در این فصل هدف عمده ما معرفی دسته‌ای از منیفلدهاست که در عین حال گروه نیز می‌باشند، و یا ارتباط نزدیکی با یک گروه دارند.

تعریف ۱ (گروه توپولوژیک):

فرض کنید G یک فضای توپولوژیک و یک گروه است. G را یک گروه توپولوژیک می‌نامیم در صورتیکه هر دو نگاشت زیر پیوسته باشند.

$$\begin{cases} \mu : G \times G \longrightarrow G \\ \mu(g_1, g_2) = g_1 \cdot g_2 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} \iota : G \longrightarrow G \\ \iota(g) = g^{-1} \end{cases}$$

در اینجا عمل گروه را با ضرب نمایش داده‌ایم.

تعریف ۲ (انتقال چپ):

برای هر عضو $a \in G$، انتقال چپ بوسیله a، با L_a نمایش داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} L_a : G \longrightarrow G \\ L_a(g) = a \cdot g \end{cases}$$

تعریف ۳ (انتقال راست):

برای هر عضو $a \in G$، انتقال راست بوسیله a، با R_a نمایش داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} R_a : G \longrightarrow G \\ R_a(g) = g \cdot a \end{cases}$$

قضیه ۱

فرض کنید G یک گروه توپولوژیک است.

الف) برای هر $a \in G$، L_a و R_a همئومورفیسم هستند.

ب) اگر S زیرمجموعه باز (به ترتیب بسته) از G باشد ، مجموعه‌های $a \cdot S$، $S \cdot a$ و S^{-1} هر سه باز (به ترتیب بسته) هستند.

ج) اگر S زیرمجموعه دلخواهی از G و U زیرمجموعه‌ای باز باشد ، آنگاه $U \cdot S$ و $S \cdot U$ باز هستند.

قضیه ۲

فرض کنید G و G' دو گروه توپولوژیک و $\alpha : G \longrightarrow G'$ یک هومومورفیسم گروهی باشند. اگر α در یک نقطه پیوسته باشد، همه جا پیوسته است.

نکته: اگر G یک گروه توپولوژیک باشد، هر زیرگروه آن نیز با توپولوژی القا شده به یک گروه توپولوژیک تبدیل می‌شود. زیرا تحدید μ و ι پیوسته هستند.

تعریف ۴ (مؤلفه همبندی):

مقصود از مولفه همبندی گذرنده از نقطه p در فضای توپولوژیک X، اجتماع همه زیرمجموعه‌های همبند X است که p را شامل می‌شوند. مولفه همبندی خود یک زیرمجموعه همبند است و نسبت به خاصیت همبندی ماکسیمال است.

قضیه ۳:

در هر گروه توپولوژیک، مولفه همبندیِ عضو خنثی، یک زیرگروه نرمال و بسته است.

مثال ۱: گروههای $(\mathbb{C},+)$، $(\mathbb{R},+)$ و $(Q,+)$ با توپولوژی متداول گروههای توپولوژیک هستند. زیرا که اگر (p_n) و (q_n) دو دنباله در هر یک از این گروهها باشند، بطوریکه $p_n \to p$ و $q_n \to q$ آنگاه $(p_n + q_n)$ و $(-p_n)$ به $p+q$ و $-p$ میل می‌کنند.

مثال ۲: گروههای ضربی $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{\circ\}$، $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{\circ\}$ ، $Q^* = Q - \{\circ\}$ ، $\mathbb{R}^*_+ = \{ p \in \mathbb{R} \mid p > \circ \}$ و $Q^*_+ = Q^* \cap \mathbb{R}^*_+$ همه گروههای توپولوژیک هستند. زیرا اگر (p_n) و (q_n) دو دنباله در هر یک از این گروهها باشند، بطوریکه $p_n \to p$ و $q_n \to q$ آنگاه: $p_n q_n \to pq$ و بعلاوه اگر $p_n \neq \circ$ آنگاه $p_n^{-1} \to p^{-1}$.

مثال ۳: هر فضای برداری نُرمدار $(E, \| \|)$ روی $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ تحت عمل جمع یک گروه توپولوژیک است. زیرا که $p_n \to p$ و $q_n \to q$ نتیجه می‌دهند که:

$$p_n + q_n \to p + q \quad \text{و} \quad -p_n \to -p$$

به عنوان مثالِ مهمی در این زمینه، $(E_1, \|\ \|_1)$ و $(E_2, \|\ \|_2)$ را دو فضای برداری نرمدار، هر دو روی $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$، بگیرید. مجموعه نگاشتهای خطی از E_1 به E_2 تشکیل یک فضای برداری تحت عمل جمع تابعی می‌دهند. می‌دانیم که این فضا تحتِ نُرم:

$$f \in L\ (E_1, E_2)\ \ \|f\| = \sup_{\|p\|_1=1} \|f(p)\|_2$$

به یک فضای برداری نرمدار تبدیل می شود که با توضیح فوق یک گروه توپولوژیک است.

در حالت $E_1 = E_2 = \mathbb{R}^n$، با ساختمانهای جبری و توپولوژیک متداول، می‌توان اعضای $L(E_1, E_2)$ را نسبت به پایه متعارفی $\mathbb{R}^n$، با ماتریسهای حقیقی $n \times n$ نمایش داد. مجموعه این ماتریسها را با نماد $M(n, \mathbb{R})$ و یا $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ نمایش می‌دهیم.

نکته : همین نکات را می‌توان در حالت مختلط تکرار کرد و مجموعه ماتریسهای مختلط $n \times n$ بدست آورد که آنرا با نماد $M(n, \mathbb{C})$ و یا $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵ (گروههای کلاسیک حقیقی):

الف) مجموعه نگاشتهای خطی وارون‌پذیر $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ را با $GL(n, \mathbb{R})$ نمایش می‌دهیم. $GL(n, \mathbb{R})$ زیرمجموعه $M(n, \mathbb{R})$ متشکل از ماتریسهائی است که دترمینان ناصفر دارند، و تحت عمل ترکیب نگاشتها (ضرب ماتریسی) به یک گروه تبدیل می‌شود و بعلاوه یک گروه توپولوژیک نیز می‌باشد. $GL(n, \mathbb{R})$ ***گروه خطی عام*** نامیده می‌شود.

ب) زیرگروه $GL(n, \mathbb{R})$ متشکل از ماتریسهای با دترمینان یک را ***گروه خطی خاص*** می‌نامیم و با نماد $SL(n, \mathbb{R})$ نمایش می‌دهیم. یعنی:

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$$

ج) زیرگروه $GL(n, \mathbb{R})$ متشکل از ماتریسهای متعامد ($A^t = A^{-1}$) را ***گروه متعامد*** می‌نامیم و با $O(n)$ نمایش می‌دهیم. یعنی:

$$O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A \cdot A^t = I_n\}.$$

د) زیرگروه $GL(n, \mathbb{R})$ متشکل از ماتریسهای متعامد با دترمینان ۱+ را ***گروه متعامد خاص*** می‌نامیم و با $SO(n)$ نمایش می‌دهیم. یعنی:

$$SO(n) = SL(n) \cap O(n)$$

تعریف ۶ (گروههای کلاسیک مختلط):

الف) با جایگزین کردن $\mathbb{C}$ بجای $\mathbb{R}$ در $GL(n,\mathbb{R})$، ***گروه خطی عام مختلط*** $GL(n,\mathbb{C})$، بدست می‌آید که متشکل از ماتریسهای $n\times n$ مختلط وارون‌پذیر است. معروفترین زیرگروههای $GL(n,\mathbb{C})$ به شرح زیر است:

ب) زیرگروه $GL(n,\mathbb{C})$ متشکل از ماتریسهای با دترمینان یک را ***گروه خطی خاص مختلط*** می‌نامیم و با نماد $SL(n,\mathbb{C})$ نمایش می‌دهیم. یعنی:

$$SL(n,\mathbb{C})=\{A\in GL(n,\mathbb{C})\mid \det(A)=1\}$$

ج) زیرگروه $GL(n,\mathbb{C})$ متشکل از ماتریسهای متعامد ($A^{*}=A^{-1}$) را ***گروه یکانی*** می‌نامیم و با نماد $U(n)$ نمایش می‌دهیم که در آن $A^{*}=\overline{A}^{t}$ می باشد. یعنی:

$$U(n)=\{A\in GL(n,\mathbb{C})\mid A\cdot A^{*}=I_n\}$$

به بیان دیگر $A\in U(n)$ اگروتنها اگر برای هر $u,v\in\mathbb{C}^n$ داشته باشیم:

$$<Au,Av>=<u,v>$$

که در اینجا $<\ ,\ >$ ضرب هرمیتی کانونیک $\mathbb{C}^n$ است. یعنی بـرای $u=\sum u_i e_i$ و $v=\sum v_i e_i$، $<u,v>=\sum u_i\overline{v}_i$. برای $A\in U(n)$ داریم $A^{-1}=\overline{A}^{t}$، درنتیجه $|det\,A|=1$.

د) زیرگروه $GL(n,\mathbb{C})$ متشکل از ماتریسهای متعامد با دترمینان ۱ را ***گروه یکانی خاص*** می‌نامیم و با $SU(n)$ نمایش می‌دهیم. یعنی:

$$SU(n)=U(n)\cap SL(n,\mathbb{C})$$

قضیه ۴

گروههای $U(n)$، $SU(n)$ و $SO(n)$ همبند راهی هستند.

قضیه ۵ (قضیه تجزیه قطبی)

الف) هر عنصر $A\in GL(n,\mathbb{R})$ را می‌توان به صورت $P\cdot T$ نوشت که در آن $T\in O(n)$ و P متقارن، مثبت و معین است.

ب) هر عنصر $B\in GL(n,\mathbb{C})$ را می‌توان به صورت $P\cdot T$ نوشت که در آن $T\in U(n)$ و P هرمیتی، مثبت و معین است.

قضیه ۶

$GL(n, \mathbb{R})$ دارای دو مولفه همبندی است و $GL(n,\mathbb{C})$ همبند است.

قضیه ۷

$SL(n, \mathbb{R})$ و $SL(n,\mathbb{C})$ همبند راهی هستند.

تعریف ۷ (گروه لی)

فرض کنید G یک منیفلد C^∞ و یک گروه است. G را یک گروه لی می‌نامیم، اگر نگاشتهای زیر C^∞ باشند :

$$\begin{cases} \mu : G\times G \longrightarrow G \\ \mu(g_1, g_2) = g_1 \cdot g_2 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} \iota : G \longrightarrow G \\ \iota(g) = g^{-1} \end{cases}$$

مثال۴: $(\mathbb{C},+)$ و $(\mathbb{R},+)$ گروههای لی هستند زیرا که دو عمل $\mu(z,z') = z+z'$ و $\iota(z) = -z$ هر دو خطی و در نتیجه C^∞ هستند.

مثال۵: $(Q,+)$ با توپولوژی گسسته، یک گروه لی صفر بُعدی می‌باشد. در واقع هر گروه G، با توپولوژی گسسته، یک گروه لی صفر بُعدی است.

مثال۶: چون نگاشتهای $(z,z') \mapsto z\cdot z'$ و $z \mapsto z^{-1}$ $(z \neq 0)$ هر دو C^∞ هستند، نتیجه می‌شود که $(C^*, \cdot)$، $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ و $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ گروههای لی با بُعدهای به ترتیب ۲، ۱و ۱ هستند

مثال ۷: اگر $(E, \|\ \|)$ یک فضای برداری نُرمدار با بُعد متناهی باشد (روی $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$)، از C^∞ بودن اعمال $(z,z') \mapsto z+z'$ و $z \mapsto -z$، گروه لی بودن E نتیجه می‌شود. در حالت خاص، $M(n, \mathbb{R})$ و $M(n,\mathbb{C})$ گروههای لی با بُعدهایِ حقیقیِ به ترتیب، n^2 و $2n^2$ هستند.

قضیه ۸

فرض کنید G یک گروه لی است. برای هر $a \in G$، نگاشتهای L_a و R_a دیفئومورفیسم‌های C^∞ هستند.

تعریف ۸ (زیرگروه لی):

فرض کنید G یک گروه لی و H زیرمجموعه‌ای از Gباشند. H را در صورتی یک زیرگروه لی از G می‌نامیم که شرطهای زیر برقرار باشند:

الف) H یک زیرگروه Gباشد.

ب) H دارای یک ساختمان C^{∞} باشد بطوریکه نسبت به آن یک گروه لی است.

پ) نگاشت جزئیت $\iota : H \to G$ یک ایمرسیون یک به یک باشد.

قضیه ۹(قضیه کارتان)

هر زیرگروه بسته از یک گروه لی، یک زیرگروه لی است.

قضیه ۱۰

فرض کنید G یک گروه لی است. اگر زیرمجموعه H از G یک زیرگروه و یک زیرمنیفلد آن باشد، آنگاه یک زیرگروه لی نیز هست.

قضیه ۱۱

فرض کنید G یک گروه لی و H یک زیرگروه آن باشند. اگر مجموعه باز U حول عضو خنثی در G وجود داشته باشد که $U \cap H$ یک زیرمنیفلد G باشد، آنگاه H زیرمنیفلد G است.

قضیه ۱۲

$SL(n, \mathbb{R})$ یک گروه لی با بُعد $(n^{۲} - ۱)$ می‌باشد.

قضیه ۱۳

$O(n)$ و $SO(n)$ گروههای لی با بُعد $\frac{۱}{۲}n(n-۱)$ می‌باشند.

قضیه ۱۴

گروههای $O(n)$ و $SO(n)$ فشرده می‌باشند.