تعریف۱ (زیر منیفلد):

فرض کنید (M,A) یک منیفلد $m-$بُعدی C^∞ و N زیرمجموعه‌ای از M باشند. می‌گوییم N یک زیرمنیفلد $n-$بُعدی از M است، اگر برای هر نقطه $p\in N$، کارتی مانند (x,U) در A وجود داشته باشد بطوریکه $N\cap U=\varphi^{-1}(\mathbb{R}^n_m)$ که در آن:

$$\mathbb{R}^n_m=\left\{(p_1,\dots,p_m)\in\mathbb{R}^m \;\middle|\; p_{n+1}=\cdots=p_m=0\right\}\quad n\le m$$

مثال ۱: فرض کنید (M,A) یک منیفلد $m-$بُعدی C^∞ و N زیرمجموعه‌ای باز از M باشند. اگر (x,U) یک کارت M باشد، از آنجاکه $V=U\cap N$ نیز در N باز است، $(V,\varphi\,|\,V)$ یک کارت برای N خواهد شد. بنابراین هر زیرمجموعه بازِ یک منیفلد، زیرمنیفلد همبُعد با آن است.

مثال۲: S^m یک زیرمنیفلد C^∞ از $\mathbb{R}^{m+1}$ است.

مثال۳: مجموعه اعداد گویا، Q، با توپولوژی القاء شده از $\mathbb{R}$، زیرمنیفلد $\mathbb{R}$ نیست زیرا که توپولوژی القاء شده بر Q توپولوژی گسسته نیست و Q نمی‌تواند به یک منیفلد صفر بُعدی تبدیل شود.

تعریف ۲ (رتبه یک نگاشت دیفرانسیل‌پذیر):

اگر M و N دو منیفلد C^∞ و $f:M\longrightarrow N$ نگاشتی C^∞ باشند، آنگاه برای هر $p\in M$ نگاشت خطی زیر بدست می‌آید:

$$f_{*p}:T_pM\longrightarrow T_{f(p)}N$$

که نقش مشتق را دارد. پس رتبه f_{*p} معنی دارد و رتبه نگاشت f در نقطه p نامیده می‌شود.

قضیه ۱ (قضیه رتبه)

فرض کنید U زیرمجموعه بازی از $\mathbb{R}^m$ و $f:U\longrightarrow\mathbb{R}^n$ نگاشتی C^∞ باشند بطوریکه برای هر $u\in U$، $Df(u)$ رتبه k دارد. آنگاه برای هر $\bar{u}\in U$، می‌توان بازهای V و W، و دیفئومورفیسم‌های C^∞، $x:V\longrightarrow V'$ (V' باز در $\mathbb{R}^m$) و $y:W\longrightarrow W'$

(W' باز در $\mathbb{R}^n$) یافت بطوریکه $\bar{u} \in V \subset U$ ، $f(\bar{u}) \in W \subset \mathbb{R}^n$ و $x(\bar{u}) = 0$، $y(f(\bar{u})) = 0$، و برای هر $(z_1,\ldots,z_m) \in V'$ داشته باشیم:

$$(y \circ f \circ x^{-1})(z_1,\ldots,z_m) = (z_1,\ldots,z_k,0,\ldots,0)$$

قضیه ۲

فرض کنید P و Q دو منیفلد C^∞ و $f : P \longrightarrow Q$ یک دیفئومورفیسم C^∞ باشند. در اینصورت زیرمجموعه S از P یک زیرمنیفلد C^∞ است اگر و تنها اگر $f(S)$ یک زیرمنیفلد C^∞ از Q باشد.

قضیه ۳

فرض کنید U زیرمجموعه بازی از $\mathbb{R}^m$ و $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ نگاشتی C^∞ باشند. بطوریکه برای هر $u \in U$، $Df(u)$ رتبه k دارد. در اینصورت برای هر $c \in f(U)$، $f^{-1}(c)$ یک زیرمنیفلد $(m-k)$-بُعدی C^∞ از U است.

مثال ۴: نگاشت $f : \mathbb{R}^{m+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(p) = \sum_{i=1}^{m+1} p_i^2$ تعریف می‌کنیم. با محاسبه مشتق خواهیم داشت $Df(p) = [2p_1,\ldots,2p_n]$. می‌بینیم که $Df(p)$ در سراسر $\mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$ رتبه ثابت یک دارد. پس $S^m = f^{-1}(1)$ یک زیرمنیفلد m-بُعدی C^∞ از $\mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$ است. چون $\mathbb{R}^{m+1} - \{0\}$ خود در $\mathbb{R}^{m+1}$ باز است، S^m یک زیرمنیفلد C^∞ از $\mathbb{R}^{m+1}$ نیز است.

قضیه ۴

فرض کنید M و N دو منیفلد C^∞ با بُعدهای به ترتیب m و n و $g : M \longrightarrow N$ نگاشتی C^∞ باشند بطوریکه در هر نقطه M رتبه k دارد. در اینصورت برای هر $c \in g(N)$، $g^{-1}(c)$ یک زیرمنیفلد $(m-k)$-بُعدی C^∞ از M است.

تعریف ۳ (نقاط عادی و بحرانی یک تابع C^∞):

اگر $f : M \longrightarrow N$ یک نگاشت C^∞ باشد، نقطه $p \in M$ یک نقطه عادی (به ترتیب نقطه بحرانی) نگاشت f نامیده می‌شود در صورتیکه رتبه f_{*_p} برابر $dim\, N = n$ (به ترتیب کوچکتر از $dim\, N = n$) باشد.

چون رتبه نگاشت خطی f_{*_p} نمی‌تواند از هیچیک از $dim(T_X M)$ و $dim(T_{f(x)}N)$ تجاوز کند، بنابراین حالت $dim\, N = n < rank(f_{*_p})$ هرگز ممکن نیست. درنتیجه برای موجود بودن یک نقطه عادی لازم است که $dim\, N \leq dim\, M$.

تعریف ۴ (مقدار عادی یک تابع):

نقطه $q \in N$ را یک مقدار عادی f می‌نامیم اگر برای هر $p \in f^{-1}(q)$، p یک نقطه عادی باشد. در حالت $f^{-1}(q) = \phi$، q را یک مقدار عادی قلمداد می‌کنیم.

قضیه ۵

فرض کنید M و N دو منیفلد C^∞، با بُعدهای به ترتیب m و n باشند. قرار می‌دهیم $k = min\{m,n\}$. برای هر نگاشت $f : M \longrightarrow N$ ،C^∞ مجموعه نقاطی که در آن f رتبه k دارد، یک زیرمجموعه باز M است. (تهی نیز ممکن است).

قضیه۶ (قضیه مقدار عادی)

فرض کنید M و N دو منیفلد C^∞، با بُعدهای به ترتیب m و n، و $g : M \longrightarrow N$ نگاشتی C^∞ است. برای هر مقدار عادی $q \in N$ که $g^{-1}(q)$ تهی نباشد، $g^{-1}(c)$ یک زیرمنیفلد C^∞ از M است. $(m-n)$-بُعدی

تعریف ۵ (نقص بعد):

هرگاه S یک زیرمنیفلد s-بُعدی از منیفلد m-بُعدی M باشد، اختلاف بُعد آنها یعنی $(m-s)$ را نقص بُعد S در M می‌نامند.

تعریف ۶ (تابع ایمرسیون دریک نقطه):

فرض کنید M و N دو منیفلد C^∞، با بُعدهای به ترتیب m و n و $f : M \longrightarrow N$ نگاشتی C^∞ باشند. f را یک ایمرسیون در نقطه p می‌نامیم، درصورتیکه f_{*p} یک‌به‌یک باشد. در این حالت $rank(f_{*p}) = m$ خواهد بود.

تعریف ۷ (تابع سوبمرسیون در یک نقطه):

M و N دو منیفلد C^∞، با بُعدهای به ترتیب m و n و $f : M \longrightarrow N$ نگاشتی C^∞ است. f را یک سوبمرسیون در نقطه p می‌نامیم درصورتیکه f_{*p} پوشا باشد. در این حالت $rank(f_{*p}) = n$ خواهد بود.

برای اینکه f یک ایمرسیون (به ترتیب سوبمرسیون) در نقطه p باشد، لازم است که $m \le n$ (به ترتیب $n \le m$). همچنین توجه کنید که سوبمرسیون بودن f در نقطه p معادل با این است که p یک نقطه عادی f باشد.

قضیه ۷

فرض کنید M و N دو منیفلد C^∞، با بُعدهای به ترتیب m و n و $f : M \longrightarrow N$ نگاشتی C^∞ باشند. اگر f در نقطه p یک ایمرسیون (به ترتیب سوبمرسیون) باشد، کارتهای (x,U) حول p و (y,V) حول $f(p)$ می‌توان یافت بطوریکه برای هر $(q_1,\dots,q_m) \in x(U)$:

$$y \circ f \circ x^{-1}(q_1,\dots,q_m) = (q_1,\dots,q_m,\underbrace{0,\dots,0}_{n-m})$$

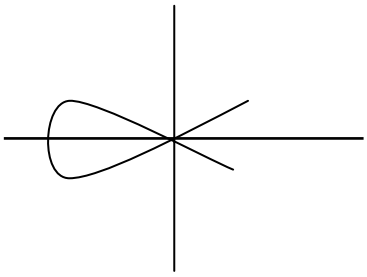
(به ترتیب $y \circ f \circ x^{-1}(q_1,\dots,q_n,\dots,q_m) = (q_1,\dots,q_n)$).

تعریف ۸ (تابع ایمرسیون و سوبمرسیون):

اگر $f : M \longrightarrow N$ در هر نقطه M یک ایمرسیون (به ترتیب سوبمرسیون) باشد، f یک ایمرسیون (به ترتیب سوبمرسیون) نامیده می‌شود.

مثال ۵: فرض کنید M یک منیفلد $m-$بُعدی C^∞ و U زیرمجموعه‌ای باز از M باشند. نگاشت جزئیت $i:U\longrightarrow M$ هم ایمرسیون و هم سوبمرسیون است. زیراکه برای هر $p\in U$ ، i_{*p} نگاشت همانی است. این مثال نشان می‌دهدکه یک سوبمرسیون لازم نیست پوشا باشد، گرچه مشتق آن در هر نقطه پوشا است.

مثال ۶: نگاشت $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:



$$f(t)=(t^2-1,t^3-t)$$

مشتق این نگاشت به شکل ماتریس ژاکوبین به صورت زیر است:

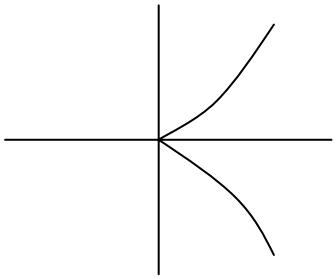
$$Df(t)=\begin{bmatrix}2t\\3t^2-1\end{bmatrix}$$

بنابراین f در هر $t\in\mathbb{R}$، رتبه یک دارد. پس f یک ایمرسیون است.

توجه کنید که $f(1)=f(-1)=0$ ، یعنی f یک‌به‌یک نیست. این مثال نشان می‌دهد که یک ایمرسیون لازم نیست یک‌به‌یک باشد، اگرچه مشتق آن در هر نقطه چنین است.

تصویر هندسی f در $\mathbb{R}^2$ با حذف پارامتر t در $x=t^2-1$ و $y=t^3-t$ بدست می‌آید که $x^2+x^3-y^2=0$.

مثال ۷: نگاشت $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :



$$f(t)=(t^2,t^3)$$

مشتق این نگاشت برای $t=0$ رتبه صفر دارد پس f در $t=0$ ایمرسیون نیست.

تصویر هندسی f در $\mathbb{R}^2$ ، خم $y^2=x^3$ است.

نکته: مثال بالا ممکن است این احساس را پدید آورده باشد که ایمرسیون بودن یک ویژگی کاملاً هندسی است، یعنی از بررسی هندسی $f(M)$ ، برای $f:M\longrightarrow N$ ، قابل تشخیص است. مثال زیر نشان خواهد دادکه شناخت $f(M)$ برای تحقیق کردن برقراری این ویژگی کافی نیست.

مثال ۸: $\mathbb{R}\times\{\circ\}$ را در $\mathbb{R}^{۲}$ در نظر می‌گیریم که تصویر هر یک از دو، نگاشت C^{∞} زیر است :

$$f:\ \mathbb{R}\longrightarrow \mathbb{R}^{۲}\quad f(t)=(t,\circ)$$
$$g:\ \mathbb{R}\longrightarrow \mathbb{R}^{۲}\quad g(t)=(t^{۳},\circ)$$

در اینجا f یک ایمرسیون است ولی g در $t=\circ$ ایمرسیون نیست.

مثال۹: θ را یک عدد ناگویای ثابت می‌گیریم. با دامنه منیفلد صفر بُعدی $\mathbb{N}=\{\ ۱,۲,۳,\dots\ \}$، گاشت $f:\ \mathbb{N}\longrightarrow S^{۱}$ را به صورت زیرتعریف می‌کنیم:

$$f(n)=(\ Cos\,۲\pi n\theta,\ Sin\,۲\pi n\theta\ )$$

از آنجا که $\{n\}$ یک همسایگی باز n در $\mathbb{N}$ است و $f\,|\,\{n\}$ ثابت می‌باشد، C^{∞} بودن f نتیجه می‌شود. همچنین توجه کنید که رتبه f در هر نقطه صفر است و f یک ایمرسیون می‌باشد. نکته جالب در این مثال این است که به سبب ناگویا بودن θ، $f(\mathbb{N})$ در $S^{۱}$ چگال است.

قضیه ۸

فرض کنید M و N دو منیفلد C^{∞} با بُعدهای به ترتیب m و n، و $g:M\longrightarrow N$ یک سوبمرسیون C^{∞} باشند. در این صورت برای هر زیرمنیفلد S از N با نقص بُعد k، $g^{-۱}(S)$ یک زیرمنیفلد C^{∞} از M با نقص بُعد k است.

تعریف ۹ (خم عادی):

اگر I یک فاصله باز در $\mathbb{R}$ و M یک منیفلد C^{∞} باشد، هر ایمرسیون C^{∞} مانند:

$$\alpha:I\longrightarrow M$$

را یک خم عادی می‌نامیم. چون I یک منیفلد یک بُعدی است، شرط ایمرسیون بودن معادل این است که برای هر $t\in I$، α_{*_t} ناصفر باشد.

تعریف ۱۰ (نگاشت اِمبدینگ):

ایمرسیون C^{∞} و یک به یک، $f:M\longrightarrow N$ ، میان دو منیفلد C^{∞}، را یک اِمبدینگ می‌نامیم، در صورتی که f یک همئومورفیسم میان M و $f(M)$ ، با توپولوژی القاء شده از N باشد. در این حالت می‌گوئیم M در N نشانده می‌شود.

قضیه ۹

فرض کنید N یک منیفلد C^∞ و S زیرمجموعه‌ای از N باشد. S یک زیرمنیفلد C^∞ از N است اگروتنهااگر S تصویر یک اِمبدینگ باشد.

قضیه ۱۰

هر ایمرسیونِ یک به یک با قلمرو فشرده، یک اِمبدینگ است.