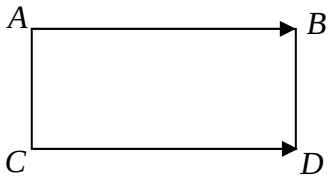
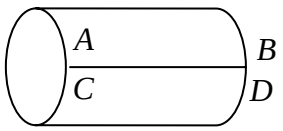
در دنیای معمولی خیلی از اشکال هندسی به طریقی از روی اشکال هندسی دیگر ساخته می شوند. یکی از این طُرق یکی کردن بعضی از نقاط یک فضا با یکدیگر است. به طور مثال اگر در مستطیل زیر ضلع AB را روی ضلع دیگر یعنی BC طوری قرار دهیم که A روی C و B روی D قرار گیرد



در اینصورت، شکل هندسی (استوانه) زیر به دست می آید.



یکی شدن نقاط ضلع AB با نقاط نظیر آن روی ضلع CD معادل، تعریف نمودن یک رابطه هم‌ارزی روی مجموعه نقاط مستطیل $ABCD$ می‌باشد. ما در این فصل به بررسی ساختمان توپولوژی و ساختمان مشتق‌پذیری اشکال هندسی جدید می‌پردازیم.

تعریف ۱ (فضای خارج قسمتی):

اگر X یک فضای توپولوژیک و $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی روی X باشد، مجموعه رده‌های هم‌ارزی را با $X/_{\sim}$ نمایش می‌دهیم و نگاشت $x \mapsto [x]$ که به هر نقطه، رده هم‌ارزی آن را نسبت می‌دهد به صورت $\pi : X \to X/_{\sim}$ نمایش می دهیم.

توپولوژی خارج قسمتی روی $X/_{\sim}$ به این صورت تعریف می‌شود:

مجموعه $U \subset X/_{\sim}$ باز نامیده خواهد شد اگر و تنها اگر $\pi^{-1}(U)$ در X باز باشد. به سادگی می‌توان تحقیق کرد که این یک توپولوژی روی $X/_{\sim}$ تعریف می‌کند. همچنین توپولوژی خارج قسمتی روی $X/_{\sim}$ بزرگترین توپولوژی برای $X/_{\sim}$ است که نسبت به آن π پیوسته می‌شود.

قضیه ۱

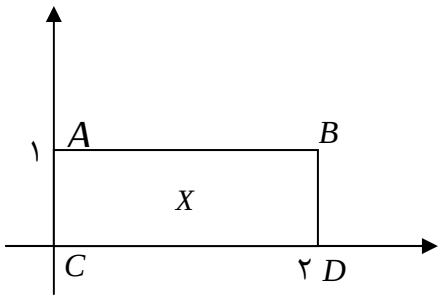
فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیک، و $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی روی X باشند. همچنین فرض کنید $X/_{\sim}$ به توپولوژی خارج قسمتی مجهز شده است. در این صورت:

الف) برای هر نگاشت $f : X/_{\sim} \longrightarrow Y$ ، f پیوسته است اگر و تنها اگر $f \circ \pi$ پیوسته باشد.

ب) برای هر نگاشت پیوسته $g : X \longrightarrow Y$ که روی هر رده هم‌ارزی $\sim$ ثابت باشد، نگاشت پیوسته یکتای $f : X/_{\sim} \longrightarrow Y$ وجود دارد بطوریکه $g = f \circ \pi$.

پ) هرگاه $\pi : X \longrightarrow X/_{\sim}$ باز و $\sim$ زیرمجموعه‌ای بسته از $X \times X$ باشد، آنگاه $X/_{\sim}$ با توپولوژی خارج قسمتی یک فضای هاسدورف است.

مثال ۱ : فرض کنید فضای توپولوژیک X، مجموعه نقاط روی مستطیل $ABCD$ و نقاط درون آن در صفحه xoy باشد.

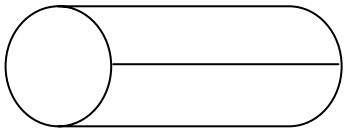


روی X توپولوژی القا شده از $\mathbb{R}^2$ را در نظر گرفته و روی X را به این صورت تعریف کنید:

$$X = \{ (x,y) \mid 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1 \}$$

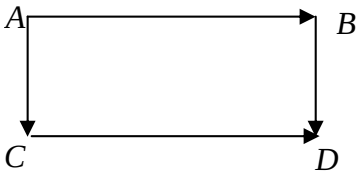
$$(x,y) \sim (x',y') \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x\ ,\ y' = y & if \quad y \neq 0 \quad or \quad y \neq 1 \\ x' = x\ ,\ y' = y+1 & if \quad y = 0 \\ x' = x\ ,\ y = y'+1 & if \quad y = 1 \end{cases}$$

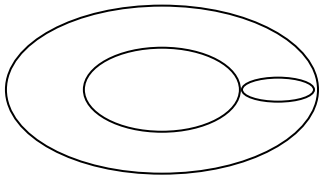
واضح است $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی X بوده و $X/_{\sim}$ یک استوانه است.



مثال ۲: (چنبره)

در مثال قبل در حالتی که علاوه بر یکی گرفتن ضلع AB با ضلع CD بصورت فوق، ضلع AC را با ضلع BD بصورت زیر یکی بگیریم، شکل فضای خارج‌قسمتی تبدیل به چنبره خواهد شد.





تعریف ۲ (عمل یک گروه روی یک مجموعه):

فرض کنید X یک مجموعه و G یک گروه باشند. نگاشت $\varphi : G \times X \longrightarrow X$ را یک عمل G بر X می‌نامیم اگر:

الف) برای عضو خنثی $e \in G$ و هر عضو $x \in X$: $\varphi(e,x) = x$

ب) برای عضوهای دلخواه g و h از G و هر عضو $x \in X$:

$$\varphi(g,\varphi(h,x)) = \varphi(g \cdot h, x)$$

تعریف ۳ (گروه تبدیلات یک مجموعه):

برای g ثابت در G، φ_g را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \varphi_g : X \longrightarrow X \\ \varphi_g(x) = \varphi \ \ (g,x) \end{cases}$$

φ_g وارون‌پذیر است و وارون آن $\varphi_{g^{-1}}$ می‌باشد. زیرا که $\varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}} = 1_X$. بدین ترتیب φ_gها، تحت ترکیب توابع، تشکیل یک زیرگروه از گروه نگاشتهای دوسویی روی X می‌دهند. از اینروست که سه‌تایی (φ, G, X) یک گروه تبدیلات X نیز خوانده می‌شود.

تعریف ۴ (مدار یک عضو تحت عمل گروه):

برای x ثابت در X، نگاشت φ^x را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \varphi^x : G \longrightarrow X \\ \varphi^x(g) = \varphi(g,x) \end{cases}$$

تصویر G تحت φ^x، یعنی $\varphi^x(G)$ را مدار x تحت عمل φ می‌نامیم و آن را با Gx نمایش می‌دهیم.

عمل φ روی X، به ترتیب زیر، یک رابطه هم‌ارزی روی X تعریف می‌کند:

$x \sim y$ اگر و تنها اگر $g \in G$ وجود داشته باشد بطوریکه $\varphi(g,x) = y$

مجموعه رده‌های هم‌ارزی را با X/φ نمایش می‌دهیم. مدار x تحت عمل φ همان رده هم‌ارزی x نسبت به رابطه هم‌ارزی $\sim$ است .

تعریف ۵ (عمل متعددی):

اگر عمل φ دارای تنها یک رده هم‌ارزی باشد، (یعنی برای هر دو عضو $x, y \in X$، بتوان $g \in G$ را یافت بطوریکه $\varphi(g,x) = y$) در اینصورت φ را متعددی (ترایا) می‌نامیم.

تعریف ۶ (گروه تبدیلات پیوسته) :

فرض کنید X یک فضای توپولوژیک، G گروه توپولوژیک و φ یک عمل G بر X باشند. اگر $\varphi : G \times X \longrightarrow X$ پیوسته باشد، سه‌تایی (φ, G, X) را یک گروه تبدیلات پیوسته X می‌نامیم.

قضیه ۲

فرض کنید $\varphi : G \times X \longrightarrow X$ یک عمل پیوسته و X/φ به توپولوژی خارج قسمتی مجهز شده است. در اینصورت:

الف) به ازای هر $g \in G$، φ_g یک همئومورفیسم X است.

ب) نگاشت $\pi : X \longrightarrow X/\varphi$ که به صورت $\pi(x) = Gx$ تعریف می‌شود، باز است.

مثال ۳: (فضای تصویری حقیقی $\mathbb{P}_m(\mathbb{R})$)

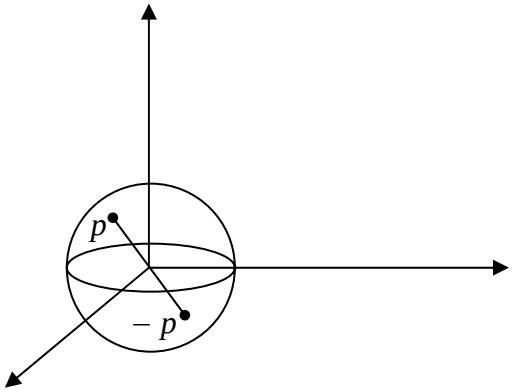
گروه دو عضوی $\mathbf{Z}_2$ را به صورت ضربی می‌نویسیم، یعنی $\mathbf{Z}_2 = \{1, -1\}$ با عمل ضرب.

عمل φ را روی S^m به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\begin{cases} \varphi : \mathbf{Z}_2 \times S^m \longrightarrow S^m \\ \varphi(g,x) = gx \end{cases}$$

بدین ترتیب برای $g=1$، gx نقطه x است و برای $g=-1$، gx نقطه متقاطر x روی کره واحد $m-$بُعدی است. مدار x از دو نقطه $\{x,-x\}$ تشکیل شده است. S^m را با توپولوژی متداول (القا شده از $\mathbb{R}^{m+1}$) و $\mathbf{Z}_2$ را با توپولوژی گسسته در نظر می‌گیریم. برای هر مجموعه باز U در S^m، $\varphi^{-1}(U)$ از دو مولفه $\{1\}\times U$ و $\{-1\}\times U$ در S^m تشکیل شده است که اجتماع آنها در $\mathbf{Z}_2\times S^m$ باز است. بدین ترتیب φ یک عمل پیوسته است. می‌توان نشان داد که S^m/φ با $\mathbb{P}_m(\mathbb{R})$ همئومورف است.

نکته: در مثال قبل دو نقطه واقع بر سر یک قطر در کره را یکی کرده‌ایم. به عنوان مثال در حالت S^2 داریم:

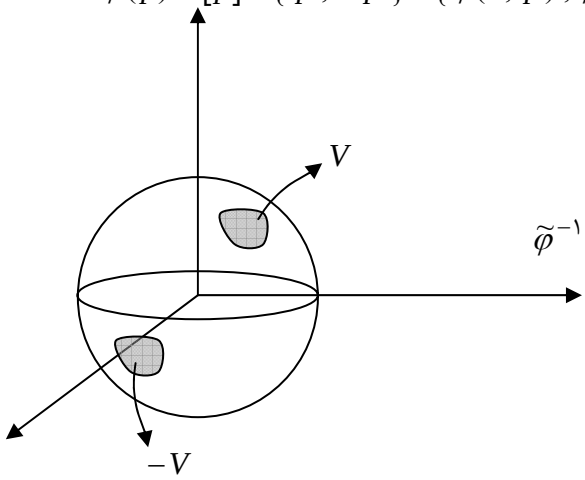


به عبارت دیگر برای $p\in S^2$، کلاس $[p]$ عبارت است از مجموعه $\{-p,p\}$.

زیرمجموعه $U\subset \mathbb{P}^2$ باز خواهد بود اگر و فقط اگر برای تابع $S^2 \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \mathbb{P}^2$ با ضابطه

$$\tilde{\varphi}(p)=[p]=\{p,-p\}=\{\varphi(1,p),\varphi(-1,p)\}$$

$\tilde{\varphi}^{-1}(U)$ در S^2 باز باشد.



$$\tilde{\varphi}^{-1}(U)=V\cup(-V)$$

حال $\mathbb{RP}^2$ را می‌سازیم. $\mathbb{RP}^2$ را به عنوان یک زیرمنیفلد $\mathbb{R}^4$ در نظر می‌گیریم. به تابع زیر توجه کنید.

$$\begin{cases} f : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ f(x,y,z) = (yz, xz, xy, x^2 + 2y^2 + 3z^2) \end{cases}$$

واضح است که $f(p) = f(-p)$ و $f(p) = f(q)$ نتیجه می‌دهد که $p = \pm q$. در نتیجه تابع $\widetilde{f} : \mathbb{RP}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ را می‌توان چنان یافت که $\widetilde{f}\,[p] = f(p)$. تابع $\widetilde{f}$ یک به یک بوده و ایمرسیون است و از آنجاکه $\mathbb{RP}^2$ فشرده است، $\widetilde{f}(\mathbb{RP}^2)$ با $\mathbb{RP}^2$ همئومورف می‌شود، بنابراین $\widetilde{f}(\mathbb{RP}^2)$ یک زیرمنیفلد C^∞ از $\mathbb{R}^4$ می‌باشد.

تعریف ۷ (فضای همگن):

G را یک گروه توپولوژیک و H را زیرگروهی بسته از G در نظر می‌گیریم. نشان می‌دهیم که G/H، مجموعه همدسته‌های چپ H در G، بنحوی طبیعی یک فضای توپولوژیک هاسدورف است. رابطه هم‌ارزی $\sim$ را روی G به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_1^{-1} g_2 \in H$$

رده‌های هم‌ارزی $\sim$ همدسته‌های چپ H در G هستند. پس $G/H = G/\sim$ را می‌توان به توپولوژی خارج‌قسمتی مجهز نمود. نشان می‌دهیم که $\pi : g \mapsto gH$ یک نگاشت باز است و $\sim$ زیرمجموعه‌ای بسته از $G \times G$ می‌باشد.

باز بودن π نیازی به بسته بودن H ندارد. فرض کنید $U \subset G$ زیرمجموعه‌ای باز باشد، باید ثابت کنیم $\pi^{-1}(\pi(U))$ در G باز است. ولی

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \pi^{-1}(\{\, uH \mid u \in U \,\}) = \bigcup_{u \in U} uH = UH$$

که باز است. حال نگاشت $p : G \times G \longrightarrow G$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$p(g_1, g_2) = g_1^{-1} g_2$$

از تعریف گروه توپولوژیک پیوستگی p نتیجه می‌شود. چون H بسته فرض شده است، $\sim = p^{-1}(H)$ در $G \times G$ بسته است. بدین ترتیب بنا به قضیه‌ای که در قبل آمده، G/H هاسدورف است. G/H با این توپولوژی یک فضای همگن نامیده می‌شود.

تعریف ۸ (پایاگر یک عضو):

گروه تبدیلات (φ, G, X) را در نظر بگیرید. برای هر عضو $x \in X$، پایاگر x را با G_x نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$G_x = \{ g \in G \mid gx = x \}$$

بسادگی تحقیق می‌شود که G_x یک زیرگروه G است.

نکته: به تمایز مدار $x \in X$، یعنی Gx و پایاگر آن، یعنی G_x توجه داشته باشید.

نگاشت $\tilde{\varphi}^x : G/G_x \longrightarrow X$ را نیز به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{\varphi}^x(g\,G_x) = gx$$

در تعریف $\tilde{\varphi}^x$ ابهامی نیست. زیرا اگر $g\,G_x = h\,G_x$، آنگاه $g^{-1}h \in G_x$ و

$$hx = \tilde{\varphi}^x(h\,G_x) = \tilde{\varphi}^x(gg^{-1}h\,G_x) = \tilde{\varphi}^x(g\,G_x) = gx$$

قضیه ۳

گروه تبدیلات (φ, G, X) را در نظر بگیرید. فرض کنید G_x و $\tilde{\varphi}^x$ به صورت فوق تعریف شده‌اند. در این صورت:

الف) $\tilde{\varphi}^x$ یک به یک است. بعلاوه اگر φ عملی متعددی باشد، $\tilde{\varphi}^x$ پوشا نیز می‌باشد.

ب) اگر (φ, G, X) گروه تبدیلات پیوسته باشد، $\tilde{\varphi}^x$ پیوسته است.

پ) در (ب) اگر X هاسدورف باشد، G_x یک زیرگروه بسته از G است.

ت) اگر در (ب) ، X هاسدورف، G فشرده و φ متعددی باشد، $\tilde{\varphi}^x$ یک همئومورفیسم است.

مثال۴: نشان می‌دهیم چنبره‌ی $m-$بعدی، T^m همئومورف با یک فضای همگن است. نقاط $S^1 \times \cdots \times S^1 = T^m$ را به صورت $(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_m})$، $\theta_i \in \mathbb{R}$، نمایش می‌دهیم و عمل φ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\varphi : \mathbb{R}^m \times T^m \longrightarrow T^m$$

$$\varphi(\ (t_1, \ldots, t_m), (e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_m})\ ) = (e^{i(t_1+\theta_1)}, \ldots, e^{i(t_m+\theta_m)})$$

پیوسته و متعددی بودن φ روشن است. پایاگر عضو $1 = (1, \ldots, 1) \in T^m$ را در نظر می‌گیریم:

$$\mathbb{R}^m_1 = \mathbb{Z}^m = \{ (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{R}^m \mid z_i \in \mathbb{Z} \}$$

$\widetilde{\varphi}^{1}$ پیوسته و وارون‌پذیر است. همئومورفیسم بودن $\widetilde{\varphi}^{1}$ از قضیه قبل نتیجه نمی‌شود: زیرا $\mathbb{R}^m$ فشرده نیست. این مطلب را مستقیما ثابت می‌کنیم. باید ثابت کنیم $\widetilde{\varphi}^{1}$ نگاشتی باز است. نگاشت خارج قسمتی $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$ را به π نمایش می‌دهیم ، کافی است نشان دهیم $\widetilde{\varphi}^{1} \circ \pi$ باز است.

$$(\widetilde{\varphi}^{1} \circ \pi)(t_1,\ldots,t_m) = (e^{i\theta_1},\ldots,e^{i\theta_m})$$

این نگاشت در واقع یک همئومورفیسم موضعی است. زیرا برای هر $j = 1,\ldots,m$ ، نگاشت $t_j \mapsto e^{i t_j}$ از $\mathbb{R}$ به S^1 یک همئومورفیسم موضعی (در واقع دیفئومورفیسم موضعی) است. بدین ترتیب همئومورفیسم $\widetilde{\varphi}^{1} : \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m \longrightarrow T^m$ میان T^m و یک فضای همگن ایجاد می‌شود.

مثال ۵: کُره S^{m-1} با فضای همگن $O(m)/O(m-1)$ همئومورف است.

مثال ۶: کُره S^{m-1} با فضای همگن $SO(m)/SO(m-1)$ همئومورف است.

مثال ۷: فضای تصویری حقیقی $\mathbb{P}_m(\mathbb{R})$ نیز یک فضای همگن است.

نکته : اگر M یک منیفلد C^∞ و $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی روی M باشند، به طور کلی نمی‌توان انتظار داشت که $M/\sim$ با توپولوژی خارج‌قسمتی حتی یک منیفلد توپولوژیک باشد. به عنوان مثال رابطه $\sim$ روی $\mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$x \sim y$ اگر و تنها اگر $|x| = |y|$. $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی است و بسادگی مشاهده می‌شود که $\mathbb{R}/\sim$ با $[0,\infty[$ همئومورف است ولی $[0,\infty[$ یک منیفلد توپولوژیک نیست. زیرا هیچ همسایگی صفر در $[0,\infty[$ نمی‌تواند با یک مجموعه باز فضای اقلیدسی همئومورف باشد.

تعریف ۹ (عمل گروه *Properly discontinues*):

اگر G یک گروه لی، M یک منیفلد C^∞ و $\varphi : G \times M \longrightarrow M$ عمل گروه لی G روی M باشند (یعنی φ، C^∞ است). در اینصورت گوییم عمل گروه *Properly discontinues* است اگر برای هر $p \in M$ یک باز U در M شامل p چنان وجود داشته باشد که $g.U \cap U = \phi$ برای هر $g \in G$ که در آن $g.U = \varphi(g,U)$.

قضیه ۴

اگر عمل $\varphi : G \times M \longrightarrow M$ $Properly\ \ discontinues$، باشد در این صورت M/φ دارای ساختمان C^∞ است و نگاشت تصویر $\pi : M \longrightarrow M/\varphi$ موضعاً دیفئومورفیسم است.

تعریف ۱۰ (برگ‌بندی):

فرض کنید M یک منیفلد m–بُعدی C^∞، $\{l_\alpha\}_{\alpha\in I}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های همبند M و k عددی صحیح $0 \le k \le m$ است. گوییم $\{l_\alpha\}_{\alpha\in I}$ یک برگ‌بندی $(m-k)$–بُعدی C^∞ از M است ، اگر شرط‌های زیر برقرار باشند:

الف) برای اندیس‌های متمایز، $\alpha \neq \beta$، $l_\alpha \cap l_\beta = \phi$.

ب) $\bigcup_{\alpha\in I} l_\alpha = M$

ج) برای هر نقطه M، مجموعه باز و همبند U حول آن نقطه و یک دیفئومورفیسم C^∞ مانند $\xi : U \longrightarrow \xi(U) \subset \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$ وجود دارد بطوریکه هر مولفه همبندی $l_\alpha \cap U$ به صورت $\xi^{-1}(\ (\{\alpha\} \times \mathbb{R}^{m-k}) \cap \xi(U)\ )$ است.

اگر بعلاوه، (U,ξ) را بتوان چنان اختیار کرد که هر $l_\alpha \cap U$ ناتهی و همبند باشد، $\{l_\alpha\}_{\alpha\in I}$ را یک برگ‌بندی منظم می‌گوییم. اگر $\{l_\alpha\}_{\alpha\in I}$ یک برگ‌بندی باشد، هر l_α را یک برگ این برگ‌بندی می‌نامیم.

نکته : گاهی اوقات بجای اصطلاح ، برگ‌بندی $(m-k)$–بُعدی، از اصطلاح برگ‌بندی به نقص بُعد k استفاده می‌شود.

قضیه ۵

فرض کنید M و N دو منیفلد C^∞ و $f : M \longrightarrow N$ نگاشتی C^∞ باشند بطوریکه f در هر نقطه M رتبه ثابت k را داراست. در این صورت مولفه‌های همبندی مجموعه‌های تراز f تشکیل یک برگ‌بندی منظم C^∞ به نقص بُعد k می‌دهند.

تعریف ۱۱ (رابطه‌ی هم‌ارزی C^∞):

فرض کنید M یک منیفلد C^∞ و $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی M است. $\sim$ را یک رابطه هم‌ارزی C^∞ می‌نامیم در صورتی که $\sim$ یک زیرمنیفلد C^∞ از $M \times M$ باشد.

قضیه۶

فرض کنید M یک منیفلد $m-$بُعدی C^∞ و $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی C^∞ روی M است. در این صورت هر رده هم‌ارزی $\sim$ یک زیرمنیفلد C^∞ از M است. بعلاوه مولفه‌های همبندی رده‌های هم‌ارزی تشکیل یک برگ‌بندی منظم C^∞ از M می‌دهند. اگر $\sim$ دارای بُعد $m+k$ باشد، $0 \leq k \leq m$، هر رده هم‌ارزی دارای بُعد k خواهد بود.

تعریف ۱۲ (عمل هموار):

فرض کنید M یک منیفلد C^∞ و G یک گروه لی باشند. عمل زیر را

$$\varphi : G \times M \longrightarrow M$$

C^∞ (هموار) می‌نامیم، در صورتیکه φ یک نگاشتِ C^∞ باشد.

قضیه ۷

فرض کنید $\varphi : G \times M \longrightarrow M$ یک عمل C^∞ گروه لی G بر منیفلد C^∞، M باشد. در این صورت:

الف) برای هر $g \in G$، φ_g یک دیفئومورفیسم C^∞ از M به M است.

ب) برای هر $x \in M$، φ^x یک نگاشت C^∞ از G به M است.

پ) برای هر $x \in M$، G_x یک زیرگروه لی بسته G است.

قضیه ۸

فرض کنید M یک منیفلد هموار و $\sim$ رابطه هم‌ارزی القا شده از یک عمل هموار $\varphi : G \times M \longrightarrow M$ باشند بعلاوه. فرض کنید $\sim$ یک زیرمنیفلد هموار و بسته $M \times M$ باشد. در این صورت $M/_\sim$ با توپولوژی خارج قسمتی دارای یک ساختمان C^∞ است که نسبت به آن:

الف) نگاشت خارج قسمتی $\pi : M \longrightarrow M/_{\sim}$ یک سوبمرسیون هموار است.

ب) اگر N یک منیفلد C^{∞} باشد، نگاشت $f : M/_{\sim} \longrightarrow N$ هموار است اگر و تنها اگر $f \circ \pi$ هموار باشد.

پ) اگر N یک منیفلد هموار و $g : M \longrightarrow N$ یک نگاشت هموار که روی رده‌های هم‌ارزی ثابت است، باشد آنگاه نگاشت هموار یکتای $f : M/_{\sim} \longrightarrow N$ وجود دارد که $f \circ \pi = g$.

ت) در (ب) ، f یک سوبمرسیون (دارای رتبه ثابت) است اگر و تنها اگر $f \circ \pi$ یک سوبمرسیون (دارای رتبه ثابت) باشد.

نکته: قضیه فوق در حالتی بیان شد که $\sim$ از عمل یک گروه القا می‌شود. در حالتی که تنها فرض شود $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی C^{∞} است که در $M \times M$ بسته است، $M/_{\sim}$ به یک منیفلد C^{∞} تبدیل نخواهد شد، حتی اگر فرض باز بودن $\pi : M \longrightarrow M/_{\sim}$ اضافه شود. به عنوان مثال فرض کنید $M = \mathbb{R}$ و $x \sim y$ اگر و تنها اگر $y = x$ یا $y = -x^{-1}$. این رابطه یک رابطه هم‌ارزی است. می‌توان تحقیق کرد که $\sim$ یک زیرمنیفلد بسته و C^{∞} از $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ است ولی منیفلد بودن $\mathbb{R}/_{\sim}$ در هر همسایگی $[\circ]$ نقض می‌شود.

قضیه ۹

فرض کنید G یک گروه لی و H یک زیرگروه لی بسته از G باشند. در این صورت $G/_H$ یک منیفلد هموار با بُعد $(dimG - dimH)$ است.

قضیه ۱۰

فرض کنید G یک گروه لی و $\varphi : G \times M \longrightarrow M$ یک عمل هموار G بر منیفلد M باشند. همچنین x نقطه‌ای دلخواه در M باشد. در این صورت:

الف) $\widetilde{\varphi}^{x}$ یک ایمرسیون هموار و یک به یک است.

ب) اگر بعلاوه φ متعددی باشد، $\widetilde{\varphi}^{x}$ یک دیفئومورفیسم هموار میان $G/_{G_x}$ و M است.