشند، آنگاه سومی نیز در M' است و تساوی برقرار می‌باشد.

قضیه ۷

فرض کنید P و Q دو منیفلد، $h: P \longrightarrow Q$ یک C^∞ -دیفئومورفیسم و $\psi: P' \longrightarrow P$ یک شار موضعی C^∞ باشند. در این صورت شار موضعی C^∞، $\phi: Q' \longrightarrow Q$ و دیفئومورفیسم C^∞، $h': P' \longrightarrow Q'$ وجود دارد بطوریکه $h \circ \psi = \phi \circ h'$. در این حالت دیاگرام زیر جابجائی خواهد بود:



قضیه ۸

فرض کنید M یک منیفلد و $\psi: M' \longrightarrow M$ یک شار موضعی C^∞ باشند. در این صورت میدان برداری $X(p) = (\psi^p)'(\circ)$ یک میدان برداری C^∞ است و اگر $\phi: \tilde{M} \longrightarrow M$ شار موضعی X باشد، آنگاه $M' \subset \tilde{M}$ و $\psi = \phi \,|\, M'$.

مثال ۱: U را زیرمجموعه‌ای باز از $\mathbb{R}^m$ در نظر می‌گیریم. اگر افکنشهای متعارفی روی محورهای مختصات را به $x_i : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$، $i = ۱,\ldots,m$ ، نمایش دهیم، میدانهای برداری

$$\frac{\partial}{\partial x_۱}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_m}$$

را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = (p, e_i) \in U \times \mathbb{R}^m \cong TU$$

که در آن $e_i = (\circ, \cdots, \circ, ۱, \circ, \cdots, \circ)$، i امین عنصر پایه استاندارد $\mathbb{R}^m$ است. خم‌های انتگرال این میدان برداری از معادله دیفرانسیل زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{cases} \dot{x}_۱ = \circ \\ \vdots \\ \dot{x}_i = ۱ \\ \vdots \\ \dot{x}_m = \circ \end{cases}$$

که جواب آن با شرط آغازی $p=(p_1,\cdots,p_m)$ به این صورت است:

$$\begin{cases} x_1 = p_1 \\ \vdots \\ x_i = p_i + t \\ \vdots \\ x_m = p_m \end{cases}$$

بدین ترتیب تصویر جواب با شرط آغازی p، خط راستی موازی i امین محور مختصات است که از نقطه p می‌گذرد.

مثال۲: توجه کنید که در مثال قبل، در هر نقطه $p\in U$، بردارهای $\frac{\partial}{\partial x_1}(p)\ ,\cdots,\frac{\partial}{\partial x_m}(p)$ تشکیل یک پایه برای T_pU می‌دهند. بدین ترتیب برای هر میدان برداری X روی U می‌توان نوشت $X(p)=\sum_{i=1}^{m}X_i(p)\frac{\partial}{\partial x_i}(p)$ که در آن $X_i:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}$، بنابراین خم‌های انتگرال میدان برداری X دارای معادله دیفرانسیل، به فرم زیر است.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = X_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_m = X_m \end{cases}$$

توجه کنید که X یک میدان برداری C^∞ است اگر و تنها اگر نگاشتهای X_i همه C^∞ باشند.

مثال ۳: U را زیرمجموعه‌ای باز از $\mathbb{R}^m$ در نظرمی‌گیریم و فرض می‌کنیم $f:U\longrightarrow\mathbb{R}$ یک نگاشت C^∞ است. در این صورت گرادیان (اقلیدسی) f، که به ∇f نمایش می‌دهیم، میدان برداری زیر است:

$$\nabla f(p)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\frac{\partial}{\partial x_i}(p)=(p,\frac{\partial f}{\partial x_1}(p),\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_m}(p))$$

در ریاضیات مقدماتی معمولا m مولفه آخر را مولفه‌های "گرادیان" می‌گیریم. در اینجا اگر $\pi\circ\nabla f:TU\cong U\times\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^m$ افکنش روی m مولفه آخر باشد، گرادیان به مفهوم کلاسیک است.

مثال ۴: فرض کنید $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ یک نگاشت C^∞ و c یک مقدار عادی f باشند بطوریکه $M = f^{-1}(c)$ تهی نیست. می‌دانیم که M یک منیفلد $(m-1)$-بُعدی C^∞ است. فرض کنید $g : M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ نگاشتی C^∞ باشد. می‌توان بررسی کرد که در چه شرایطی نگاشت زیر:

$$\begin{cases} X : M \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \cong T\mathbb{R}^m \\ X(p) = (p, g(p)) \end{cases}$$

یک میدان برداری (مماس) C^∞ روی M است. در واقع در هر نقطه $p \in M$ ، $X(p)$ در $T_p\mathbb{R}^m$ قرار دارد. سوال این است که تحت چه شرایطی $X(p)$ در زیرفضای $(m-1)$-بُعدی T_pM از $T_p\mathbb{R}^m$ واقع است. می‌دانیم که $T_pM = ker(f_{*_p})$. پس $\pi_M \circ X = 1_M$ معادل این است که $X(p) \in ker(T_p f)$ یعنی $f_* \circ X = 0$ یا $df \circ X = 0$. اگر g را به صورت

$$g(p) = (g_1(p), \cdots, g_m(p))$$

نمایش دهیم که به ازای $i = 1, \ldots, m$ ، $g_i : M \longrightarrow \mathbb{R}$ می‌باشند، عبارت فوق معادل است با

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot g_i(p) = 0$$

که با نمایش ضرب داخلی اقلیدوسی به $\langle \ | \ \rangle$، به صورت زیر درمی‌آید

$$\langle \ \pi \circ \nabla f(p) \big| g(p) \ \rangle = 0 \quad (*)$$

این ضابطه در واقع تعبیری مانوس دارد. چون گرادیان هموار به مجموعه‌های تراز عمود است، هر میدان برداری مماس بر مجموعه تراز باید بر گرادیان عمود باشد.

به عنوان نمونه، کُره $(2m-1)$-بُعدی را در نظر بگیرید که مجموعه تراز تابع زیر است.

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}^{2m} \longrightarrow \mathbb{R} \\ f(p) = \sum p_i^2 \end{cases}$$

میدان برداری X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. برای $p \in S^{2m-1}$ ،

$$X(p) = (p, (\ -p_2, p_1, \ -p_4, p_3, \cdots, \ -p_{2m}, p_{2m-1}\ ))$$

چون $(\pi \circ \nabla f)(p) = (2p_1, \cdots, 2p_{2m})$، می‌بینیم که $(*)$ برقرار است، پس میدان برداری X بر S^{2m-1} مماس است.

مثال ۵: (تعیین میدان برداری وابسته به یک شار موضعی)

مثالی از یک شار می‌آوریم و سپس میدان برداری مولد آن را محاسبه می‌کنیم.

$\phi : I\!R \times I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\phi(t,(x,y)) = (x\,Cost - y\,Sint\ ,\ x\,Sint + y\,Cost)$$

به بیان دیگر، ϕ_t دوران زیر است:

$$\begin{bmatrix} Cost & -Sint \\ Sint & Cost \end{bmatrix}$$

واضح است که ϕ هموار است و به سادگی تحقیق می‌شود که $\phi_\circ = 1_{I\!R^2}$ و $\phi_{t+s} = \phi_s \circ \phi_t$. برای محاسبه‌ی مولد ϕ داریم:

$$\phi^{(x,y)}(t) = (x\,Cost - y\,Sint\ ,\ x\,Sint + y\,Cost)$$

با مشتق‌گیری نسبت به t، و قرار دادن $t = \circ$ نتیجه می‌شود که

$$X(x,y) = ((x,y), -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y})$$

این میدان برداری یک "دوران بینهایت کوچک" یا "مولد بینهایت کوچک دوران های $I\!R^2$ " نامیده می‌شود.

قضیه ۹ (کلاسه‌بندی خم‌های انتگرال ماکزیمال یک میدان برداری کامل)

فرض کنید M یک منیفلد و X یک میدان برداری C^∞ کامل روی M با شار $\phi : I\!R \times M \longrightarrow M$ باشند. در این صورت برای $p \in M$، خم انتگرال ماکسیمال X با شرط آغازی p، $\phi^p : I\!R \longrightarrow M$، یکی از سه نوع زیر است:

الف) $\forall t \in I\!R \quad \phi^p(t) = p$، شرط لازم وکافی برای بروز این حالت این است که $X(p) = \circ$.

ب) کوچکترین عدد حقیقی و مثبت ω وجود دارد که برای هر q روی تصویر ϕ^p، و هر $t \in I\!R$، $\phi_{t+\omega}(q) = \phi_t(q)$. در این حالت تصویر ϕ^p یک زیرمنیفلد یک بُعدی M، و C^∞ دیفئومورف با S^1 است.

ج) $\phi^p : I\!R \longrightarrow M$ یک ایمرسیون یک به یک است.

قضیه ۱۰

فرض کنید M یک منیفلد و X یک میدان برداری C^∞ روی M با شار موضعی ϕ باشند. همچنین $p \in M$ و $r \in]\alpha_p, \omega_p[$. اگر $\phi^p]\alpha_p, r[$ (به ترتیب $\phi^p[r, \omega_p[$) در یک زیرمجموعه فشرده M قرار داشته باشد، آنگاه $\omega_p = +\infty$ (به ترتیب $\alpha_p = -\infty$).

قضیه ۱۱

اگر M یک منیفلد C^∞ فشرده باشد، هر میدان برداری روی M کامل است.

یادآوری می‌کنیم که اگر $x_i : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ افکنش روی مولفه iام باشد، آنگاه میدان برداری هموار $\frac{\partial}{\partial x_i}$ به صورت $\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = (p, e_i)$ تعریف می‌شود. مشابه این تعریف را می‌توان به طور موضعی در مورد یک منیفلد اظهار کرد.

تعریف ۸ (میدان‌های برداری استاندارد وابسته به یک کارت):

فرض کنید (ξ, U) کارتی روی منیفلد M باشد. $x_i \circ \xi$ را به ξ_i نمایش می‌دهیم. بنابراین

$$\xi(p) = (\xi_1(p), \cdots, \xi_m(p))$$

میدان‌های برداری $\frac{\partial}{\partial \xi_i}$ به این صورت تعریف می‌شوند:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} = (\xi^{-1})_* \frac{\partial}{\partial x_i}$$

یا به طور معادل:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i}(p) = (\xi^{-1})_*(\xi(p), e_i)$$

اگر X میدان برداری دلخواهی روی U باشد، می‌توان X را به صورت زیر نوشت:

$$X(p) = \sum u_i(p) \frac{\partial}{\partial \xi_i}(p)$$

که در اینجا به ازای $u_i : U \longrightarrow \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m$. شرط لازم وکافی برای هموار بودن X این است که u_i های مربوطه همه C^∞ باشند. ادعا می‌کنیم که در هر نقطه $p \in U$ ، m – تایی

مرتب $(d\xi_1(p),\cdots,d\xi_m(p))$ پایه‌ی دوگان برای $(T_pU)^*$ نسبت به پایه مرتب $(\frac{\partial}{\partial\xi_1}(p),\cdots,\frac{\partial}{\partial\xi_m}(p))$ برای T_pU است. طبق تعریف داریم $\frac{\partial}{\partial\xi_i}=(\xi^{-1})_*\ \frac{\partial}{\partial x_i}$.

نمایش موضعی $\frac{\partial}{\partial\xi_j}(\xi(p))$ نسبت به دستگاه مختصات (ξ,U) به صورت زیر است:

$$(\xi_{*_p})(\frac{\partial}{\partial\xi_j}(p))=(\xi_{*_p}\circ(\xi^{-1})_{*_{\xi(p)}}\circ\frac{\partial}{\partial x_j})(\xi(p))=\frac{\partial}{\partial x_j}(\xi(p))$$
$$=(\xi(p),e_j)$$

پس بنا بر تعریفِ دیفرانسیل تابع ξ_i داریم:

$$(d\xi_i)_p(\frac{\partial}{\partial\xi_j}(p))=((D(\xi_i\circ\xi^{-1}))(\xi(p))(e_j)=(Dx_i(\xi(p)))(e_j)=\delta_{ij}$$

قرارداد: هرگاه کارت (x,U) را روی منیفلد M در نظر بگیریم، میدان‌های برداری استاندارد وابسته به آن را با $\frac{\partial}{\partial x_i}$ نمایش می دهیم.

تعریف ۹ (ساختار $C^\infty(M,\mathbb{R})$–مدولی $\chi(M)$):

فرض کنید M یک منیفلد m–بُعدی است. مجموعه نگاشتهای حقیقیِ C^∞ روی M را با $C^\infty(M,\mathbb{R})$ و مجموعه میدان‌های برداری C^∞ روی M را با $\Gamma^\infty(M)$ یا $\chi(M)$ نمایش می‌دهیم. هر یک از این دو مجموعه تحت عمل جمع نگاشتها، یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ است. ضرب نگاشتها در $C^\infty(M,\mathbb{R})$، این مجموعه را به یک حلقه، یا در واقع یک $\mathbb{R}$–جبر تبدیل می‌کند. برای $X\in\Gamma^\infty(M)$ و $f\in C^\infty(M,\mathbb{R})$ ، میدان برداری fX به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\forall\, p\in M\qquad fX(p)=f(p)X(p)$$

بسادگی مشاهده می‌شود که $fX\in\Gamma^\infty(M)$. پس $\Gamma^\infty(M)$ در واقع یک مدول روی $C^\infty(M,\mathbb{R})$ است.

تعریف ۱۰ (اثر یک میدان برداری روی یک تابع حقیقی هموار):

برای میدان برداری دلخواه X و $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$، نگاشت $df(X)$ یا $X \cdot f$ از M به $\mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(X \cdot f)(a) = (df(X))(a) = df_a(X(a))$$

نکته: به تمایز $X \cdot f$ و $f X$ توجه داشته باشید.

نکته: اگر M یک زیرمجموعه باز $\mathbb{R}^m$ و $X = \frac{\partial}{\partial x_i}$ باشند، آنگاه رابطه آخر تعریف فوق به صورت زیر در می‌آید:

$$(\frac{\partial}{\partial x_i} \cdot f)(p) = df_p(\frac{\partial}{\partial x_i}(p)) = (Df(p))(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

که دلیل بکارگرفتن نماد $\frac{\partial}{\partial x_i}$ برای این میدان برداری است.

قضیه ۱۲

اگر $X \in \Gamma^\infty(M)$، آنگاه به ازای هر $f \in C^\infty(M)$، $X \cdot f$ نیز متعلق به $C^\infty(M)$ می‌باشد.

تعریف ۱۱ (اشتقاق وابسته به یک میدان برداری):

فرض کنید M یک منیفلد هموار و $X \in \Gamma^\infty(M)$ باشند. نگاشت D_X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} D_X : C^\infty(M, \mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ D_X(f) = X \cdot f \end{cases}$$

طبق قضیه قبل $X \cdot f$ متعلق به $C^\infty(M, \mathbb{R})$ است. بنابراین D_X خوش‌تعریف است.

قضیه ۱۳

فرض کنید M یک منیفلد هموار و $X \in \Gamma^\infty(M)$ باشند. D_X دارای این ویژگی‌ها می‌باشد:

الف) D_X نگاشتی $\mathbb{R}$ −خطی است.
ب) D_X لایپنیتزی است. یعنی برای $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ داریم

$$D_X(f \cdot g) = D_X f \cdot g + f \cdot D_X g$$

تعریف ۱۲ (اشتقاق های روی یک منیفلد):
فرض کنید M یک منیفلد هموار می‌باشد. هر نگاشت $D : C^\infty(M, \mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ که $\mathbb{R}$ −خطی و لایپنیتزی باشد را یک اشتقاق روی M می‌نامیم.

مثال ۶: برای هر میدان برداری هموار X ، D_X یک اشتقاق است.

قضیه ۱۴
فرض کنید M یک منیفلد هموار و D یک اشتقاق روی M باشند. در این صورت:
الف) اگر C نگاشت ثابت $C(x) = c$ $\forall x \in M$ باشد، آنگاه $D(C) = 0$.

ب) برای $p \in M$ و $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ، مقدار $(D(f))(p)$ تنها به مقدارهای f در یک همسایگی دلخواه نقطه p بستگی دارد.

تعریف ۱۳:
مجموعه اشتقاق‌های منیفلد هموارِ M را با $\Delta(M)$ نمایش می‌دهیم.
برای $D_1, D_2 \in \Delta(M)$ ، مجموع $D_1 + D_2$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(D_1 + D_2)(f) = D_1(f) + D_2(f)$$

و اگر $D \in \Delta(M)$ ، $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ آنگاه تعریف می‌کنیم:

$$(g \cdot D)(f) = g \cdot D(f)$$

قضیه ۱۵ (ساختار $C^\infty(M, \mathbb{R})$ −مدولی $\Delta(M)$)
مجموعه اشتقاق‌های یک منیفلد هموار M، یعنی $\Delta(M)$، با عمل‌های تعریف شده در بالا، یک مدول روی $C^\infty(M, \mathbb{R})$ است.

قضیه ۱۶

فـــرض کنـــیم $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ و $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$. در ایـــن صـــورت نگاشـــتهای $f_i \in C^{\infty}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ وجود دارند بطوریکه برای هر $x \in \mathbb{R}^m$ داریم:

$$f(x) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} (x_i - \bar{x}_i)\, f_i(x)$$

و $f_i(\bar{x}) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$.

قضیه ۱۷ (یکریختی $\Delta(M)$ و $\Gamma^{\infty}(M)$)

برای هر منیفلد هموار M، نگاشت $X \mapsto D_X$ یک ایزومورفیسم $C^{\infty}(M, \mathbb{R})$−مدولها از $\Gamma^{\infty}(M)$ به $\Delta(M)$ است.

قضیه ۱۸

فرض کنید X یک میدان برداری هموار روی منیفلد هموار M با شار موضـعی ϕ اسـت. در این صورت برای هر $f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ و هر $p \in M$ داریم:

$$(X \cdot f)(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\phi_h(p)) - f(p)}{h}$$

قضیه ۱۹

فرض کنید M یک منیفلد هموار و $D_1, D_2 \in \Delta(M)$ می‌باشند. در این صورت

$$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$$

یک اشتقاق است.

تعریف ۱۴ (ساختار جبرلی مجموعه ی میدان های برداری):

فرض کنید X_1 و X_2 دو میدان برداری هموار روی M باشند. در این صورت کروشه لـیِ آنها که با $[X_1, X_2]$ نمایش می دهیم، یگانه میدان برداری هموار روی M است که:

$$D_{[X_1, X_2]} = [D_{X_1}, D_{X_2}]$$

به طور معادل، می‌توان $[X_1, X_2]$ را بوسیله‌ی اثر آن روی عنصرهای $C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ مشخص کرد:

$$\forall f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R}) \quad [X_1, X_2] \cdot f = X_1 \cdot (X_2 \cdot f) - X_2 \cdot (X_1 \cdot f)$$

قضیه ۲۰

الف) $[\ ,\ ]$ نسبت به هر مولفه $\mathbb{R}$ − خطی است

ب) $[X,Y]=-[Y,X]$، و در نتیجه $[X,X]=0$.

ج) (اتحاد ژاکوبی) $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$.

د) برای هر $f\in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ ، داریم $[X,fY]=f[X,Y]+(X\cdot f)Y$.

ه) هرگاه $h:M\longrightarrow N$ یک دیفئومورفیسم هموار باشد، آنگاه

$$h_*[X,Y]=[h_*X,h_*Y]$$

قضیه ۲۱

فرض کنید M و N دو منیفلد هموار و $h:M\longrightarrow N$ یک دیفئومورفیسم هموار باشند. برای هر $X\in\Gamma^{\infty}(M)$ و $Y=h_*X$ و هر نگاشت $f\in C^{\infty}(N,\mathbb{R})$ داریم:

$$X\cdot(f\circ h)=(Y\cdot f)\circ h$$

قضیه ۲۲

فرض کنید M یک منیفلد هموار و X و Y دو میدان برداری هموار روی M می‌باشند. اگر شار موضعی X را به ϕ نمایش دهیم، دراینصورت داریم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{((\phi_{-h})_*Y)(p)-Y(p)}{h}=[X,Y](p)$$

نکته: اگر ϕ شار موضعی میدان برداری X و ψ شار موضعی $-X$ باشد، آنگاه $\psi_t=\phi_{-t}$، پس از $[X,Y]=-[Y,X]$ نتیجه می‌گیریم که:

$$[X,Y](p)=\lim_{h\to 0}\frac{Y(p)-((\phi_h)_*Y)(p)}{h}$$

قضیه ۲۳

فرض کنید M یک منیفلد هموار و X و Y دو میدان برداری هموار روی M با شارهای موضعی به ترتیب ϕ و ψ می‌باشد. در این صورت $[X,Y]\equiv 0$ اگر وتنها اگر برای هر $s,t\in\mathbb{R}$ که $\psi_s\circ\phi_t$ و $\phi_t\circ\psi_s$ تعریف شده باشند داشته باشیم $\psi_s\circ\phi_t=\phi_t\circ\psi_s$. (این حالت را به این صورت بیان می‌کنیم که X و Y نسبت به هم جابجا می‌شوند).

مثال ۷:

X و Y را دو میدان برداری در $\mathbb{R}^m$، با ضرایب ثابت می‌گیریم:

$$X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad Y = \sum b_i \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad a, b \in \mathbb{R}^m$$

اگر شارهای موضعی X و Y را به ترتیب با ϕ و ψ نمایش دهیم ، نتیجه می‌شود که:

$$\phi(t, p) = p + ta \qquad \psi(t, p) = p + tb$$

پس

$$(\psi_s \circ \phi_t)(p) = (\phi_t \circ \psi_s)(p) = p + ta + sb$$

و از قضیه فوق نتیجه می‌شود که $[X, Y] \equiv \circ$.

تعریف ۱۵(نمایش موضعی $[X, Y]$):

برای منیفلد $m-$بُعدی و هموار M، کارت (x, U) را در نظر گرفته، میدان‌های $\frac{\partial}{\partial x_i}$ مانند قبل در نظر می‌گیریم. اگر X و Y دو میدان برداری روی M باشند، تحدید آنها به U، به صورت زیر است:

$$X = \sum u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad Y = \sum v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad u_i, v_i \in C^\infty(U, \mathbb{R})$$

می‌نویسیم $[X, Y] = \sum \omega_i \frac{\partial}{\partial x_i}$، و ضریب $\omega_i \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ را محاسبه می‌کنیم. اگر دو طرف را بر نگاشت هموار x_j، اثر دهیم، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}\omega_j = [X, Y] \cdot x_j &= \left[\sum u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \ , \ \sum v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right] \cdot x_j \\ &= \left(\sum u_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \cdot \left(\sum u_i \frac{\partial x_j}{\partial x_i}\right) - \left(\sum v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \cdot \left(\sum u_i \frac{\partial x_j}{\partial x_i}\right) \\ &= \sum_i u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \sum_i v_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\end{aligned}$$

بنابراین این فرمول برای نمایش موضعیِ $[X, Y]$ بدست می‌آید:

$$[X, Y] = \sum_{i,j} \left(u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - v_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)$$

همچنان که از رابطه فوق مشهود است، مقدار $X(p)$ و $Y(p)$ به تنهائی تعیین کننده مقدار $[X,Y](p)$ نیستند، بلکه $[X,Y](p)$ به مقدارهای X و Y در یک همسایگی (به دلخواه کوچک) نقطه p نیز بستگی دارد.

تعریف ۱۶ (میدان های برداری ناوردای چپ و راست روی یک گروه لی):

فرض کنید G یک گروه لی است. میدان برداری X روی G ناوردای چپ (به ترتیب ناوردای راست) نامیده می‌شود، در صورتیکه

$$\forall a,g\in G \quad (L_a)_{*_g}\circ X(g)=X\circ L_a(g)$$

(به ترتیب $\forall a,g\in G \quad (R_a)_{*_g}\circ X(g)=X\circ R_a(g)$).

و یا بطور خلاصه $\forall a\in G \quad (L_a)_*X=X$ (به ترتیب $\forall a\in G \quad (R_a)_*X=X$).

در ادامه بررسی خود را به میدان‌های برداری ناوردای چپ محدود می‌کنیم، وضعیت میدان‌های برداری ناوردای راست مشابه است.

قضیه ۲۴

فرض کنید G یک گروه لی است. در این صورت مجموعه میدان‌های برداری ناوردای چپ روی G تشکیل یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ می‌دهد که تحت $X\mapsto X(e)$ با T_eG ایزومورف است.

نکته: مجموعه میداهای برداری ناوردای چپ روی G را با $\Gamma_l^{\infty}(G)$ نمایش می‌دهیم که بنا به قضیه قبل یک زیرفضای $\mathbb{R}$-خطی $\Gamma^{\infty}(G)$ است. همچنین $\Gamma_l^{\infty}(G)$ تحت عمل کروشه لی بسته است. زیرا

$$\forall a\in G \quad \forall X,Y\in\Gamma_l^{\infty}(G) \quad (L_a)_*[X,Y]=[(L_a)_*X,(L_a)_*Y]=[X,Y]$$

بنابراین اگر $X,Y\in\Gamma_l^{\infty}(G)$، آنگاه $[X,Y]\in\Gamma_l^{\infty}(G)$.

تعریف ۱۷ (جبرلی حقیقی):

فرض کنید V یک فضای برداری حقیقی و $(X,Y)\mapsto[X,Y]$ یک نگاشت از $V\times V$ به V باشند، بطوریکه شرایط زیر برقرار باشند:

الف) $[\ ,\ ]$ نسبت به هردو مولفه $\mathbb{R}$ – خطی باشد.

ب) برای هر $X\in V$ ، $[X,X]=0$.

ج) برای هر سه عنصر $X,Y,Z\in V$ ، اتحاد ژاکوبی برقرار باشد. یعنی

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$$

مثال ۸: $\Gamma^{\infty}(M)$، برای هر منیفلد هموار M، یک جبر لی حقیقی است.

مثال ۹: اگر G یک گروه لی باشد، آنگاه $\Gamma_l^{\infty}(G)$ یک جبر لی حقیقی است. (در واقع یک زیرجبر لی از $\Gamma^{\infty}(G)$ است).

تعریف ۱۸ (جبرلی وابسته به یک گروه لی):

$\Gamma_l^{\infty}(G)$ را جبر لی گروه لی G می‌نامیم که بنابه قضیه۲۴، با T_eG نیز یکریخت می‌باشد.

نکته: بُعد هرگروه لی با بُعد جبرلی آن برابر است.

مثال ۱۰: (جبرلی گروه لی $GL(n,\mathbb{R})$)

ازآنجاییکه $T_{I_n}GL(n,\mathbb{R})=M(n,\mathbb{R})$، بنابراین جبرلی $GL(n,\mathbb{R})$ یکریخت با $M(n,\mathbb{R})$ می‌باشد و کروشه لی آن عبارتست از:

$$\forall A,B\in M(n,\mathbb{R})\quad [A,B]=A\cdot B-B\cdot A$$

قضیه ۲۵

هر میدان برداری ناوردای چپ X روی یک گروه لی کامل است. بعلاوه اگر $a(t)$ خم انتگرال X با شرط آغازی $a(0)=e$ (e عضو خنثی در گروه) باشد، آنگاه:

الف) $a(t+s)=a(s)\cdot a(t)$.

ب) $R_{a(t)}(p)$ خم انتگرال X با شرط آغازی p است.

تعریف ۱۹(جبر لی آبلی):

یک جبر لی را که در آن برای هر دو عنصر X و Y داشته باشیم $[X,Y]=0$، یک جبر لی آبلی یا جابجایی می‌گوییم.

تعریف ۲۰ (میدان‌های برداری ناوردای یک عمل):

فرض کنید M یک منیفلد هموار و ϕ یک عمل چپ (راست) گروه لی G بر M باشد بطوریکه رابطه هم‌ارزی القا شده توسط ϕ یک زیرمنیفلد هموار و بسته $M\times M$ باشد. می‌دانیم $M/_{\sim}$ با توپولوژی خارج قسمتی به طور طبیعی به یک منیفلد هموار تبدیل می‌شود و افکنش $\pi: M\longrightarrow M/_{\sim}$، $p\mapsto [p]$ ، یک سوبمرسیون است. میدان برداری X روی M را $\phi-$ناوردا می‌نامیم در صورتیکه برای هر $g\in G$ داشته باشیم : $(\phi_g)_* X = X$.

حال فرض کنید X این چنین میدان برداری روی M باشد، $Y: M/_{\sim}\longrightarrow T(M/_{\sim})$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Y([p]) := (\pi_* \circ X)(p)$$

مثال۱۱: اگر گروه لی G بوسیله انتقال چپ (راست) روی خود عمل کند، میدانهای برداری ناوردای چپ (راست) همان میدان‌های ناوردا هستند.

قضیه ۲۶

فرض کنید M یک منیفلد هموار، G گروه لی و ϕ یک عمل G بر M باشند بطوریکه رابطه هم‌ارزیِ القا شده از آن یک زیرمنیفلد بسته $M\times M$ است. اگر X یک میدان برداری هموار و $\phi-$ناوردا روی M باشد، $Y([p])=(\pi_*\circ X)(p)$ یک میدان برداری هموار روی $M/_{\sim}$ تعریف می‌کند.

قضیه ۲۷

در قضیه قبل اگر $\gamma(t)$ یک خم انتگرال X باشد و $\lambda(t)=(\pi\circ\gamma)(t)$. آنگاه λ یک خم انتگرال Y است.

مثال ۱۲: H را یک زیرگروه بسته گروه لی G در نظر می‌گیریم و عمل راست H بر G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} G \times H \longrightarrow G \\ (\ g,h\ ) \mapsto g \cdot h \end{cases}$$

رده‌های هم‌ارزی این عمل، همدسته‌های چپ هستند و فضای خارج قسمتی، فضای همگن $\frac{G}{H}$ است. در این صورت اگر X یک میدان برداری ناوردای راست روی G باشد، آنگاه Y که در قبل تعریف شد، یک میدان برداری هموار روی $\frac{G}{H}$ است.