تعریف ۱ (کارت):

فرض کنید M یک فضای توپولوژیک هاسدورف با پایه‌ای شمارش‌پذیر از مجموعه‌های باز است. منظور از یک کارت M، زوج (x,U)است که در آن U زیرمجموعه بازی از Mو نگاشت زیر:

$$x : U \longrightarrow U'$$

یک همئومورفیسم از Uبر زیرمجموعه بازی مانند U' از یک فضای $\mathbb{R}^m$ می‌باشند.

تعریف ۲ (اطلس):

فرض کنید M یک فضای توپولوژیک هاسدورف با پایه‌ای شمارش‌پذیر از مجموعه‌های باز است. خانواده $A=\{(x_\alpha,U_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ از کارتهای M را یک اطلس می‌نامیم اگر $M=\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$.

هرگاه A یک اطلس برای M باشد، زوج (M,A) یک منیفلد توپولوژیک خوانده می‌شود. منیفلد توپولوژیک (M,A) را $m-$بُعدی می‌نامیم درصورتیکه برای هرکارت $(x,U)\in A$، $x(U)$ زیرمجموعه بازی از $\mathbb{R}^m$ باشد.

مثال ۱: M را زیرمجموعه‌ای باز از $\mathbb{R}^m$ می‌گیریم. $(1_M, M)$ یک کارت برای M است و $\{(1_M, M)\}$ نیز یک اطلس برای M است.

مثال ۲: $M=\left\{\frac{1}{k} \;\middle|\; k=1,2,3,\ldots\right\}$ یک منیفلد توپولوژیک صفر بُعدی است.

مثال۳: کره واحد $S^m=\left\{ (p_1,\ldots,p_{m+1})\in \mathbb{R}^{m+1} \;\middle|\; \sum p_i^2=1 \right\}$ یک منیفلد توپولوژیک $m-$بُعدی است. کارتهای (x_{i+},U_{i+}) و (x_{i-},U_{i-}) را به ازای $i=1,2,\ldots,m+1$ به صورت زیرتعریف می‌کنیم:

$$U_{i+}=\left\{(p_1,\ldots,p_{m+1})\in S^m \;\middle|\; x_i>0\right\}$$

$$U_{i-}=\left\{(p_1,\ldots,p_{m+1})\in S^m \middle| x_i<0\right\}$$

$$x_{i\pm}(p_1,\ldots,p_{m+1})=(p_1,\ldots,p_{i-1},p_{i+1},\ldots,p_{m+1})\in \mathbb{R}^m$$

تعریف ۳ (منیفلدهای حاصل‌ضربی):

فرض کنید M و N را دو منیفلد توپولوژیک با بُعدهای به ترتیب m و n باشند و $M \times N$ را به توپولوژی حاصل‌ضربی مجهز کنیم. بنابر قضایای توپولوژی عمومی، $M \times N$ هاسدورف است و پایه‌ای شمارش‌پذیر از مجموعه‌های باز دارد. برای هر کارت (x,U) برای M و (y,V) برای N، کارت $(x\times y, U\times V)$ برای $M \times N$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(x\times y)(p,q) = \big(x(p), y(q)\big) \in U'\times V' \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m+n}$$

$x\times y$ یک همئومورفیسم از $U\times V$ به $U'\times V'$ است و از تعریف اطلس روشن است که مجموعه‌هایی به شکل $U\times V$ تمام $M\times N$ را می‌پوشانند. پس $M\times N$ یک منیفلد توپولوژیک $(m+n)-$بُعدی است. به همین ترتیب می‌توان حاصل‌ضرب تعداد متناهی منیفلد، $M_1\times\cdots\times M_k$ را تعریف کرد.

مثال ۴: چنبره $m-$بُعدی T^m، مثال برجسته‌ای از منیفلد حاصل‌ضربی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T^m = \underbrace{S^1\times\cdots\times S^1}_{m}$$

تعریف ۴ ($C^\infty-$مرتبط بودن کارت ها):

دو کارت (x,U) و (y,V) را $C^\infty-$مرتبط می‌نامیم، هرگاه در صورت ناتهی بودن $U\cap V$، نگاشت زیر دیفئومورفیسم رده C^∞ باشد:

$$x\circ y^{-1} : y(U\cap V) \longrightarrow x(U\cap V)$$

منظور از دیفئومورفیسم رده C^∞، نگاشتی دوسویی است که خودش و وارونش از هر مرتبه مشتق‌پذیر باشند.

تعریف ۵ (منیفلد C^∞):

منیفلد توپولوژیک (M,A) را یک منیفلد C^∞ می‌نامیم، هرگاه هر دو کارت A، $C^\infty-$مرتبط باشند. در این صورت A را یک اطلس C^∞ برای M می‌نامیم.

قرارداد: در ادامه، منیفلد C^∞ را به اختصار منیفلد می‌نامیم.

تعریف ۶ (نگاشت C^∞ بین دو منیفلد):

برای دو منیفلد (M,A) و (N,B) نگاشت $f:M\longrightarrow N$ را C^∞ می‌نامیم هرگاه برای هر دو کارت (x,U) از A و (y,V) از B با شرط $f^{-1}(V)\cap U\neq\phi$ نگاشت زیر C^∞ باشد:

$$y\circ f\circ x^{-1}:x(U\cap f^{-1}(V))\longrightarrow W\subseteq y(V)$$

تعریف ۷ (دیفئومورفیسم):

نگاشت دوسویی $f:M\longrightarrow N$ را یک دیفئومورفیسم می‌نامیم، هرگاه خود و معکوس آن C^∞ باشند.

قضیه ۱

الف) اگر (M,A) یک منیفلد باشد, نگاشت همانی، 1_M، C^∞ است.

ب) اگر (M_i,A_i)، $i=1,2,3$، سه منیفلد و $f_j:M_j\longrightarrow M_{j+1}$ ، $j=1,2$ ، دو نگاشت C^∞ باشند، آنگاه $f_2\circ f_1$ نگاشتی C^∞ است.

مثال ۵: هر منیفلد توپولوژیک صفر بُعدی یک منیفلد است.

تعریف ۸:

برای منیفلد (M,A)، اطلس A را ماکزیمال می‌نامیم در صورتیکه برای هر کارت (x,U)، اگر (x,U) با همه کارتهای A، $C^\infty-$مرتبط باشد، آنگاه $(x,U)\in A$. به عبارت دیگر اطلس ماکزیمال اطلسی است که نتوان به آن کارت دیگری افزود بدون آنکه شرط $C^\infty-$مرتبط بودن نقض شود.

قضیه ۲

اگر (M,A) یک منیفلد باشد، A را می‌توان به یک اطلس ماکزیمال توسعه داد و این اطلس ماکزیمال یکتاست.

تعریف ۹ : (ساختار C^∞)

یک اطلس ماکزیمال C^∞ برای M را یک ساختار C^∞ برای M می‌نامیم.

قرارداد: در ادامه منظور از منیفلد، یک منیفلد با یک ساختار C^∞ روی آن می‌باشد.

تعریف ۱۰ (دو ساختار C^∞ هم ارز):

دو ساختار C^∞، A_1 و A_2 روی M را هم‌ارز می‌نامیم هرگاه یک دیفئومورفیسم $f : (M, A_1) \longrightarrow (M, A_2)$ وجود داشته باشد.

نکته: یکی از اهداف کلی در مطالعه منیفلدها یافتن تعداد ساختارهای C^∞ غیر هم‌ارز روی یک منیفلد می‌باشد که در واقع تعداد راه‌های ممکن برای تعریف نمودن مفهوم مشتق روی آن منیفلد می‌باشد. به طور مثال در جدول ۱ روی $\mathbb{R}^n$ و S^n تعداد ساختارهای C^∞ غیر هم‌ارز داده شده است.

n	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
S^n	۱	۱	۱	۱	۱	۲۸	۲	۸	۶	۹۹۲	۱	۳	۲	۱۶۲۵۶
$\mathbb{R}^n$	۱	۱	∞	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

جدول ۱

قضیه ۳ (افراز واحد)

فرض کنید M یک منیفلد و $\{U_\alpha\}$ پوشش بازی از M باشند. پوشش باز شمارش‌پذیری مانند $\{V_i\}$ برای M و همچنین مجموعه شمارش‌پذیری از نگاشت‌های C^∞ مانند $\theta_i : M \longrightarrow \mathbb{R}$ وجود دارند بطوریکه پنج شرط زیر برقرارند:

الف) هر V_i قلمرو یک کارت M است.

ب) برای هر U_α، V_i وجود دارد بطوریکه $V_i \subset U_\alpha$.

پ) مجموعه V_iها موضعاً متناهی است. یعنی برای هر $p \in M$ ، همسایگی W از p موجود است بطوریکه تنها با تعدادی متناهی از V_iها اشتراک ناتهی دارد.

ت) محمل θ_i، یعنی بستار مجموعه $\{\ p \in M \mid \theta_i(p) \neq 0\ \}$، در V_i است.

ث) برای هر $p \in M$ ، $\sum_i \theta_i(p) = 1$.

نکته : افراز واحد وسیله‌ای است که بعضی از مفاهیم و اشیاء موضعی تعریف شده روی یک منیفلد را به مفاهیم و اشیاء سراسری روی آن تعمیم دهیم.

قضیه ۴

هر زیرمجموعه بسته در $\mathbb{R}^n$ مجموعه صفرهای یک تابع نامنفی و C^∞ روی $\mathbb{R}^n$ می‌باشد. یعنی اگر $A \subseteq \mathbb{R}^n$ بسته باشد، در اینصورت تابع همواری مانند $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد بطوریکه $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad f(x) \geq 0$ و $A = f^{-1}(0)$.