می‌دانیم اگر $U \subseteq \mathbb{R}^m$ باز و $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ در x مشتق‌پذیر باشند، آنگاه نگاشت زیر:

$$Df(x) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

یک نگاشت خطی است. هدف این فصل معرفی فضاهای برداری مناسب برای ارائه تعریف مشتق روی یک منیفلد است. به سه روشِ ساختن این فضاهای برداری مذکور اشاره می‌شود که بر اساس هر یک از آن‌ها می‌توان مشتق تابع دیفرانسیل‌پذیر در یک نقطه را تعریف نمود. اما می‌توان دید که این سه روش در واقع با هم معادل و یکی می‌باشند.

روش اول:

تعریف ۱ (جِرم نگاشت‌های حقیقی دیفرانسیل‌پذیر):

فرض کنید M یک منیفلد و $p \in M$ باشند. مجموعه تمام توابع حقیقی C^∞ که در یک همسایگی p تعریف شده است را در نظر می‌گیریم، سپس یک رابطه هم‌ارزی روی این مجموعه به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

اگر f و g دو عضو دلخواه این مجموعه باشند که به ترتیب در همسایگی‌های U و V از p تعریف شده باشند، می‌گوییم f با g هم‌ارز است، هرگاه همسایگی $W \subseteq U \cap V$ چنان موجود باشد بطوریکه $f|_W = g|_W$. مجموعه کلاس‌های هم‌ارزی این رابطه‌ی هم‌ارزی را جِرم نگاشتهای حقیقی دیفرانسیل‌پذیر در p می‌نامیم و آنرا با نماد $C^\infty(p)$ نمایش می‌دهیم که به طور طبیعی دارای ساختار $\mathbb{R}$ – جبر می‌باشد.

تعریف ۲ (فضای مماس بر M در نقطه p ، T_pM):

فرض کنید M یک منیفلد و $p \in M$ باشند. $C^\infty(p)$ عبارتست از جِرم نگاشتهای حقیقی دیفرانسیل‌پذیر در نقطه p ، مقصود از یک بردار مماس بر M در p عبارتست از یک نگاشت $\mathbb{R}$ – خطی $X_p : C^\infty(p) \longrightarrow \mathbb{R}$ که دارای خاصیت لایپنیتزی باشد. یعنی:

$$\forall f, g \in C^\infty(p) \quad X_p(fg) = f(p)\ X_p(g) + g(p)\ X_p(f)$$

فضای مماس بر M در نقطه p عبارتست از همه بردارهای مماس تعریف شده در بالا که آنرا با T_pM نمایش می‌دهیم. T_pM دارای ساختار طبیعی فضای برداری حقیقی است:

$$\forall X_p, Y_p \in T_pM \qquad (X_p + Y_p)(f) = X_p(f) + Y_p(f)$$
$$\forall X_p \in T_pM, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda\ X_p)(f) = \lambda\ X_p(f)$$

قضیه ۱

اگر $dimM = m$ در اینصورت $T_pM \cong \mathbb{R}^m$ (ایزومورفیسم فضاهای برداری).

تعریف ۳ (مشتق نگاشت دیفرانسیل‌پذیر در یک نقطه):

فرض کنید $f : M \longrightarrow N$ دیفرانسیل‌پذیر باشد. مشتق f در نقطه $p \in M$ عبارتست از نگاشت خطی $f_{*_p} : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ که برای هر $[g] \in C^\infty(f(p))$ داشته باشیم:

$$(f_{*_p})(X_p)([g]) := X_p([g \circ f|_U])$$

که $g : V \longrightarrow \mathbb{R}$ و $V \subseteq N$ باز است. چون f پیوسته است (چرا؟)، زیرمجموعه باز U حول p وجود دارد بطوریکه $f(U) \subseteq V$. می توان دید f_{*_p} خوش‌تعریف و خطی است.

روش دوم :

تعریف ۴ (مماس بودن دو نگاشت روی $\mathbb{R}^n$):

فرض کنید $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (U باز) دو نگاشت باشند. گوییم f و g در $p_\circ \in U$ بر هم مماسند، هرگاه :

$$\lim_{p \to p_\circ} \frac{\| f(p) - g(p) \|}{\| p - p_\circ \|} = \circ$$

که در آن نُرم‌های بالا، نُرم‌های اقلیدسی استاندارد روی $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^m$ می‌باشند.

تعریف ۵ (فضای مماس بر M در نقطه p ، T_pM):

فرض کنید M یک منیفلد، $C_i : I_i \longrightarrow M$ دو خم هموار $(i = ۱,۲)$، I_iها باز و $\circ \in I_i \subseteq \mathbb{R}$ باشند. می‌گوییم $C_۱$ و $C_۲$ در $p \in M$ بر هم مماسند، اگر $p = C_۱(\circ) = C_۲(\circ)$ و برای یک کارت (معادلاً هر کارت) (x, U) حول p بطوریکه به ازای $i = ۱,۲$ ، $C_i(I_i) \subseteq U$ باشند، $x \circ C_۱$ و $x \circ C_۲$ در صفر بر هم مماس باشند.

قضیه ۲

رابطه فوق روی خمهای هموار در M گذرنده از نقطه $p \in M$ ، یک رابطه هم‌ارزی است.

این رابطه به نقطه بستگی دارد و آنرا به $\sim_p$ نمایش می‌دهیم. کلاس هم‌ارزی خم هموار $C : I \longrightarrow M$ که $C(\circ) = p$ را در p به $[C]_p$ نمایش می‌دهیم. $[C]_p$ را یک بردار مماس بر M در p می‌گوییم. فضای مماس بر M در p عبارتست از

$$T_pM = \left\{ [C]_p \;\middle|\; C : I \longrightarrow M \right\}$$

فرض کنید $[C_1]_p$ و $[C_2]_p$ دو بردار مماس بر M در p باشند و

$$\begin{cases} v_1 = (x \circ C_1)'(\circ) \\ v_2 = (x \circ C_2)'(\circ) \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم:

$$[C_1]_p + [C_2]_p = [x^{-1} \circ \theta]_p$$

که در آن $\theta(t) = x(p) + t(v_1 + v_2) \in x(U)$ و همچنین:

$$\lambda [C_1]_p = [x^{-1} \circ y]$$

که در آن $y(t) = x(p) + \lambda\, t v_1 \in x(U)$ و x یک کارت با شرط $C_i(I_i) \subseteq U \;\; (i = 1,2)$ می‌باشد.

می‌توان دید T_pM با این جمع و ضرب اسکالر یک فضای برداری است و اگر $dimM = m$ آنگاه $T_pM \cong \mathbb{R}^m$ و در واقع $[C]_p \mapsto (x \circ C)'(\circ)$ یک ایزومورفیسم طبیعی فضاهای برداری می‌باشد .

تعریف ۶ (مشتق نگاشت دیفرانسیل‌پذیر در یک نقطه):

فرض کنید $f : M \longrightarrow N$ دیفرانسیل‌پذیر باشد. مشتق f در p عبارتست از:

$$\begin{cases} f_{*_p} : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N \\ [C]_p \mapsto [f \circ C]_{f(p)} \end{cases}$$

می‌توان دید f_{*p} خوش‌تعریف و خطی است.

روش سوم :

تعریف ۷ (فضای مماس بر M در نقطه p ، T_pM):

فرض کنید $f : M^m \longrightarrow \mathbb{R}$ دیفرانسیل پذیر و (x,U) یک کارت حول p باشند. در نگاه اول به نظر می‌رسد برای تعریف مشتق f در نقطه p با توجه به کارت (x,U) نگاشت خطی زیر به عنوان تعریف در نظرگرفته شود:

$$D(f \circ x^{-1})(x(p)) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

ولی این روش یک مشکل اساسی دارد و آن اینکه، اگر (y,V) کارت دیگری حول p باشد، نسبت به این کارت نیز، مشتق f در p ، نگاشت خطی زیر می‌شود:

$$D(f \circ y^{-1})(y(p)) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

از طرفی داریم:

$$D(f \circ x^{-1})(x(p)) = D(f \circ y^{-1}) \circ D(y \circ x^{-1})(x(p)) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

برای برقراری تساوی فوق باید $D(y \circ x^{-1})(x(p))$ همانی باشد که در حالت کلی لزومی ندارد همانی باشد.

حال فرض می‌کنیم $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ مجموعه‌ی تمام کارت‌های حول p باشد. قرار می‌دهیم:

$$E = \bigcup_{\alpha \in I} \{p\} \times \{\alpha\} \times \mathbb{R}^m$$

اکنون روی E رابطه $\sim_p$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(p,\alpha,v) \sim (p,\beta,w) \Leftrightarrow D(x_\beta \circ x_\alpha^{-1})(x_\alpha(p))(v) = w$$

چون $D(x_\beta \circ x_\alpha^{-1})(x_\alpha(p))$ یک ایزومورفیسم خطی است به آسانی دیده می‌شود $\sim_p$ یک رابطه هم‌ارزی روی E است. کلاس (p,α,v) را با $[p,\alpha,v]$ نمایش می‌دهیم و آنرا یک بردار مماس بر M در p می‌نامیم. قرار می دهیم:

$$T_pM = \{\ [p,\alpha,v] \mid (p,\alpha,v) \in E\ \}$$

نکته: اگر $[p,\beta,\omega] \in T_pM$ دلخواه باشد و $\alpha \in I$ داریم $[p,\beta,\omega] = [p,\alpha,v]$ که در آن

$$v = D(x_\alpha \circ x_\beta^{-1})(x_\beta(p))(\omega)$$

پس هر عنصر T_pM را می‌توان به صورت $[p,\alpha,v]$ برای هر اندیس ثابت α نوشت.

حال تعریف می‌کنیم:

$$\forall v,w\in \mathbb{R}^m \qquad [p,\alpha,v]+[p,\alpha,w]=[p,\alpha,v+w],$$
$$\forall v\in \mathbb{R}^m,\forall \lambda\in \mathbb{R} \quad \lambda\ [p,\alpha,v]=[p,\alpha,\lambda v]$$

با این تعاریف دیده می‌شود که T_pM یک فضای برداری است.

با تثبیت هر کارت حـول p می‌توان یک ایزومورفیسم از T_pM به $\mathbb{R}^m$ بدست آورد.

$$\begin{cases} x_\alpha : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ [p,\alpha,v]\mapsto v \end{cases}$$

تعریف ۷ (مشتق یک نگاشت دیفرانسیل‌پذیر):

فرض کنید $f:M\longrightarrow N$ دیفرانسیل‌پذیر و $p\in M$ باشند. تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} f_*:T_pM\longrightarrow T_{f(p)}N \\ [p,\alpha,v]\mapsto \left[f(p),\beta,D(y_\beta\circ f\circ x_\alpha^{-1})(x_\alpha(p))(v)\right] \end{cases}$$

که (x_α,U_α) کارتی حول p در M و (y_β,V_β) کارتی حول $f(p)$ در N است. به آسانی دیده می‌شود که f_{*p} خوش‌تعریف و خطی است.

نکته: در تعریف بالا اگر $N=\mathbb{R}$ باشد، آنگاه با توجه به ایزومورفیسم $T_{f(p)}\mathbb{R}\cong\mathbb{R}$ نگاشت زیر

$$df(p):T_pM\longrightarrow \mathbb{R}$$

یک تبدیل خطی خوش‌تعریف است. بنابراین مشکل اساسی مذکور در تعریف مشتق f در p با جایگزینی T_pM به جای $\mathbb{R}^m$ برطرف شده است.

فضای مماس و ساختار C^∞ روی آن:

حال قرار می‌دهیم $TM=\bigcup_{p\in M}T_pM$ و به آن فضای مماس M می‌گوییم. فرض کنید (x_α,U_α) یک کارت M باشد. $U_\alpha\subseteq M$ باز است پس خود یک منیفلد است. لذا $TU_\alpha=\bigcup_{p\in U_\alpha}T_pU_\alpha$ قابل تعریف است. توجه کنید که برای هر $p\in U_\alpha$ داریم:

$$.T_pU_\alpha\cong T_pM$$

تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases}\lambda_\alpha : TU_\alpha \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^m \\ [p,\alpha,u] \mapsto (p,u)\end{cases}$$

می‌توان دید این نگاشت دوسویی است و $U_\alpha \times \mathbb{R}^m \cong x_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^{2m}$ یک فضای توپولوژیکِ هاسدورف با پایه شمارا است. توپولوژی $U_\alpha \times \mathbb{R}^m$ را توسط تناظر λ_α بـه TU_α منتقل می کنیم، در این صورت TU_α یک فضای توپولوژیکِ هاسدورف با پایه شمارا است و λ_α یک همئومورفیسم خواهد بود.

قضیه ۳

اگر (x_α, U_α) و (x_β, U_β) دو کارت M باشند، در این صورت:

الف) $T(U_\alpha \cap V_\beta) = TU_\alpha \cap TV_\beta$ زیرمجموعه‌های بازی از TU_α و TV_β هستند.

ب) توپولوژی‌های القایی از TU_α و TV_β برای $T(U_\alpha \cap V_\beta)$ یکی است.

قضیه ۴

اگر X یک مجموعه و $X = \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$ باشد، که هــر X_α دارای توپولوژی τ_α است.

یک توپولوژی روی X به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$U \subseteq X$ باز است هرگاه به ازای هر $\alpha \in I$، $U \cap X_\alpha$ در X_α باز باشد.

بعلاوه اگر برای هر α, β، $X_\alpha \cap X_\beta$ در X_α و X_β باز باشد و توپولوژی‌های القایی از X_α و X_β بر $X_\alpha \cap X_\beta$ یکی باشد آنگاه هر باز X_α در X نیز باز است.

حال قرار می دهیم:

$$TM = \bigcup_{\alpha \in I} TU_\alpha = \bigcup_{p \in M} T_pM$$

که اجتماع روی تمام کارتهای ساختار C^∞ رویِ M گرفته می‌شود. در قضیه ۴ دیدیم که خانواده TU_αها شرایط قضیه فوق را ارضا می‌کنند، پس به موجب این قضیه روی TM یک توپولوژی القا می‌شود و توپولوژی جدید هر TU_α همان توپولوژی قبلی‌اش است.

قضیه ۵

TM هاسدورف با پایه شمارا است.

تعریف ۸ (کارت و اطلس برای TM):

کارت (x_α, U_α) را برای M در نظر می‌گیریم. تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} Tx_\alpha : TU_\alpha \longrightarrow x_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^m \\ [p,\alpha,u] \mapsto (x_\alpha(p)\ ,\ u\ ) \end{cases}$$

قبلا دیدیم Tx_α یک همئومورفیسم است. بنابراین $\{(Tx_\alpha, TU_\alpha)\}$ یک اطلس توپولوژیک برای TM است. در نتیجه TM یک منیفلد توپولوژیک است و $dim\,TM = ۲ \times dim\,M$.

این اطلس C^∞ نیز می‌باشد، زیرا نگاشت‌های گذر C^∞ می‌باشند . در واقع

$$Tx_\beta \circ Tx_\alpha^{-1} : Tx_\alpha(TU_\alpha \cap TU_\beta) \longrightarrow Tx_\beta(TU_\alpha \cap TU_\beta)$$

با ضابطه زیر C^∞ می‌باشد:

$$(y,u) \xrightarrow{Tx_\alpha^{-1}} \left[\ x_\alpha^{-1}(y), \alpha, u\ \right] = \left[\ x_\alpha^{-1}(y), \beta, D(x_\beta \circ x_\alpha^{-1})(y)u\ \right]$$
$$\xrightarrow{Tx_\beta} (\ x_\beta \circ x_\alpha^{-1}(y), D(x_\beta \circ x_\alpha^{-1})(y)u\ )$$

تعریف ۹ (نگاشت مشتق یک نگاشت دیفرانسیل‌پذیر):

هرگاه نگاشت $f : M \longrightarrow N$ دیفرانسیل‌پذیر باشد، نگاشت دیفرانسیل‌پذیر $f_* : TM \longrightarrow TN$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم و آن را مشتق f می‌نامیم.

$$f_*([\,p,\alpha,v\,]) := f_{*_p}([p,\alpha,v\,])$$

تعریف ۱۰ (دیفئومورفیسم):

نگاشت معکوس‌پذیر $f : M \longrightarrow N$ را یک دیفئومورفیسم می‌نامیم، هرگاه f و معکوس آن هر دو دیفرانسیل‌پذیر باشند.

قضیه ۶

اگر M، N و P سه منیفلد، $f : M \longrightarrow N$ و $g : N \longrightarrow P$ دو نگاشت دیفرانسیل‌پذیر باشند، در این صورت:

۱) نگاشت همانی هر منیفلد دیفرانسیل‌پذیر است و $(1_M)_* = 1_{TM}$.

۲) $g \circ f$ دیفرانسیل پذیر است و $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

۳) اگر $f : M \longrightarrow N$ یک دیفئومورفیسم باشد آنگاه $(f^{-1})_* = (f_*)^{-1}$.

تعریف ۱۱ (نگاشت تصویرکلاف مماس):

نگاشت $\pi_M : TM \longrightarrow M$ را به صورت $\pi_M([p,\alpha,v]) = p$ تعریف می‌کنیم و آنرا نگاشت تصویر کلاف مماس M می‌نامیم.

نکته: سه تایی (TM,π_M,M) را کلاف مماس منیفلد M می‌نامند که مثال بارزی از مفهوم کلاف برداری روی منیفلد M می‌باشد که از موضوع این کتاب خارج است و در جلد بعدی به آن خواهیم پرداخت.

قضیه ۷

π_M یک نگاشت دیفرانسیل‌پذیر و باز است.

نکته: در تعریف منیفلد و با توجه به دیفرانسیل‌پذیر بودن نگاشتهای بین منیفلدها به آسانی دیده می‌شود که اگر (x_α,U_α) یک کارت M باشد آنگاه $x_\alpha : U_\alpha \longrightarrow x_\alpha(U_\alpha)$، دیفئومورفیسم است.

مثال: (**محاسبه** T_pS^n):

تعریف دومِ بردار مماس را بکار می‌بریم. فرض کنید $\gamma : I \longrightarrow S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ یک خم هموار باشد و $\gamma(0) = p$، $\gamma(t) = (\gamma_1(t),\ldots,\gamma_{n+1}(t))$ و $\sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i^2(t) = 1$.

داریم

$$2\sum\gamma_i(t)\gamma_i'(t) = 0 \Rightarrow \sum\gamma_i(0)\gamma_i'(0) = 0 \Rightarrow \langle \gamma(0),\gamma'(0)\rangle = 0$$

که در آن $\langle\ ,\ \rangle$ ضرب داخلی اقلیدسی روی $\mathbb{R}^{n+1}$ می‌باشد.

حال نگاشت خطی مقابل

$$\begin{cases}\sigma : T_pS^n \longrightarrow p^\perp \\ [\ \gamma]_p \mapsto \gamma'(0)\end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم که درآن $p^\perp = \{q \in \mathbb{R}^{n+1} \mid < p,q >= 0\}$ می‌باشد. با توجه به نکات فوق، σ خوش‌تعریف است و به سادگی می‌توان دید که یک به یک نیز می‌باشد. از طرف دیگر چون $dim\,T_pS^n = dim\,p^\perp = n$، σ یک ایزومورفیسم خطی خواهد بود، یعنی $T_pS^n \cong p^\perp$.