تعریف ۱ (تانسور هموردا مرتبه k ($k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) روی منیفلد M):
هر نگاشت

$$T : \underbrace{\chi(M) \times \cdots \times \chi(M)}_{k} \longrightarrow C^\infty(M)$$

که نسبت به تک تک مولفه‌هایش $C^\infty(M)$-خطی باشد را یک تانسور هموردا از مرتبه k روی M می‌نامیم. مجموعه تمام تانسورهای هموردا از مرتبه k روی M را با $\mathfrak{T}^k(M)$ نمایش می‌دهیم، که یک $C^\infty(M)$-مدول است.

قرارداد: $\mathfrak{T}^0(M) := C^\infty(M)$.

مثال ۱: $\mathfrak{T}^1(M) = Hom_{C^\infty(M)}(\chi(M), C^\infty(M))$ بنابراین $\mathfrak{T}^1(M) = \chi(M)^*$.

تعریف ۲ (حاصلضرب تانسوری):
به ازای هر $k,l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ نگاشت

$$\begin{cases} \mathfrak{T}^k(M) \times \mathfrak{T}^l(M) \longrightarrow \mathfrak{T}^{k+l}(M) \\ (T,S) \mapsto T \otimes S \end{cases}$$

با ضابطه $(T \otimes S)(X_1,\ldots,X_k,X_{k+1},\ldots,X_{k+l}) := T(X_1,\ldots,X_k)S(X_{k+1},\ldots,X_{k+l})$ را که در آن $X_i \in \chi(M)$ $i = 1,\ldots,k+l$، حاصلضرب تانسوری T در S می‌نامیم.

نکته: هرگاه $k = 0$ در این حالت حاصلضرب تانسوری همان ضرب اسکالر مدولی $C^\infty(M)$-مدول $\mathfrak{T}^l(M)$ خواهد بود.

نکته: ضرب تانسوری شرکت‌پذیر است.

تعریف ۳(پایه موضعی میدان‌های تانسوری از مرتبه k روی M):

(حالت $k=1$)

هرگاه $(U,(x^i))$ یک کارت M و $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ پایه موضعی برای میدان‌های برداری روی U باشند در این صورت پایه موضعی $\{dx^i\}$ با ضابطه $dx^i(\frac{\partial}{\partial x^j})=\delta^i_j$ یک پایه موضعی برای عناصر $\Im^1(M)$ روی U می‌باشد.

حالت ($k>1$)

مجموعه $\left\{dx^{i_1}\otimes dx^{i_2}\otimes\cdots\otimes dx^{i_k}\;\middle|\; 1\le i_1,i_2,\ldots,i_k\le dimM\right\}$ یک پایه موضعی برای $\Im^k(M)$ می‌باشد.

نکته : $\forall\ \ k\in I\!N\cup\{0\}\quad rank_{C^\infty(M)}\Im^k(M)=(dimM)^k$

نکته: هرگاه $T\in\Im^k(M)$ در این صورت بطور موضعی در دستگاه مختصات $(U,(x^i))$ برای منیفلد $n-$بُعدی M توابع $C^\infty(U)$، $T_{i_1,\cdots,i_k}\quad(1\le i_1,\cdots,i_k\le n)$ موجودند بطوریکه:

$$T=\sum_{1\le i_1,\cdots,i_k\le n}T_{i_1,\cdots,i_k}\,dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_k}$$

قضیه ۱

هرگاه $T\in\Im^k(M)$ در دو دستگاه مختصات $(U,(x^i))$ و $(V,(\tilde{x}^i))$ با شرط $U\cap V\neq\phi$، به ترتیب بصورت‌های زیر نمایش داده شود،

$$T=\sum T_{i_1\ldots i_k}\,dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_k}\quad\text{و}\quad T=\sum\tilde{T}_{j_1\ldots j_k}\,d\tilde{x}^{j_1}\otimes\cdots\otimes d\tilde{x}^{j_k}$$

آنگاه داریم:

$$\tilde{T}_{j_1\ldots j_k}=\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n}T_{i_1\ldots i_k}\,\frac{\partial x^{i_1}}{\partial\tilde{x}^{j_1}}\,\frac{\partial x^{i_2}}{\partial\tilde{x}^{j_2}}\cdots\cdots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial\tilde{x}^{j_k}}\quad(*)$$

نکته: اگر $\{T_{i_1 \dots i_k}\}_{i_1,\dots,i_k=1}^{n}$ خانواده‌ای از توابع $C^\infty(U)$ باشد که نسبت به دستگاه مختصات $(U,(x^i))$ نمایش داده شده‌اند، آنگاه این خانواده، مولفه‌های یک تانسور هموردا از مرتبه k در این دستگاه مختصات می‌باشند اگر و تنها اگر با تغییر دستگاه مختصات با قانون (*) به یکدیگر تبدیل شوند.

تعریف۴ (تانسور پادورد از مرتبه l روی M):

نگاشت

$$T:\underbrace{\chi(M)^*\times\cdots\times\chi(M)^*}_{l}\longrightarrow C^\infty(M)$$

که نسبت به تک تک مولفه‌هایش $C^\infty(M)-$خطی باشد را یک تانسور پادورد از مرتبه l روی M می‌نامیم. مجموعه تمام تانسورهای هموردا از مرتبه l روی M را با $\Im_l(M)$ نمایش می‌دهیم، که یک $C^\infty(M)-$مدول است.

نکته: هرگاه $T\in\Im_l(M)$ در این صورت بطور موضعی در دستگاه مختصات $(U,(x^i))$ برای منیفلد $n-$بُعدی M توابع $C^\infty(U)$، $T^{j_1,\cdots,j_k}$ $(1\le j_1,\cdots,j_k\le n)$ موجودند بطوریکه:

$$T=\sum_{1\le j_1,\cdots,j_l\le n} T^{j_1,\cdots,j_l}\ \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{j_l}}$$

قضیه ۲

هرگاه $T\in\Im_l(M)$ در دو دستگاه مختصات $(U,(x^i))$ و $(V,(\tilde{x}^i))$ با شرط $U\cap V\neq\phi$، به ترتیب بصورت‌های زیر نمایش داده شود،

$$T=\sum T^{j_1,\cdots,j_l}\ \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{j_l}}\ \text{و}\ \tilde{T}=\sum\tilde{T}^{j_1,\cdots,j_l}\ \frac{\partial}{\partial\tilde{x}^{j_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^{j_l}}$$

آنگاه داریم:

$$\tilde{T}^{j_1,\cdots,j_l}=\sum T^{i_1,\cdots,i_l}\ \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_l}}{\partial x^{i_l}}\quad (**)$$

نکته: اگر $\{T^{i_1\cdots i_k} \mid 1 \le i_1 \cdots i_k \le n\}$ خانواده‌ای از توابع $C^\infty(U)$ باشد که نسبت به دستگاه مختصات $(U,(x^i))$ نمایش داده شده‌اند، آنگاه این خانواده، مولفه‌های یک تانسور پادورد از مرتبه k در این دستگاه مختصات می‌باشند اگر و تنها اگر با تغییر دستگاه مختصات با قانون (**) به یکدیگر تبدیل شوند.

تعریف۵ (تانسور از نوع (k,l) روی M):

نگاشت $T : \underbrace{\chi(M)\times\cdots\times\chi(M)}_{k} \times \underbrace{\chi(M)^*\times\cdots\times\chi(M)^*}_{l} \longrightarrow C^\infty(M)$ که نسبت به تک تک مولفه‌هایش $C^\infty(M)-$خطی باشد را یک تانسور از نوع (k,l) روی M می‌نامیم. مجموعه تمام تانسورهای از نوع (k,l) روی M را با $\Im_l^k(M)$ نمایش می‌دهیم، که یک $C^\infty(M)-$مدول است.

نکته: هرگاه $T \in \Im_l^k(M)$ در این صورت بطور موضعی در دستگاه مختصات $(U,(x^i))$ برای منیفلد $n-$بُعدی M توابع $C^\infty(U)$،

$$(1 \le j_1,\cdots, j_k \le n\ ,\ 1 \le i_1,\cdots,i_k \le n) \quad T^{j_1,\cdots,j_k}{}_{i_1,\cdots,i_k}$$

موجودند بطوریکه:

$$T = \sum_{\substack{1\le j_1,\cdots,j_l\le n\\ 1\le i_1,\cdots,i_k\le n}} T^{j_1,\cdots,j_l}{}_{i_1,\cdots,i_k}\ \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{j_l}}\otimes dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_1 k}$$

نکته: از ترکیب قضیه ۱و قضیه ۲ حکمی مشابه برای اعضای $\Im_l^k(M)$ بدست می‌آید.

مثال۲: هرگاه $J = Sin\,x\ \frac{\partial}{\partial y}\otimes dx$ یک $(1,1)-$تانسور روی $\mathbb{R}^2$ باشد و $X = f_1\frac{\partial}{\partial x} + f_2\frac{\partial}{\partial y}$ و $w = h_1\,dx + h_2\,dy$ باشند، مطلوبست $J(X,w)$.

$$J(X,w) = Sin\,x\ \frac{\partial}{\partial y}\otimes dx(X,w) = Sin\,x\ dx(X)\,w(\frac{\partial}{\partial y}) = f_1 h_2\ Sin\,x$$

نکته: برای هر یک از انواع تانسورهای معرفی شده در بالا دو نوع تعریف ارایه کردیم. اولی برحسب نگاشتهای چند خطی و دومی برحسب توابع موضعی که تحت قانون خاصی به یکدیگر تبدیل می‌شوند . دیدگاه سومی نیز وجود دارد که از مفهوم کلاف‌برداری برای تعریف نمودن تانسورها بهره می‌برد. در جلد بعدی به این دیدگاه خواهیم پرداخت.

تعریف ۶ ($k-$ فرم دیفرانسیل روی منیفلد M):

$T \in \Im^k(M)$ را یک $k-$فرم می‌نامیم هرگاه

$$T(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(k)}) = sgn(\sigma)T(X_1,\ldots,X_k)$$
$$\forall X_1,\ldots,X_k \in \chi(M)\ ,\ \forall \sigma \in S_k$$

که در آن S_k مجموعه جایگشت‌های روی k عضو می‌باشد. مجموعه $k-$فرم‌های دیفرانسیل روی M را با نماد $\mathrm{A}^k(M)$ نمایش می‌دهیم، که یک $C^\infty(M)-$مدول است. درحالت $k = 0$ قرارمی‌دهیم :

$$\mathrm{A}^0(M) := C^\infty(M)$$

تعریف ۷ (نگاشت متناوب‌ساز):

نگاشت $\begin{cases} Alt : \Im^k(M) \longrightarrow \mathrm{A}^k(M) \\ T \mapsto Alt(T) \end{cases}$ با ضابطه

$$Alt(T)(X_1,\ldots,X_k) := \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k} sgn(\sigma)T(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(k)})$$

را نگاشت متناوب‌ساز می‌نامیم. هرگاه $w \in \mathrm{A}^k(M)$ باشد، داریم $Alt(w) = w$. بنابراین داریم:

$$Alt \circ Alt = Alt$$

تعریف ۸ (ضرب گُوِه‌ای):

به ازای هر $k,l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ نگاشت $\begin{cases} \mathrm{A}^k(M)\times\mathrm{A}^l(M) \longrightarrow \mathrm{A}^{k+l}(M) \\ (w,\eta) \mapsto w\wedge\eta \end{cases}$ با ضابطه

$$w\wedge\eta := \frac{(k+l)!}{k!\ l!}Alt(w\otimes\eta)$$

را ضرب گوه‌ای بین فرم‌های دیفرانسیل می‌نامیم.

نکته: هرگاه $k=0$ در این حالت ضرب گوه‌ای همان ضرب اسکالر مدولی $C^\infty(M)-$مدول $\mathrm{A}^l(M)$ خواهد بود.

نکته: ضرب گوه‌ای شرکت‌پذیر است.

نکته: $\forall w\in \mathrm{A}^k(M),\ \forall \eta\in \mathrm{A}^l(M) \quad w\wedge\eta=(-1)^{kl}\eta\wedge w$.

تعریف ۹ (پایه موضعی برای $k-$فرم‌های دیفرانسیل روی منیفلد M):

(حالت $k=1$)

از آنجائیکه $\mathrm{A}^1(M)=\Im^1(M)$ بنابراین پایه آن همان پایه $\Im^1(M)$ است.

(حالت $k>1$)

مجموعه

$$\left\{dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}\ \middle|\ 1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le dim(M)\right\}$$

یک پایه موضعی برای $\mathrm{A}^k(M)$ می‌باشد.

نکته : $\forall k\in \mathbb{N}\cup\{0\}\quad rank_{C^\infty(M)}\mathrm{A}^k(M)=\binom{n}{k}$.

تعریف ۱۰ (جبر خارجی یک منیفلد):

$\mathrm{A}(M)=\bigoplus_{k=0}^{dim(M)}\mathrm{A}^k(M)$ را جبر خارجی فرم‌های دیفرانسیل روی M می‌نامیم.

نکته: مفاهیم تانسورها و فرم‌های دیفرانسیل برای زیرمجموعه بازی از منیفلد نیز قابل تعریف است.

تعریف ۱۱ (مشتق‌های مدرج روی جبر خارجی $\mathrm{A}(M)$):

نگاشت IR −خطی $D:\mathrm{A}(M)\longrightarrow\mathrm{A}(M)$ را یک مشتق مدرج از درجه l روی $\mathrm{A}(M)$ می‌نامیم هرگاه $\forall k=0,\ldots,dimM$

1) $D(\mathrm{A}^k(M))\subseteq\mathrm{A}^{k+l}(M)$

۲) $D(w\wedge\eta)=D(w)\wedge\eta+(-1)^k w\wedge D(\eta)\quad\forall w\in\mathrm{A}^k(M)$

مثال۳: (مثالهایی از مشتق‌های مدرج)

فرض کنید $w\in\mathrm{A}^k(M)$ ،$X,\ X_0,\ldots,X_k\in\chi(M)$ و $f\in C^\infty(M,\ IR)$ دلخواه باشند.

الف) ***مشتق خارجی***:

$$(dw)(X_0,\ldots,X_k)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i X_i(\ w(X_0,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_k)\ )$$
$$+\sum_{0\le i<j\le k}(-1)^{i+j}w(\ [X_i,X_j]\ ,X_0,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_k)$$

که در آن $\hat{X}_i$ به معنای حذف این جمله می‌باشد. d یک مشتق مدرج از درجه یک روی $\mathrm{A}(M)$ می‌باشد که در شرط $d^2=0$ نیز صدق می‌کند.

ب)مشتق لی در امتداد یک میدان برداری:

$$\begin{cases}L_X(f)=X.f=df(X)\\(L_X w)(X_1,\ldots,X_k):=X.w(X_1,\ldots,X_k)\\\qquad\qquad -\sum_{i=1}^{k}w(X_1,\ldots,X_{i-1},[X,X_i],X_{i+1},\ldots,X_k)\end{cases}$$

L_X یک مشتق مدرج از درجه صفر روی $\mathrm{A}(M)$ می‌باشد.

ج) مشتق داخلی *در امتداد یک میدان برداری:*

$$\begin{cases}i_X(f)=0\\(i_X w)(X_1,\ldots,X_{k-1})=w(X,X_1,\ldots,X_{k-1})\end{cases}$$

i_X یک مشتق مدرج از درجه منفی یک روی $\mathrm{A}(M)$ می‌باشد.

قضیه ۲

هرگاه D یک مشتق مدرج روی $\mathrm{A}(M)$ باشد، آنگاه D بطور یکتا با مقادیرش روی $\mathrm{A}^{\circ}(M)$ و $\mathrm{A}^{1}(M)$ تعیین می‌گردد.

مثال ۴: فرض کنید X و Y دو میدان‌برداری روی منیفلد M باشند. قرار می‌دهیم :

$$D_{2} = i_{[X,Y]} \quad \text{و} \quad D_{1} = L_X \circ i_Y - i_Y \circ L_X$$

D_{1} و D_{2} دو مشتق مدرج روی $\mathrm{A}(M)$ می‌باشند. برای اثبات $D_{1} = D_{2}$، کافی است نشان دهیم این دو مشتق روی $\mathrm{A}^{\circ}(M)$ و $\mathrm{A}^{1}(M)$ باهم برابرند. اما

$$\forall f \in A^{\circ}(M) \quad D_{1}(f) = L_X \circ i_Y(f) - i_Y \circ L_X(f) = \circ = D_{2}(f)$$

و همچنین

$$\begin{aligned} \forall w \in A^{1}(M) \quad D_{1}(w) &= L_X \circ i_Y(w) - i_Y \circ L_X(w) \\ &= L_X(w(Y)) - L_X(w)(Y) \\ &= X(w(Y)) - X(w(Y)) + w([X,Y]) \\ &= w([X,Y]) = D_{2}(w) \end{aligned}$$

بنابراین $D_{1} = D_{2}$.

D_{1} را بصورت $[L_X, i_Y]$ نیز نمایش می‌دهند. بنابراین داریم :

$$[L_X, i_Y] = i_{[X,Y]}$$

قضیه ۳

فرض کنید X یک میدان‌برداری و به ازای $i = 1,2$، T_i تانسور روی منیفلد M باشند. دراینصورت داریم:

$$L_X(T_{1} \otimes T_{2}) = (L_X(T_{1})) \otimes T_{2} + T_{1} \otimes (L_X(T_{2}))$$

نکته: فرض کنید $U \subseteq \mathbb{R}^3$ زیر مجموعه‌ای باز باشد. جدول ۲ بعضی از مفاهیم آنالیز کلاسیک را بطور خلاصه بیان می کند:

$f \in C^\infty(U)$	$grad(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}$
$F = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y} + R\frac{\partial}{\partial z} \in \chi(U)$	$curl(F) = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\frac{\partial}{\partial x} + (\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial z})\frac{\partial}{\partial y} + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\frac{\partial}{\partial z}$
$G = A\frac{\partial}{\partial x} + B\frac{\partial}{\partial y} + C\frac{\partial}{\partial z} \in \chi(U)$	$div(G) = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}$

جدول ۲

جدول ۲ را با جدول ۳ مقایسه کنید:

$f \in A^\circ(U)$	$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$
$F = P\frac{\partial}{\partial x} + G\frac{\partial}{\partial y} R\frac{\partial}{\partial z} \in A^1(U)$	$d(F) = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dy \wedge dz + (\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial z})dz \wedge dx + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dx \wedge dy$
$G = Ady \wedge dz + Bdz \wedge dx + Cdx \wedge dy \in A^2(U)$	$d(G) = (\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z})dx \wedge dy \wedge dz$

جدول ۳

تناظر میان دو جدول۲و۳ نشان می‌هد که می‌توان $grad$، $curl$ و div را بر حسب ضرایب مشتق خارجی تعریف نمود. روابط $curl \circ grad = \circ$ و $div \circ curl = \circ$ حالتهای خاصی از $d \circ d = \circ$ می‌باشند.

تعریف ۱۲ (برگردانِ میدان‌های تانسوری):

هرگاه M و N دو منیفلد باشند و $f : M \xrightarrow{C^\infty} N$ باشد، در اینصورت تمامی میدان‌های تانسوری روی N را می‌توان توسط نگاشت f به روی M منتقل نمود. به این کار برگردانِ میدان‌های تانسوری می‌گوییم.

برگردانِ اعضای $\mathrm{A}^\circ(N) = C^\infty(N)$:

به ازای هر $g \in C^\infty(N)$ برگردانِ آن توسط نگاشت f به روی M را با $f^*(g)$ نمایش می‌دهیم و با ضابطه $f^*(g) = g \circ f$ تعریف می‌کنیم.

برگردانِ اعضای $\mathrm{A}^k(N)$:

فرض کنید $w \in \mathrm{A}^k(N)$ ، $X_\circ, \ldots, X_k \in \chi(M)$. برگردان w توسط نگاشت f به روی M را با $f^*(w)$ نمایش می‌دهیم و با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$f^*(w)(X_\circ, \ldots, X_k) = w(f_*(X_\circ), \ldots, f_*(X_k))$$

مثال ۵: فرض کنید (U, x) و (V, y) به ترتیب دو کارت برای منیفلدهای M و N باشند. هرگاه $w = \sum g_i dy^i$ باشد، آنگاه $f^*(w) = \sum \frac{\partial(y^i \circ f)}{\partial x^j} g_i dx^j$.

قضیه ۴ (فرمول کارتان)

به ازای هر میدان برداری $X \in \chi(M)$ داریم : $L_X = i_X \circ d + d \circ i_X$.

تعریف ۱۳ (فرم‌های دیفرانسیل بسته):

$w \in \mathrm{A}^k(M)$ را یک $k-$فرم بسته می‌نامیم، هرگاه $dw = \circ$. مجموعه تمام $k-$فرم‌های دیفرانسیل بسته را با نماد $Z^k(M)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۴ (فرم‌های دیفرانسیل کامل):

$w \in \mathrm{A}^k(M)$ را یک $k-$فرم کامل می‌نامیم، هرگاه وجود داشته باشد $\eta \in \mathrm{A}^{k-1}(M)$ بطوریکه $w = d\eta$. مجموعه تمام $k-$فرم‌های کامل را با نماد $\mathrm{B}^k(M)$ نمایش می‌دهیم.

نکته: با توجه به اینکه $d^{۲}=۰$، خواهیم داشت $\mathrm{B}^k(M)\subseteq Z^k(M)$.

تعریف ۱۵ (گروه‌های کوهومولوژی دُرام یک منیفلد):

فضای برداری خارج قسمتی $Z^k(M)\big/\mathrm{B}^k(M)$ را با نماد $\mathrm{H}^k(M)$ نمایش می‌دهیم و آنرا گروه کوهومولوژی دُرام مرتبه $k-$ام M می‌نامیم که درواقع یک فضای برداری حقیقی می‌باشد و $b_k := \dim(H^k(M))$ را $k-$اُمین عدد بتی M می‌نامیم.

مثال۶: (گروه های کوهومولوژی دُرام $\mathbb{R}^n$):

$$H^k(\mathbb{R}^n)\cong\begin{cases}\mathbb{R} & k=۰\\ ۰ & k>۰\end{cases}$$

بنابراین روی $\mathbb{R}^n$ هر $k-$فرم دیفرانسیل بسته، کامل نیز می‌باشد.

مثال۷: (گروه های کوهومولوژی دُرام S^n):

$$H^k(S^n)\cong\begin{cases}\mathbb{R} & k=۰,n\\ ۰ & ۰<k<n\end{cases}$$

قضیه ۵ (روابط و فرمول‌های مهمِ برگردان و مشتق خارجی، لی و داخلی):

فرض کنید $\varphi:M\longrightarrow N$ یک دیفئومورفیسم منیفلدها است. همچنین فرض کنید $X,Y\in\chi(M)$ و $Z\in\chi(N)$ و بعلاوه $f\in C^\infty(M)$ و $w\in A^k(M)$ باشند.

$$L_{fX}(w)=fL_X(w)+df\wedge i_X(w)$$
$$L_{[X,Y]}=L_X\circ L_Y-L_Y\circ L_X=[L_X,L_Y]$$

$[L_X, i_Y] = i_{[X,Y]}$

$L_X \circ d = d \circ L_X$

$L_X(Y) = [X, Y]$

$i_X \circ i_Y = -i_Y \circ i_X$

$\varphi^* \circ d = d \circ \varphi^*$

$\varphi^* \circ i_Z = i_X \circ \varphi^*$ هرگاه $Z = \varphi_* X$ باشد، آنگاه

$\varphi^* \circ L_Z = L_X \circ \varphi^*$ هرگاه $Z = \varphi_* X$ باشد، آنگاه