Subject:
Year. Month. Date. ( )

$y = x^2 + c \Rightarrow y' = 2x$

تشکیل

برای تعیین معادله دیفرانسیل یک دسته منحنی یک پارامتری باید پارامتر بین معادله و مشتق آن حذف شود

$y = cx^2 + 4 \qquad y' = 2cx \Rightarrow y = \frac{y'}{2}x + 4$

$y = x^2 + ax + b$
$y' = 2x + a$
$y'' = 2$

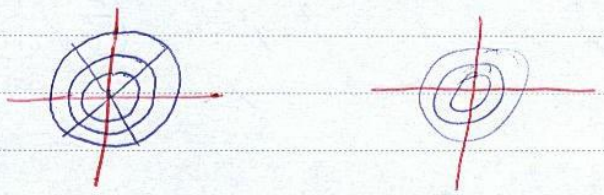
$y = ax^2 + bx + 5$
$y' = 2ax + b$
$y'' = 2a$

اگر یک دسته منحنی n پارامتر داشته باشد و بخواهیم معادله دیفرانسیل آن را پیدا کنیم باید n پارامتر را بین خود منحنی و مشتقاتش حذف کنیم

مسیرهای قائم

هرگاه هر دو منحنی از دسته منحنی‌های دو معادله برهم عمود باشند یکی از منحنی‌ها را مسیرهای قائم دسته منحنی دیگر می‌گوئیم

$y = ax$ $\qquad$ $y^2 + x^2 = c^2$



معادله معلوم ← مسیر اصلی
معادله‌ای که بدست می‌آید ← مسیر قائم

Subject:
Year. Month. Date. ( )

قدم 1 برای تعیین مسیرهای قائم ابتدا معادله دیفرانسیل مسیرهای را تشکیل داد

$y = ax \qquad y' = a \qquad y' = \frac{y}{x}$

قدم 2 تشکیل معادله دیفرانسیل مسیر قائم.

هرکجا y' داریم آن را با $-\frac{1}{y'}$ عوض می‌کنیم:

$$-\frac{1}{y'} = \frac{y}{x} \Rightarrow -\frac{dx}{dy} = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow y\,dy + x\,dx = 0 \qquad y^2 + x^2 = c^2$$

معادله دیفرانسیل مرتبه اول:

$F(x, y, y') = 0$

الزاماً باید y' را داشته باشد

مرتبه اول:
1- نسبت به x مشتق حل می‌شوند $\quad 4xy' + 3y - 1 = 0$
2- نسبت به y مشتق حل می‌شوند $\quad \cos y' + 3xe^{y'} - 2y = 2$

1- نسبت به x مشتق حل می‌شوند:

به فرم زیر است:

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

تابع حاصلضرب دو تابع یکی از x و دیگری از y است $\quad h(x,y) = h_1(x) \cdot h_2(y)$

$$\Rightarrow f_1(x) f_2(y)\,dx + f_3(x) f_4(y)\,dy = 0 \qquad \times \frac{1}{f_2 f_3}$$

$$H(x)\,dx + G(y)\,dy = 0 \Rightarrow$$

معادله تفکیک پذیر است

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۴

اگر معادله تفکیک پذیر به صورت زیر باشد

$$H(x)\,dx + G(y)\,dy = 0$$

$$\int \quad + \int \quad = C$$

-1

$$(1+x^3)\,dy - x^2 y\,dx = 0$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{x^2}{1+x^3}\,dx \Rightarrow \ln y = \frac{1}{3}\ln(1+x^3) + \ln c$$

$$\ln y^3 = \ln(1+x^3) + \ln c \Rightarrow y^3 = c(1+x^3)$$

-2

$$x\frac{dy}{dx} + y^2 = 4 \Rightarrow x\,dy + (y^2-4)\,dx = 0$$

$$\frac{dy}{(y^2-4)} + \frac{dx}{x} = 0 \qquad \frac{1}{4}\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right| + \ln x = \ln c$$

$$\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right| + \ln x^4 = \ln c \Rightarrow \frac{y-2}{y+2} = \frac{c}{x^4}$$

-3 حد جواب مسأله زیر وقتی $x \to \infty$ برابر با ؟

$$y' = 2x\cos^2 y \qquad y(0) = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = 2x\,dx \qquad \operatorname{tg} y = x^2 + c \qquad x=0 \Rightarrow y = \frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$\Rightarrow y = \operatorname{Arc\,tg}(x^2+1) = \frac{\pi}{2}$$

$x \to \infty$

-1 ∞ -4

$\frac{\pi}{2}$ -3 ✓

$\frac{\pi}{4}$ -2

5

Subject:
Year. Month. Date. ( )

4- جواب عمومی معادله زیر را بدست آورید

$$x(y-1)\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \frac{y-1}{y}dy = \frac{dx}{x}$$

$$y = \ln xy + c$$

معادلاتی به صورت معادله تابعی از یک خط:

$$y' = f(ax + by + c)$$

$$y' = 2x + y - 1 \quad , y' = \text{tg}(3x+4y)+2 \quad , y' = e^{4x-y+3} + \sqrt{4x-y+3} - 1$$

$$u = ax + by + c \quad , y' = f(u)$$

اگر y تابعی از یک خط شد می توان خط را به صورت u گرفت و معادله را به معادله تفکیک پذیر تبدیل کرد

5: $y' = (y-4x)^2 \Rightarrow u = y - 4x \Rightarrow u' = y' - 4$

$$\Rightarrow y' = u^2 \Rightarrow u' + 4 = u^2 \quad \frac{du}{u^2-4} = dx$$

$$\frac{1}{4}\ln$$

6: $y' = (x+y)^2 \quad u = x + y \Rightarrow y' = u' - 1$

$$u' - 1 = u^2 \quad \frac{du}{u^2+1} = dx \quad \text{tg}^{-1} u = x + c$$

$$x + y = \text{tg}(x + c)$$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

6

:7 $y' = e^{2x+y-1} - 2 \Rightarrow u = 2x+y-1 \quad u' = 2+y'$

$u - x = e^{u} - x \qquad e^{-u}\,du = dx$

$-e^{-u} = x + c$

:2 هگن

$h(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\alpha} h(x,y) \Rightarrow$ هگن است

در رابطه $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ اگر دو صورت P و Q هگن با درجه هگن مساوی باشند $\Rightarrow$ معادله دارا هگن است و اگر هگن بود می توان به جای $y = vx$ قرار داد

$\Rightarrow y = vx \Rightarrow dy = v\,dx + x\,dv$

:8

$x\frac{dy}{dx} = x\,tg\left(\frac{y}{x}\right) + y = 0$

$\frac{dy}{dx} = tg\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x}$

$v + x\frac{dv}{dx} = tg\,v + v$

$\cot g\,v\,dv = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln \sin v = \ln cx$

$\sin\left(\frac{y}{x}\right) = cx \qquad y = x \sin^{-1}(cx)$

7

Subject:
Year. Month. Date. ( )

9- همگن درجه صفر

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^3+y^3}{xy^2} = \frac{2+v^3}{v^2}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = v + \frac{2}{v^2} \qquad 2\frac{dx}{x} = v^2 dv$$

$$\frac{1}{3}v^3 = 2\ln x + c \qquad \frac{y^3}{x^3} = 6\ln x + c \Rightarrow y = x\sqrt[3]{\quad}$$

10: همگن از درجه صفر

$$y' = \frac{x^2+2y^2}{xy} \qquad x=0 \Rightarrow = \frac{1+2v^2}{v^2}$$

1- 1

2- 0 ✓

3- ∞

4- موجود نیست

$$v + xv' = \frac{1+2v^2}{v^2} \qquad -v = \frac{1+v^2}{v}$$

$$\frac{v}{1+v^2}dv = \frac{dx}{x} \qquad \ln(1+v^2) = \ln cx^2$$

$$1+\left(\frac{y}{x}\right)^2 = cx^2 \qquad x^2+y^2 = cx^4 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=0$$

نکته: تمام معادلات به فرم $y' = f\left(\frac{ax+by}{cx+ey}\right)$ که صورت و مخرج معادله یک خطا باشند که از مبدأ بگذرد همگن از درجه صفر می باشد.

$$y = \frac{x+3y+1}{2x-y+4}$$ همگن نیست

$$y = \frac{ax+by+c}{ex+hy+n}$$ (همگن نیست)

در این معادله کافیست مبدأ مختصات را به محل تلاقی دو خط منتقل کنیم به شرطیکه دو خط موازی نباشند

Subject:
Year. Month. Date. ( )

الف دو خط موازی:

$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{ex+hy+n}\right)$ $\quad u = ax+by$

با تغییر متغیر u و y کاملا جدا از هم می شود

11- $y' = \frac{y-x}{y-x-1}$ $\quad u = y-x \Rightarrow y' = u'+1$

$u'+1 = \frac{u}{u-1}$ $\quad u' = \frac{u}{u-1} - 1 = \frac{1}{u-1} \Rightarrow (u-1)\,du = dx$

$(u-1)^2 = 2x + C$

12- $y' = \frac{x-y}{2x-2y+1}$ $\quad u = x-y \Rightarrow y' = 1-u'$

$1-u' = \frac{u}{2u+1}$ $\quad -u' = \frac{u}{2u+1} - 1 = -\frac{u+1}{2u+1}$

$\frac{(2u+1)}{u+1}\,du = dx$ $\quad 2u - \ln(u+1) = x + C$

13-

$(3y+2x+4)\,dx - (4x+6y+5)\,dy = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+3y+4}{4x+6y+5}$ $\quad u = 2x+3y \Rightarrow y = \frac{1}{3}u + \frac{2}{3}x$

$y' = \frac{1}{3}(u'-2) = \frac{u+4}{2u+5} \Rightarrow \frac{3u+12}{2u+5} = (u'-2)$

$u' = \frac{7u+22}{2u+5} \Rightarrow \frac{2u+5}{7u+22}\,du = dx$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۹

دو خط متقاطع طوری بسنید

ب : متقاطع متقاطع متوازی (x0, y0)

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + c = 0 \\ ex_0 + hy_0 + n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases} \quad \begin{cases} dx = dX \\ dy = dY \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = f\left(\frac{ax+by+c}{ex+hy+n}\right)$$

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX+bY}{eX+hY}\right) \Rightarrow Y = vX \quad \text{تغییر متغیر}$$

$$y' = \frac{x-y+2}{x+y-1} \qquad -14$$

$$\begin{cases} x-y=-2 \\ x+y=1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_0 = -\frac{1}{2} \\ y_0 = \frac{3}{2} \end{matrix}$$

$$x = X - \frac{1}{2} \quad y = Y + \frac{3}{2}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X-Y}{X+Y} = \frac{1-v}{1+v}$$

$$v + X\frac{dv}{dX} = \frac{1-v}{1+v} \qquad X\frac{dv}{dx} = \frac{1-v}{1+v} - v = \frac{-v^2-2v+1}{1+v}$$

$$-\frac{1+v}{v^2+2v-1}\,dv = \frac{dX}{X}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

P4PCO

11

Subject:
Year. Month. Date. ( )

3 ـ کامل

معادله $p(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ را کامل گوییم اگر تابعی مانند $U=U(x,y)$ موجود باشد بقسمی که

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial y}=Q$$

$$dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy \qquad dU=Pdx+Qdy=0$$

$$\Rightarrow dU=0 \qquad \Rightarrow U=C$$ ـــــ بر حسب تابعی از x و y ثابت باشد

اگر $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ شد معادله دیفرانسیل کامل می‌شود.

مثال 13: جواب معادله کدر از مبدأ مختصات می‌گذرد کدام است؟

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+y\cos x}{4y^3-\sin x}$$

$$\underbrace{(3x^2+y\cos x)}_{P}dx+\underbrace{(\sin x-4y^3)}_{Q}dy=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\cos x \ , \ \frac{\partial Q}{\partial x}=\cos x \Rightarrow$$ کامل است

$$\frac{\partial U}{\partial x}=3x^2+y\cos x \Rightarrow U=x^3+y\sin x+f(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\sin x+f'(y)=\sin x-4y^3 \rightarrow f(y)=-4y^3$$

$$x^3+y\sin x-y^4=C \qquad x=0,y=0 \Rightarrow C=0$$

مثال 14: a را طوری تعیین کنید تا معادله زیر یک معادله کامل باشد

$$(aye^{xy}+2xy)dx+(xe^{xy}+x^2)dy=0$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\frac{\partial P}{\partial y} = ae^{xy} + axye^{xy} + \cdots$$

$$ae^{xy} = e^{xy} \Rightarrow a = 1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = e^{xy} + yxe^{xy} \cdots$$

مثال 15: معادله دیفرانسیل کامل است مقدار a کدام است

$$(x^{-1} + y^{-1})dx + axy^{-2}dy = 0$$

مثال 16: $y'(y^2 - x) = y$ چه جوابی دارد؟

$$y\,dx + (x - y^2)dy = 0$$

$$U = \int y\,dx + f(y), \qquad U = yx + f(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x + f'(y) = x - y^2 \Rightarrow f'(y) = -y^2 \Rightarrow f(y) = -\frac{1}{3}y^3$$

$$U = yx - \frac{1}{3}y^3 = c$$

مثال 17: $(x+y)dx + (x-y)dy = 0 \quad , \quad y(1) = 1 \Rightarrow y(0) = ?$

$$U = \int (x - y)dy + f(x) \Rightarrow U = xy - \frac{1}{2}y^2 + f(x)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = y + f'(x) = x + y \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$$U = xy - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 = c = 1$$

$$y(0) \Rightarrow y^2 = -2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}\,i$$

13

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اگر دیفرانسیل کامل نشود اصلاً قادریم حل مسأله بشیم

$x\,dy - y\,dx = 0$ کامل نیست -1 و $+1$

$\frac{1}{xy}x = \frac{1}{y}dy - \frac{1}{x}dx = 0$ کامل است 0 و 0

$\frac{1}{x^2}x = \frac{1}{x}dy - \frac{y}{x^2}dx = 0$ $-\frac{1}{x^2}$ و $-\frac{1}{x^2}$ ~

$\frac{1}{y^2}x = \frac{x}{y^2}dy - \frac{1}{y}dx = 0$ $\frac{1}{y^2}$ و $\frac{1}{y^2}$ ~

عوامل غیر صفری که در یک معادله ناکامل ضرب می‌شوند و معادله را کامل می‌کند را عامل انتگرال ساز گوییم.

فاکتور انتگرال ساز $F = F(x,y)$ تابعی است از (x,y) در حالت کلی مخالف صفر به طوری که اگر در طرفین یک معادله دیفرانسیل ناکامل ضرب شود، دیفرانسیل را کامل کند

$$P\,dx + Q\,dy = 0$$

$$(FP)dx + (FQ)dy = 0 \quad \Rightarrow u = c$$

جوابی که از این طریق بدست می‌آید (U) جواب مسأله است.

$$f_1(x) f_2(y)\,dx + f_3(x) f_4(y)\,dy = 0$$

$\frac{1}{f_2 f_3}$ فاکتور انتگرال معادلات جدا از هم

$\frac{1}{xP+yQ}$ همگن ~ ~ ~ بهتر است از روش قبلی حل شوند

اگر معادله‌ای جواب داشته باشد حتماً یک و بینهایت فاکتور انتگرال ساز دارد.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اگر $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=f(x)$ ← $F=e^{\int f(x)\,dx}$

اگر $\frac{-1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=f(y)$ ← $F=e^{\int f(y)\,dy}$

اگر عوامل مجهول جبری نباشد می‌توان خوب کاری کند $x^{\alpha}y^{\beta}$

مثال 18:

$(xy+y^2)dx-(x^2+xy)dy=0$

1 بیش از یک عامل انتگرال ساز دارد ✓
2 کامل دقیق است .
3 فقط یک عامل انتگرال ساز تابعی از x دارد ؛
4 ؛ ~ y ~ ~ ~ ~ ~ ~

$\frac{\partial P}{\partial y}=x+2y$

$\frac{\partial Q}{\partial x}=-2x-y$

همانند $\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=3(x+y)$

$\frac{3(x+y)}{Q=-x(x+y)}=-\frac{3}{x}$ $\quad F=e^{-3\int\frac{dx}{x}}=e^{-3\ln x}=\frac{1}{x^3}$

یا

$\frac{3(x+y)}{P=y(x+3)}=-\frac{3}{y}$ $\quad F=\frac{1}{y^3}$

یا

$x^{\alpha}y^{\beta}(xy+y^2)dx-x^{\alpha}y^{\beta}(x^2+xy)dy=0$

15

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (\beta+1)x^{\alpha+1}y^{\beta} + (\beta+2)x^{\alpha}y^{\beta+1}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -(\alpha+2)x^{\alpha+1}y^{\beta} - (\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta+1}$$

$$\begin{cases} \beta+1 = -\alpha-2 \\ \beta+2 = -\alpha-1 \end{cases} \Rightarrow$$

جواب عمومی دهد پس می توانیم از این عامل انتگرال ساز استفاده کنیم

ولی چون α و β مستقیم بدست نمی آیند از استفاده نمی شود $\Leftarrow$ بنابراین جواب دارد $\alpha+\beta=-3$

مثال 19 : $x^{\alpha}y^{\beta}$ جواب عمومی دهد

$$(1+x^2)dy - (\tan^{-1}x - y)dx = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \quad \text{تفاضل} \Rightarrow 1-2x$$

$$\frac{1-2x}{Q = 1+x^2} = f(x) \qquad e^{\tan^{-1}x - 2\ln(1+x^2)} \Rightarrow \frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}$$

مثال 20 : عبارت $x^{\alpha}y^{\beta}$ عامل انتگرال ساز معادله زیر است $\alpha+\beta$ کدام است

2 1 -1 -2

$$(x^2+xy^2)y' - 3xy + 2y^3 = 0$$

$$x^{\alpha}y^{\beta}(2y^3-3xy)dx + x^{\alpha}y^{\beta}(x^2+xy^2)dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2(\beta+3)x^{\alpha}y^{\beta+2} - 3(\beta+1)x^{\alpha+1}y^{\beta}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = (\alpha+2)x^{\alpha+1}y^{\beta} + (\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta+2}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\begin{cases} 2(\beta+3)=\alpha+1 \\ -3(\beta+1)=\alpha+2 \end{cases} \qquad \alpha=1 \quad \beta=-2$$

$$\alpha+\beta=-1$$

مثال 21:

$$2xy\,dx+(4y+3x^2)\,dy=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=6x \qquad \text{تفاضل} = -4x$$

$$\frac{-4x}{-2xy}=\frac{2}{y} \qquad 2\ln y \Rightarrow F=y^2$$

$$y^2\times(\quad)=0$$

$$2xy^3\,dx+(4y^3+3x^2y^2)\,dy=0$$

$$u=x^2y^3+f(y) \Rightarrow 3x^2y^2+f'(y)=4y^3+3x^2y^2$$

$$f(y)=y^4 \qquad (x^2y^3+y^4=C)$$

مثال 22: حل انتگرال سازگار اول

$$2\sin y^2\,dx+xy\cos y^2\,dy=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=4y\cos y^2 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=y\cos y^2 \qquad \text{تفاضل} = 3y\cos y^2$$

$$\frac{3y\cos y^2}{xy\cos y}=\frac{3}{x} \Rightarrow F=x^3$$

17

Subject:
Year. Month. Date. ( )

23: فاکتور انتگرال ساز

$$ydx + (2xy - e^{-2y})dx = 0$$

$\frac{2P}{2y} = 1$ $\frac{2Q}{2x} = 2y$ تفاضل $= 1-2y$

$\frac{1-2y}{-y} = 2 - \frac{1}{y}$ $2y - \ln y$ $F = e^{2y-\ln y}$

$$F = \frac{e^{2y}}{y}$$

xe^{2x} $\frac{e^{2y}}{x}$ $\frac{e^{2y}}{y}$ ye^{2y}

24: .

$$dx + 2xy\,dy = ye^{-y^2}dy$$

$\frac{2P}{2y} = 0$ $\frac{2Q}{2x} = 2y$ تفاضل $= -2y$

$\frac{-2y}{-1} = 2y$ $F = e^{y^2}$

e^{y^2} ✓ e^{x^2} e^{-x^2} e^{-y^2}

25: α و β را طوری تعیین کنید که $x^\alpha y^\beta$ یک فاکتور انتگرال برای معادله زیر باشد

$$y\,du + x(1-3x^2y^2)dy = 0$$

$$x^\alpha y^{\beta+1} dx + x^{\alpha+1} y^\beta (1-3x^2y^2)dy = 0$$

$\frac{2P}{2y} = (\beta+1)(x^\alpha y^\beta) + 0$

$\frac{2Q}{2x} = (\alpha+1)x^\alpha y^\beta - 3(\alpha+3)x^{\alpha+2}y^{\beta+2}$

$\alpha = \beta = -3$ $\alpha = -3$

PqPCO

18

Subject:
Year. Month. Date. ( )

26: فاکتور انتگرال ساز؟ به بستگی ندارد

$x^2dy - xy\,dx = (x-2)e^x dx$

$\frac{\partial P}{\partial y} = -x \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \qquad$ تفاضل $= -3x$

$\frac{-3x}{x^2} = \frac{-3}{x^2} \qquad F = \frac{1}{x^3}$

27: جواب عمومی معادله کدام است

$(1+y^2)dx = (\tan^{-1}y - x)dy$

$(1+y^2)dx + (x - \tan^{-1}y)dy = 0$

$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \qquad$ تفاضل $= 2y-1$

$-\frac{2y-1}{1+y^2} \Rightarrow \tan^{-1}y - \ln(1+y^2) \Rightarrow F = \frac{e^{\tan^{-1}y}}{1+y^2}$

$e^{\tan^{-1}y}dx + (x - \tan^{-1}y)\cdot\frac{e^{\tan^{-1}y}}{1+y^2}dy = 0$

$u = xe^{\tan^{-1}y} + f(y)$

$\frac{\partial u}{\partial y} = x\left(\frac{1}{1+y^2}\right)e^{\tan^{-1}y} + f'(y) =$

$f(y) = -\int \frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}e^{\tan^{-1}y}dy$

۱۶

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$y^{-1}y = T \quad \Rightarrow \quad (y^{-1}y)' =$

$Py = -\int Te^{T} dT$

مثال 28:

$y(x^2-y)dx + x(x^2+3y)dy$

$\frac{\partial P}{\partial y} = x^2 - 1 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2$ تفاضل $= -1 - 2x^2$ نتیجه می‌دهد

$x^{\alpha}y^{\beta+1}(x^2-y)dx + x^{\alpha+1}y^{\beta}(x^2+3y)dy = 0$

$\frac{\partial P}{\partial y} = (\beta+1)y^{\beta}x^{\alpha+2} - (\beta+2)x^{\alpha}y^{\beta+1}$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = (\alpha+3)x^{\alpha+2}y^{\beta} + 3(\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta+1}$

$\beta+1 = \alpha+3 \qquad \beta - \alpha = 2 \qquad \alpha = -\frac{7}{4}$

$-(\beta+2) = 3(\alpha+1) \qquad 3\alpha + \beta = -5 \qquad \beta = \frac{1}{4}$

$-\beta - 2 = 3\alpha + 3$

اگر معادله‌ای به فرم $y' + yf(x) = r(x)$ باز نویسی شود، معادله خطی مرتبه اول می‌شود

آن‌گاه $(yf(x) - r(x))dx + dy = 0$ یک معادله خطی خواهد بود

همگن معادلی نیز برقرار است

$\frac{\partial P}{\partial y} = f(x) \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \qquad$ تفاضل $= f(x)$

$\left(F = e^{\int f(x)\,dx} \right)$ همین انتگرال را سایر معادلات خطی حل می‌کنند حفظ شود

20

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$y' + y f(x) = r(x)$ $\quad h(x) = \int f(x)\,dx \Rightarrow y = e^{-h(x)}\left[\int r(x) e^{h(x)}\,dx + c\right]$

اگر $\frac{dx}{dy} + x f(y) = r(y)$ حالی x و y در معادله جابجا شود

$y' - y\tan x = 2\cos x$ $\quad$ نمادگذاری $= ?$ $\quad$:28

$\ln\cos x$ $\quad y = \frac{1}{\cos x}\left[\int 2\cos^2 x\,dx + c\right]$

$xy' - y = x^2\cos x$:29

$y' = \frac{1}{x} = x\cos x$

$h(x) = -\ln x$ $\quad y = x\left[\int \frac{x\cos x}{x}\,dx + c\right]$

:30

$dy + (y\cot x - e^{\cos x})\,dx = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

هرگاه y تک در مساله دیده شود باید حتما یک بار بر dx تقسیم کرد

$\frac{dy}{dx} + y\cot x = e^{\cos x}$

$h(x) = +\ln\sin x$ $\quad y = \frac{1}{\sin x}\left[\int \sin x\, e^{\cos x}\,dx + c\right]$ $\quad c = ?$

21

Subject:
Year. Month. Date. ( )

31: جواب — مسالهٔ زیر در $x=e$ کدام است. $x>0 \quad y(1)=2$

$$x^2y' + xy = 1 \Rightarrow y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$$

$$h(x) = \ln x$$

$$y = \frac{1}{x}\left[\int \frac{1}{x^2}\, x\, dx + c\right]$$

32: $y' - xy - 2x = 0$

33: $xy' + y - x^2 = 0$

34: $xy' - y = 3x^4$

35: $\frac{xy' - y}{x^2} + \frac{y}{x} = e^{-x} \qquad t = \frac{y}{x}$

$$t' + t = e^{-x}$$

$$h(x) = x \Rightarrow \frac{y}{x} = e^{-x}\left[\int e^{-x}e^{x}\, dx + c\right]$$

36: جواب — معادله برحسب $\lambda = \frac{1}{\cos y}$ کدام است

$$\sin y \frac{dy}{dx} = \cos y(1 - x\cos y) \qquad \cos y = \frac{1}{\lambda}$$

PAPCO

22

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$y' \sin y = \frac{1}{\lambda^2} \frac{d\lambda}{dx} \qquad \frac{1}{\lambda^2} \frac{d\lambda}{dx} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\frac{d\lambda}{dx} - \lambda = -x$$

$$h(x) = -x$$

$$\lambda = e^{x}\left[\int -x e^{-x} dx + c\right]$$

$$(1+y^2)\,dx = (\tan^{-1} y - x)\,dy \quad :3.7$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{(1+y^2)} = \frac{\tan^{-1} y}{1+y^2}$$

$$h(y) = \tan^{-1}(y)$$

$$x = e^{-\tan^{-1}(y)}\left[\int \frac{\tan^{-1} y}{1+y^2} e^{\tan^{-1} y} dy + c\right]$$

$$\int u e^{u} du$$

معادله برنولی:

$$y' + y f(x) = y^{\alpha} r(x)$$

صورت کلی

برای حل مسأله طرفین را بر y^{α} تقسیم می‌کنیم سپس تغییر متغیر $u = y^{1-\alpha}$ می‌گیریم سپس معادله تبدیل به معادله خطی می‌شود

Subject:

Year. Month. Date. ( )

: 38 در معادله زیر کدام تغییر متغیر را اعمال می‌کند.

$y' + y\sin x = y^3 \cos x$

y^{-2}

: 39 شود معادله زیر

$y' = xy^2 - y$

$y' + y = xy^2 \qquad \alpha = 2$

$y'y^{-2} + y^{-1} = x \qquad u = y^{-1} \qquad u' = -y'y^{-2}$

$u' - u = -x$

$h(x) = -x$

$\frac{1}{y} = u = e^x \left[\int -xe^{-x} dx + c \right]$

: 40 $y' + y = y^2(\cos x - \sin x)$

$y'y^{-2} + y^{-1} = \cos x - \sin x$

$u = y^{-1} \rightarrow u' = -y'y^{-2}$

$u' - u = \sin x - \cos x$

$h(x) = -x$

$\frac{1}{y} = e^x \left[\int -x(\sin x - \cos x) e^{-x} dx + c \right]$

: 41 $y' = \frac{x^2 + 2y^2}{xy}$

$y' - \frac{2}{x} y = \frac{x}{y} \qquad \alpha = -1$

$y'y - \frac{2}{x} y^2 = x \qquad v = y^2, \quad v' = 2yy'$

$v' - \frac{4}{x} v = 2x$

$h(x) = -4\ln x$

$u = y^2 = x^4 \left[\int 2x \frac{x}{x^4} dx + c \right]$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$y' + y = \frac{x}{y}$:42

$y' + y = (x-1)y^2$:43

$y' = \frac{y}{x} + \frac{2x^3 \cos x^2}{y}$:44

$xy' + y = xy^3$:45

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2y + y^3}$ $\frac{dx}{dy} - xy = \frac{y^3}{x}$:46

برنولی $n=2$ و اصلاح

$x\frac{dx}{dy} - x^2 = y^3$ $v = x^2$, $\frac{dv}{dy} = 2x\frac{dx}{dy}$

$\frac{dv}{dy} - 2yv = 2y^3$

$h(y) = -y^2$ $v = x^2 = e^{y^2}\left[\int 2y^3 e^{-y^2} dy + c\right]$

$t = y^2 \Rightarrow dt = 2y\,dy$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مسیرهای قائم:

$f(x, y, c) = 0$

47: معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم خانواده دوایری که از مرکز $(0,0)$ می‌گذرند و مرکز آن‌ها بر روی محور xها است کدام است

$$(x-c)^2 + y^2 = c^2$$

حتی‌المقدور سمت راست c به یک طرف کشیده شود تا مشتق آن صفر گردد

$$x^2 + y^2 = 2cx$$

$$x + yy' = c \qquad x^2 + y^2 = 2x(x + yy')$$

$$y^2 - x^2 = 2xyy' \quad \xrightarrow{\div y'} \quad y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$ معادله خطوط قائم

48: مسیرهای قائم دسته منحنی $xy = c$ کدام است

$$y + xy' = 0$$

$$y + x\left(\frac{-1}{y'}\right) = 0$$ معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم $\Rightarrow yy' = x \quad y\,dy = x\,dx$

$$y^2 - x^2 = a$$

49: معادله مسیرهای قائم $y = cx^2$ کدام است

$$y = cx^2$$

$$y' = 2cx \qquad \frac{y}{y'} = \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{y'} \quad -yy' = \frac{x}{2} \Rightarrow -2y\,dy = \frac{x}{2}\,dx$$

$$\frac{1}{2}x^2 + y^2 = c$$

26

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$x^3 y - x y^3 = c$ -50

$x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$ -51

$y^2 = c x^3 + x^2 - 1$ معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم را بدست آورید -52

$2yy' - 2x = 3cx^2$ $\Rightarrow y^2 - x^2$

$\div$ $y^2 - x^2 + 1 = cx^3$

$= \frac{2yy' - 2x}{y^2 - x^2 + 1} = \frac{3}{x}$ $2xyy' = 3y^2 - x^2 + 3$ $= \frac{1}{y'}$

$y' = \frac{-2xy}{3y^2 - x^2 + 3}$

معادله اصلی منفی از حذف c بین خود و معادله دیفرانسیل آن بدست می آید

معادله دیفرانسیل مسیر اصلی

$f(r, \theta, \frac{d\theta}{dr})$ منفی مسیرهای قائم در مختصات قطبی

$f(r, \theta, -r^2 \frac{d\theta}{dr})$ قائم بر

27

Subject:
Year. Month. Date. ( )

: 53 $r = c(1+\sin\theta)$

$\frac{dr}{d\theta} = c\cos\theta$ $\qquad \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$ معادله دیفرانسیل مسیرهای

$\frac{r}{-r^2\frac{d\theta}{dr}} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$ معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم در مختصات قطبی

$\frac{-dr}{r} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\,d\theta \times \frac{1-\sin\theta}{1-\sin\theta}$

$-\ln r = -\ln k(1-\sin\theta)$

$r = k(1-\sin\theta)$

: 54 معادله مسیرهای قائم $r = 2c\cos\theta$

$\frac{dr}{d\theta} = -2c\sin\theta$ $\qquad \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}} = -\cot g\,\theta$

$\frac{r}{-r^2\frac{d\theta}{dr}} = -\cot g\,\theta$ $\qquad \frac{dr}{r} = \cot g\,\theta\,d\theta$

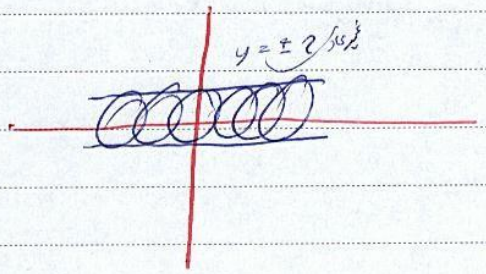
$\ln r = \ln a\sin\theta$ $\qquad r = a\sin\theta$ معادله

Subject:
Year. Month. Date. ( )

جواب غیرعادی

منحنی نمایش آن به کلیه منحنیهای جواب عمومی (دسته منحنی) و به هرکدام در یک نقطه مماس می شود

$$y^2(1+y'^2)=4 \Rightarrow \begin{cases} (x-c)^2+y^2=4 \\ -2(x-c)=0 \quad \text{مشتق نسبت به } c \end{cases}$$



پوش یک دسته منحنی منحنی است که بر کلیه منحنی‌های جواب عمومی (دسته منحنی) و به هرکدام در یک نقطه مماس می شود.

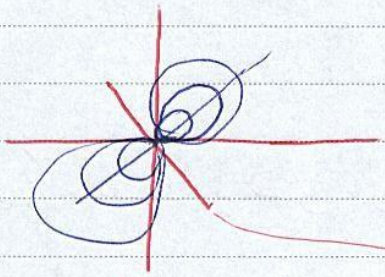
برای بدست آوردن پوش C از این دسته منحنی و مشتق آن نسبت به c حذف می کنند.

$$\begin{cases} F(x,y,c)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial c}=0 \end{cases}$$

29

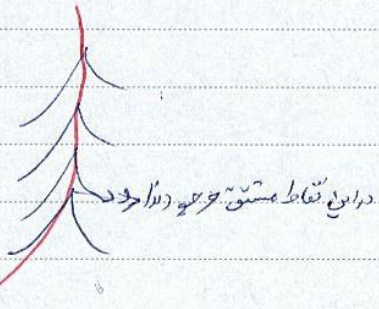
Subject:
Year. Month. Date. ( )

دوایری را نشان می دهد که از مرکز می گذرند و مرکزشان $(x-c)^2+(y-c)^2=2c^2$ روی نیمساز اول است.

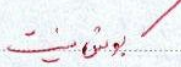


$$(x-c)^2+(y-c)^2=2c^2$$
$$-2(x-c)-2(y-c)=4c$$
$$x+y=0$$

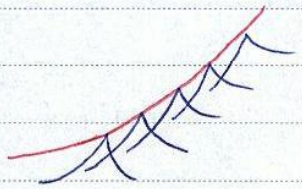
تمام $x+y=0$ پوش بیضی است فقط $(0,0)$



در این نقاط مشتق موجود نداریم



پوش بیضی



برای این نقاط بحث استثنایی دیگری را بدست آوریم داریم

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=0\end{cases}$$

اگر یک دسته منحنی مثلا از نقاط استثنایی (تفاضلی) داشته باشیم از رابطه

$\dfrac{\partial F}{\partial c}=0$
$F(x,y,c)=0$

هم بدست می آید که باید جوابهای بدست آمده از رابطه های قبل را از این رابطه حذف کرد

30

Subject:
Year. Month. Date. ( )

( ) ( ) = 0

مثلاً $y = x^n$ d

دیفرانسیل دارد ... جواب غیرعادی

جواب عمومی ... نباید حذف شود

وگرنه غلط می‌شود

معادلاتی که نسبت به مشتق حل می‌شوند:

$F(x, y, y') = 0$

حالت 1 $F(y') = 0$

$\ln y' - \sin y = 0$ توابع متقاطع با محور x ها

$y'^7 - 3y'^6 + 4y'^4 - 3y'^2 + y' - 1 = 0$

زمانی می‌توان حل کرد که معادله لااقل دارای یک ریشه حقیقی $y' = k$ باشد

$\Rightarrow F(k) = 0$ $\quad y = kx + c \Rightarrow k = \frac{y-c}{x} \Rightarrow F(\frac{y-c}{x}) = 0$

$y' - 2 = 0 \Rightarrow \frac{y-c}{x} - 2 = 0$

جمع توابع پیوسته، پیوسته است

$\ln y' - \sin x = 0$

$\Rightarrow \ln \frac{y-c}{x} = \sin \frac{y-c}{x}$

$\pi \quad + \quad + \quad +$ > لااقل یک ریشه حقیقی دارد

$\frac{\pi}{4} \quad - \quad$

$y'^7 - 3y'^6 + 4y'^4 - 3y'^2 + y' - 1 = 0$ $\quad (\frac{y-c}{x})^7 - 3(\quad) \cdots - 1 = 0$

31

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$f(x, y, y')$

$$\begin{cases} F(x, y, c) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial c} = 0 \end{cases}$$ جواب عمومی

اگر معادله‌ای ثبت به مشتق حل نشود معمولاً به فرم پارامتری مطرح می‌شود.

حالت اول

$f(y, y') = 0$

$y = f(y')$

$y' = p \Rightarrow dy = p\,dx$

$dy = f'(p)\,dp$

$p\,dx = f'(p)\,dp \longrightarrow$

$$\begin{cases} y = f(p) \\ x = \int \dfrac{f'(p)}{p}\,dp + c \end{cases}$$

$y = y'^2 e^{y'}$

$y = p^2 e^p \rightarrow p\,dx = e^p(2p + p^2)\,dp \quad p(\quad) = 0$

$p = 0 \Rightarrow y = 0$ در معادله صدق می‌کند و چون y وابسته به c نیست جواب غیرعادی است

$$\begin{cases} y = p^2 e^p \\ x = e^p + p e^p + c \end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Subject:

Year. Month. Date. ( )

P4PCO

34

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حالت دوم

$x = f(y')$

$y' = p \rightarrow dx = \frac{1}{p} dy$

$\begin{cases} x = f(p) \\ y = \int p f'(p) dp + c \end{cases}$

$\rightarrow dx = f'(p) dp$

$\frac{1}{p} dy = f'(p) dp$

۱- جواب عمومی معادله است

$x = 2y' + \sin y'$

$\begin{cases} x = 2p + \sin p \\ y = p^2 + p \sin p + \cos p + C \end{cases}$

$\frac{1}{p} dy = (2 + \cos p) dp$

$p \neq 0$

حالت سوم

$x = f(y, y')$

$y' = p \rightarrow dx = \frac{1}{p} dy$

$x = f(y, p)$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$x = 4y^2 + e^{y'} - \cos y'$

$\begin{cases} x = 4y^2 + e^p - \cos p \\ \text{نتیجه حل برای حذف } p \rightarrow \end{cases}$

$\frac{1}{p}dy = 8y\,dy + (e^p + \sin p)\,dp$

$(-\frac{1}{p} + 8y)dy + (e^p + \sin p)dp = 0$ ← نسبت به مشتق حل می‌شود

حالت چهارم:

$y = f(x, y')$

$y' = p \rightarrow dy = p\,dx$

$\begin{cases} y = f(x, p) \\ \end{cases}$

$y = x^2 y'^2 + y'^3 \rightarrow \begin{cases} y = x^2 p^2 + p^3 \\ \text{برای حذف } p \text{ وارد می‌شود} \end{cases}$

$p\,dx = 2xp^2\,dx + (2px^2 + 3p^2)dp$ ← نتیجه حل معادله

Subject:
Year. Month. Date. ( )

معادله کلرو:

صورت کلی: $y = xy' + f(y')$

در معادله کلرو به جای y' قرار دهید p معادله حل می‌شود

$y = xp + f(p)$

$dy = pdx = pdx + (x + f'(p))dp = 0$

جواب غیر عادی مسئله $x + f'(p) = 0$

$\Rightarrow y = xc + f(c)$ جواب $dp = c$

$y' = 0 = x + f'(c)$ نسبت به y

جواب غیر عادی به فرم پارامتری

$$\begin{cases} y = xp + f(p) \\ x = -f'(p) \end{cases} \Rightarrow y = -xf'(p) + f(p)$$

این دستگاه جواب غیر عادی را می‌دهد اگر p حذف شد

اگر p حذف نشد جواب غیر عادی به فرم پارامتری است

آنرا با جواب عمومی نسبت به c مساوی می‌گیریم و c می‌ماند جواب غیر عادی به فرم پارامتری و c حذف شد به به است

1- جواب عمومی $y = xy' + \sqrt{y'}$

$y = xc + \sqrt{c}$

2- جواب غیر عادی $y = xy' - y'^3$

$y = xc - c^3$

$x = 3c^2$ جواب $27y^2 = 4x^3$

37

Subject:
Year. Month. Date. ( )

4- پوش کدام است : جواب غیرعادی

$y = xy' + \frac{1}{y'}$ $\quad y = xc + \frac{1}{c}$

$x = \frac{1}{c^2}$ $\quad y^2 = x + x + 2x = 4x$

5: جواب غیرعادی

$y = xy - \frac{y^2}{4}$

$$\begin{cases} y = xc - \frac{c^2}{4} \\ x = \frac{c}{2} \end{cases} \qquad y = x^2$$

6: جواب غیرعادی

$y = xy' + \cos y'$

$$\begin{cases} y = xc + \cos c \\ x = \sin c \end{cases} \qquad y = x \sin^{-1} x + \sqrt{1 - x^2}$$

معادله لاگرانژ: جواب به فرم پارامتری است

$y = x h(y') + f(y')$ مثال $y = xy'^2 + y'$

$$\begin{cases} y = x h(p) + f(p) \\ x = \varphi(p, c) \end{cases} \qquad \begin{cases} y = xp^2 + p \\ x = \dots \end{cases}$$

P4PCO

$p\,d(x) = h(p)\,dx + (x\,h'(p) + f'(p))\,dp$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$dy = p\,dx = p^2 dx + (2px+1)\,dp$ به صورت یک معادله خطی نسبت به x حل شود

$p(1-p)\,dx = (2px+1)\,dp$

$\frac{dx}{dp} + x\frac{2}{p-1} = \frac{1}{p(1-p)}$

$2\ln(p-1)$

$x = \frac{1}{(p-1)^2}\left\{\int \frac{1-p}{p}\,dp + c\right\}$

$p=0 \quad y=0$
$p=1 \quad y=x+1$
} دو جواب غیر عادی

$y'^n + y'^{n-1} f_1(x,y) + \dots + f_n(x,y) = 0$

$(y' - h_1(x,y))(y' - h_2(x,y)) \dots (y' - h_n(x,y)) = 0$

$y' = h_i(x,y) \quad i = 1 \dots n$

برای هر یک c داریم

$\varphi_i = f(x,y,c)$

$\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n$ جواب عمومی

[redacted]

39

Subject:
Year. Month. Date. ( )

معادله مرتبه دوم:

معادله‌ای که الزاما y'' داشته باشد $\quad F(x, y, y', y'')$

$$y'' + y' f_1(x) + y f_2(x) = f(x)$$

مرتبه دوم ⟨ خطی ⟨ ضرایب: f_2, f_1 ⟩ غیرخطی

اگر f_1 و f_2 هردو عدد باشند $\Rightarrow$ معادله خطی با ضرایب ثابت $\quad y'' + ay' + by = f(x)$

" " هردو یا یکی عدد نباشند $\Rightarrow$ " " " " متغیر

اگر $f(x) = 0 \Rightarrow$ همگن

مرتبه دوم ⟨ خطی ⟨ ضرایب ثابت / ضرایب متغیر ⟩ غیرخطی (ضعیف)

غیرخطی	خطی غیرهمگن	خطی همگن
$yy'' = xy'$	$y'' + y = 1$	$y'' + y = 0$
$y = x^2$	$y = \sin x + 1$	جواب $y = \sin x$
~~$y = 3x^2$~~	~~$y = 2\sin x + 2$~~	$y = c \sin x$

در معادلات خطی غیرهمگن و غیرخطی اگر یک جواب داشته باشیم C برابر کل جواب نیست

" " همگن " " " " " " " است

و این قضیه ربطی به مرتبه معادله ندارد و برای مرتبه n صادق است.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$y'' + y = 0$ | $y'' + y = 1$ | $yy'' = xy'$

$y_1 = \sin x$ | $y_1 = \sin x + 1$ | $y_1 = x^2$

$y_2 = \cos x$ | $y_2 = \cos x + 1$ | $y_2 = 4$

$y = \sin x + \cos x$ | ~~$\dot{\varepsilon}\ y = \sin x + \cos x + ?$~~ | ~~$\dot{\varepsilon}\ y = x^2 + 4$~~

+ در معادلات خطی غیرهمگن و غیرخطی جمع جوابها جواب نیست

+ " " " همگن " " " است و برای مرتبه n صادق است

معادلات خطی همگن

$$\text{جواب} \begin{cases} y_1 & c_1 y_1 \\ y_2 & c_2 y_2 \end{cases} \Rightarrow y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = \text{جواب}$$

جواب عمومی است به شرط اینکه دو بار را مستقل باشد و از دوتا کمتر نباشد.

n " n " n جواب مستقل

شرط اینکه $c_1 y_1 + c_2 y_2$ جواب عمومی باشد است که y_1 و y_2 مستقل از هم باشند

$$\Rightarrow \frac{y_1}{y_2} \neq k \quad \text{مقدار ثابت}$$

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \dots + c_n y_n$$

اگر y_1 تا y_n جوابهای یک معادله خطی همگن باشند $y_1, y_2, \dots, y_n$ استقلال دارند اگر

41

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

مستقل $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$

مستقل $\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2$

استقلال نداریم $\begin{vmatrix} x & 4x \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$

۱- اگر y_1, y_2 دو جواب ـــــ مستقل خطی برای معادله $y''+y'f_1(x)+yf_2(x)=0$ باشند آنگاه رابطه زیر

$y_1y_2'-y_2y_1'$ $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$

۱ همیشه از صفر است
۲ کمتر ~ ~
۳ مخالف ~ ~ ✓
۴ برابر ~ ~

42

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۲- کدام یک از زیر مجموعه های زیر وابسته هستند

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos 2x & \sin^2 x \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0$$

۱) $1, e^x, e^{2x}$

۲) $\sin x, \cos x$

۳) x, xe^x

۴) $1, \cos 2x, \sin^2 x$ ✓

معادله خطی همگن با ضرایب ثابت :

$y' + ay = 0$

$\frac{dy}{y} = -a\,dx$

$y = ce^{-ax}$

$y'' + ay' + by = 0$

$y = e^{tx}$

$\Rightarrow e^{tx}(t^2 + at + b) = 0 \quad \Rightarrow (t^2 + at + b) = 0$ معادله مشخصه

ریشه ها را پیدا کرده و در جواب می گذاریم

ریشه ها

۱- $\Delta > 0 \Leftarrow t_1 \neq t_2 \in R$

$\Rightarrow$ یک جواب $e^{t_1 x}$

$\Rightarrow$ یک جواب $e^{t_2 x}$

$\frac{e^{t_1 x}}{e^{t_2 x}} = e^{(t_1 - t_2)x} \neq 0$ مستقل هستند $\Rightarrow y = c_1 e^{t_1 x} + c_2 e^{t_2 x}$

$y'' - 2y' - 3y = 0 \qquad t^2 - 2t - 3 = 0$

$3, -1 \qquad y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$y'' - 4y = 0$

± 2 $\qquad y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$

$y'' - 2y' = 0$

$0, 2 \qquad \Rightarrow y = c_1 + c_2 e^{2x}$

$t(t-1)(t+1)(t-2) = 0$ معادله معشر یک معادله دیوانسیل

$c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x} + c_4 e^{2x}$

تا وقتی که n ریشه حقیقی متمایز داریم جواب به صورت بالا محاسبه می شود

$\Delta = 0$ یک ریشه $t = 0$: 2

$y = (c_1 + c_2 x) e^{tx}$

مثال $y'' - 4y' + 4y = 0 \Rightarrow t^2 - 4t + 4 = 0 \Rightarrow t = 2$

$D^2 - 4D + 4$

$y = (c_1 + c_2 x) e^{2x}$

پرانتز : نماد اپراتوری

$D = \frac{d}{dx} \Rightarrow y' = \frac{d}{dx} y$

$D^2 = \frac{d^2}{dx^2} \qquad y'' = \frac{d^2}{dx^2} = D^2 y$

$\vdots \qquad \vdots$

$D^n = \frac{d^n}{dx^n} \qquad y^n = D^n y$

PqPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$y'' - 4y' + 4y = 0 \Rightarrow D^2y - 4Dy + 4y = 0$

$(D^2 - 4D + 4)y = 0 \Rightarrow (D-2)^2 y = 0 \qquad D = 2$

مثال:

$D(D-1)(D-2)^3 y = 0$

ریشه‌ها $= 2, 2, 2$ ریشه صفر 0 ریشه 1

$y = c_1 + c_2 e^{x} + (c_3 + c_4 x + c_5 x^2) e^{2x}$

$\Delta < 0$: 3 $\quad p \pm iq \quad , \quad q \neq 0$

$3 = i\sqrt{-4}$

$c_1 e^{(p+iq)x}$ یک جواب

$+ \quad (p-iq)x$ جواب دیگر $c_2 e$

$= e^{px}(c_1 \cos qx + c_1 i \sin qx)$

$= e^{px}(c_2 \cos qx - c_2 i \sin qx)$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$\Rightarrow y = e^{px}(A\cos qx + B\sin qx)$ A, B حقیقی و ... و y حقیقی

$A = c_1 + c_2$ $\qquad$ $A = c_1 + c_2$

$i \times (B = i(c_1 - c_2))$ $\qquad$ $-i \times (B = i(c_1 - c_2))$

$\frac{1}{2}(A + iB) = c_2$ $\qquad$ $\frac{1}{2}(A - iB) = c_1$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: $(D+1)(D-1)^2(D^2+1)(D^2-2D+5)y=0$ معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی ۷ است

$-1 \quad 1 \quad \pm i \quad 1\pm 2i$

$\beta=0, \quad q=1$

$y = c_1 e^{-x} + (c_2 + c_3 x)e^{x} + c_4 \cos x + c_5 \sin x + e^{x}(c_6 \cos 2x + c_7 \sin 2x)$

۱- $y'' + 2y' + 10y = 0 \qquad -1 \pm 3i$

$y = e^{-x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) \qquad y = A e^{-x} \sin(3x+\alpha)$

$y = e^{-x}(A\sin 3x \cdot A\cos\alpha + A\cos 3x \sin\alpha)$

$c_2 \qquad c_1$

۲- مقدار a و b چه باشد تا $y_1 = e^{-2x}$ و $y_2 = e^{3x}$ دو جواب مستقل خطی معادله‌ی زیر باشد؟

$(t+2)(t-3)=0 \qquad$ معادله‌ی مفسر $\Rightarrow t^2 - t - 6 = 0 \Rightarrow y'' - y' - 6y = 0$

$ab = 6$

۳- مرتبه‌ی y و y'' در معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه دومی که دو جواب مستقل آن e^{2x} و e^{-x} باشد کدام است

$(t-2)(t+1)=0 \qquad t^2 - t - 2 = 0 \qquad y'' - y' - 2y = 0$

$-1 \quad 2$

۴: کدام یک از توابع زیر در معادله‌ی دیفرانسیل $y''+2y'+5y=0$ صدق می‌کند

$y = e^{-t}(\cos^2 t - \sin^2 t) \qquad y = e^{-t}(\cos t + i \sin t)^2$

$y = 2e^{-t} \sin t \cos t \qquad \checkmark\ y = e^{-t}(\cos t + t \sin t)$ صدق نمی‌کند

$=$ تدریس

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$-1 \pm 2i$

$e^{-x} \cos 2x$

$e^{-x} \sin 2x$

5: برای آنکه معادله زیر خطی باشد:

$x^n y'' + y' + f(x) y^m = 0$

1- $m=1$ ✓

2- $n=0$ ، $m=1$

3- $n=0$

4- $n=m=0$

$y'' + f_1(x) y' - f_2(x) y = f(x)$

معادله دیفرانسیل خطی مرتبه همگن:

$y'' + f_1(x) y' + f_2(x) y = f(x)$

$y'' + a y' + b y = f(x)$

$y = y_h + y_p$

y_h = جواب عمومی معادله همگن متناظر $\quad y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$

y_p = یک جواب ساده بدون پارامتر معادله

$y'' + a y' + b y = f(x)$ ← معادله با ضرایب ثابت

حل از راه مشتق گیری

روشهای y_p { ضرایب نامعین / اپراتورهای معکوس / عمومی (تغییر پارامتر) } ← کوتاهتر با حفظ قضیه

معایب { فقط برای معادلات با ضرایب ثابت و برای حرتابع $f(x)$ ی توان استفاده کرد و فقط برای توابع های مشخص صادق است / محاسبات بالا دارد }

حل از راه انتگرال گیری

الهه کاسبی زاده مکانیک

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تعیین y_p با استفاده از روش ضرایب نامعین:

۱- $f(x) = M(x)$ ، $M(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه n

$y'' - 2y' + 3y = 5$ یا $5x$ یا $4x^2 - 3$

$\Rightarrow y_p = x^m \times$ (یک چند جمله‌ای کامل از درجه n)

m تعداد ریشه های صفر معادلهٔ مفسر.

مثال $y'' - 2y' + 3y = 5$

$m = 0$ ۵ درجه صفر ← چند جمله‌ای از درجه صفر

$y_p = A x^0 = A$

در معادله $0 - 0 + 3A = 5 \Rightarrow A = \frac{5}{3}$

مثال $y'' - 2y' + 3y = 5x$

$y_p = Ax + B$

در معادله $0 - 2A + 3Ax + 3B = 5x \Rightarrow \begin{cases} 3A = 5 \\ -2A + 3B = 0 \end{cases}$

مثال

$D^2(D-1)y = 7x^2 + 3$

۰ دوبار در ریشه معادله مفسر است

$y_p = x^2 (Ax^2 + Bx + C)$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$= f_1 + f_2 + \dots + f_n$

$y_{p_1} + y_{p_2} + \dots + y_{p_n}$

2: اگر $f(x) = e^{p(x)} M(x)$

$\Rightarrow y_p = x^m e^{px} \times$ (یک چندجمله‌ای کامل از درجه n)

m تعداد ریشه‌های p معادله مشخصه

p = ریشه تحمیلی

مثال: $y'' - 2y' - 3y = 5e^{x}$ $p=1$

$3, -1$ ریشه معادله مشخصه $\Rightarrow m = 0$

$y_p = Ae^x$

در معادله $A - 2A - 3A = 5 \Rightarrow A = -4$

$y'' - 2y' - 3y = 5e^x + 2xe^{-x} + 7x$ $p=-1$

f_1 f_2 یکبار

$y_{p_1} = Ae^x$ $y_{p_2} = xe^{-x}(Bx+C)$ $y_{p_3} = Dx + E$

در معادله کنار گذاشته شود و مقدار $2xe^{-x}$ قرار گیرد

مثال: $D(D-1)^3(D+1)y = x^2 + 4xe^x + 7x^2e^{-x} + 5e^{2x}$

$y_{p_1} = x(Ax^2 + Bx + C)$

$y_{p_2} = x^3e^x(A_1x + B_1)$

$y_{p_3} = xe^{-x}(A_2x^2 + B_2x + C_2)$

$y_{p_4} = A_3e^{2x}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$f(x) = M(x)\cos qx + N(x)\sin qx$: 3

$$y_p = x^m \left(R(x)\cos q(x) + S(x)\sin q(x) \right)$$

• m : تعداد ریشه های $+iq$ معادله مفسر

• R و S دو چند جمله ای از درجه n و n بزرگترین درجه N و M است

مثال $y'' + 4y = x\cos 2x + 7\sin 3x$

$\pm 2i \qquad +2i \qquad +3i$

$$y_{p_1} = x\left((Ax+B)\cos 2x + (A_1x+B_1)\sin 2x \right)$$

$$y_{p_2} = A_2\cos 3x + B_2\sin 3x$$

$f(x) = e^{px}\left(M(x)\cos qx + N(x)\sin qx\right)$ 4

$$y_p = x^m e^{px} \left(R(x)\cos qx + S(x)\sin qx \right)$$

• m تعداد ریشه های $p+iq$ معادله مفسر

$\pm i \qquad 1\pm 2i \qquad -1\pm 3i$

مثال : $D(D^2+1)(D^2-2D+5)(D^2+2D+10)^2 y = x + x\cos x + x^2 e^x \sin 2x + 5e^{-x}\sin 3x + xe^x \cos 3x$

50

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$y_{P_1} = x(Ax+B)$

$y_{P_2} = x((A_1x+B_1)\cos x + (A_2x+B_2)\sin x)$

$y_{P_3} = xe^x((A_3x^2+B_3x+C_3)\cos 2x + (A_4x^2+B_4x+C_4)\sin 2x)$

$y_{P_4} = x^2e^{-x}(A_5\cos 3x + B_5\sin 3x)$

$y_{P_5} = e^x((A_6x+B_6)\cos 3x + (A_7x+B_7)\sin 3x)$

۱- جواب عمومی

$y'' - 4y = -4$

$r = 0, 4$

$c_1 + c_2e^{4x} - x$

$c_1 + c_2e^{4x} + x$ ✓

$c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$ ✓

$c_1xe^{4x} + x^2$

۲- جواب خصوصی

$y'' - 4y' + 3y = e^{3x}$

$r = 1, 3$

$y = Ae^x + Be^{2x} + \frac{1}{2}xe^{3x}$

$y = Ae^x + Be^{2x} + xe^{3x}$

$y = Ae^x + Be^{3x} + \frac{x}{2}e^{3x}$

$y = Ae^x + Be^{3x} + x^2\frac{e^{3x}}{e}$

51

Subject:

Year. Month. Date. ( )

: 3

$(D^2-1)y = 8xe^x$

$1, -1$

$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \cos x$ ~~y~~

$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{x}{2}\sin x$

$y = e^{2x}(c_1 + c_2 x + \frac{x^2}{2})$

✓ $y = c_1 e^{-x} + e^x(c_1 - 2x + 2x^2)$

$y_p = xe^x(Ax+B)$

: 4 کدام گزینه یک جواب خصوصی معادله زیر است

$y''' + 2y'' + y' - 2y = e^x + \cos x$

جزء ریشه‌های معادله مشخصه $r = e^{1\cdot x} = e^x$

Ae^x

$B\cos x + C\sin x$

: 5 جواب عمومی کدام است

$y'' - 4y' + 5y = 2e^{3x}$

$2 \pm i$ $\quad y_h = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

$y_p = Ae^{3x} \Rightarrow y_p = e^{3x}$

$y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + e^{3x}$

$Ae^{2x}\sin(x+\alpha) - e^{3x}$ -1

$\dot{\varepsilon}\ Ae^{1x}\sin(2x+\alpha) + e^{3x}$ -2

✗ ~~$-2e^{3x}$~~ -3

✓ $Ae^{2x}\sin(x+\alpha) + e^{3x}$ 4

Subject:
Year. Month. Date. ( )

6: کدام تابع در معادله صدق می‌کند

$y'' - 2y' - 3y = 3e^{2x}$

3 و -1

$c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} + A e^{2x}$ $\quad A = -1$

↓ ↓

1 0

از گزینه‌ها

1. $e^x - e^{2x}$
2. $e^x + e^{2x}$
3. $e^{3x} - e^{2x}$ ✓
4. $e^{3x} + e^{2x}$

7: جواب عمومی معادله $y^{(4)} - y = x\sin x$ فرایب نامعین جواب خصوصی را تعیین کنید

i- و i و 1- و 1

$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$

$x\left[(c_5 + c_6 x)\cos x + (c_7 + c_8 x)\sin x\right]$

8: جواب خصوصی معادله $y'' + 9y = e^x \cos 2x$ در $x = 0$ کدام است

$\pm 3i$

از روش ضرایب نامعین استفاده

$e^x A \cos 2x$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$y'' + 4y = \cos x$ اگر خود $\cos x$ رابگیریم کافی است و نیازی به $\sin$ ندارد

$y'' - 2y' + 7y = \sin x$ $A\sin + B\cos$

اگر معادله مشتق فرد نداشت کافیست حاصل را بار مرتبه مشتق گرفت و جواب خصوصی را بدست آورد

Subject:

Year. Month. Date. ( )

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$y'' + y' f_1(x) + y f_2(x) = f(x)$$

$$y = y_h + y_p$$

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

روش عمومی

در این روش یک w به صورت زیر محاسبه می‌کنیم

$$w = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

$$y = -y_1 \int \frac{f y_2}{w} dx + y_2 \int \frac{f y_1}{w} dx$$

$$(D-1)^2 y = \frac{e^t}{t^2} \quad -1$$

$$y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x} \quad -2$$

$$(D^2 - 9D + 18) y = e^{e^{-3x}} \quad -3$$

حل 1 :

$$y_1 = e^t \qquad e^t$$

$$y_2 = te^t \qquad e^t + te^t$$

$$\Rightarrow w = e^{2t} \qquad \Rightarrow y = -e^t \int \frac{te^t}{t^2 e^{2t}} dt + te^t \int \frac{e^t e^t}{t^2 e^{2t}} dt$$

حل 2 :

$$y_1 = e^{2x} \qquad 2e^{2x}$$

$$y_2 = xe^{2x} \qquad e^{2x} + 2xe^{2x}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$w = e^{4x}$

$$y = -e^{2x}\int \frac{e^{2x}xe^{2x}}{xe^{4x}}dx + xe^{2x}\int \frac{e^{2x}e^{2x}}{xe^{4x}}dx$$

حل 3:

$y = e^{3x} \quad 3e^{3x}$

$w = 3e^{9x}$

$y_2 = e^{6x} \quad 6e^{6x}$

$$y = -e^{3x}\int \frac{e^{-3x}e^{6x}}{3e^{9x}}dx + e^{6x}\int \frac{e^{-3x}e^{+3x}}{3e^{9x}}dx$$

دستورات کاهش مرتبه

برای معادلات مرتبه دوم غیر خطی

$F(x, y, y', y'') = 0$

حالت اول: $F(x, y', y'') = 0$ فاقد تابع

$y' = p \Rightarrow y'' = \frac{dp}{dx}$

$\Rightarrow F(x, p, \frac{dp}{dx}) = 0$

$(1+x^2)y'' + 2xy' = x^3$ فاقد y -1

$p' + \frac{2x}{1+x^2}p = \frac{x^3}{1+x^2}$

$\Rightarrow p = \frac{1}{1+x^2}\left[\int x^3 dx + c_1\right]$

$\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \ln(1+x^2)$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$p=\left(\frac{1}{4}\frac{x^4}{1+x^2}+\frac{c_1}{1+x^2}\right)=\frac{dy}{dx}$$

$$(1+x^2)y''+2xy'=\frac{1}{1+x^2} \qquad -2$$

$$xy'''-2y''=0 \qquad xp'=2p \qquad -3$$

$$\frac{dp}{p}=2\frac{dx}{x} \Rightarrow p=c_1x^2 \qquad y''=c_1x^2 \qquad y'=c_1x^3+c_2$$

$$y=c_1x^4+c_2x+c_3$$

$$xy''+y'=2x\ln x \qquad p'+\frac{1}{x}p=2\ln x \qquad -4$$

حالت دوم: $F(y,y',y'')=0$ فاقد متغیر

$$y'=p \Rightarrow y''=\frac{dp}{dx}$$

$F(y,p,\frac{dp}{dx})=0$ سه متغیر غیر مستقل $\Rightarrow y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\cdot\frac{dp}{dy}$

$$y''=p\frac{dp}{dy}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

-1

$y'' + y'^3 e^{2y} = 0$ $\quad p\frac{dp}{dy} + p^3 e^{2y} = 0$

$\frac{dp}{p^2} + e^{2y}dy = 0$ $\quad \Rightarrow -\frac{1}{p} + \frac{1}{2}e^{2y} = c_1$

$\frac{1}{p} = \frac{1}{2}e^{2y} + c_1 \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}e^{2y} + c_1$

$dx = (\frac{1}{2}e^{2y} + c_1)dy$ $\quad x = \frac{1}{4}e^{2y} + c_1 y + c_2$

-2

$yy'' + y'^2 = 1$ $\quad y'' = p\frac{dp}{dy}$ $\quad y$

$yp\frac{dp}{dy} + p^2 = 1$ $\quad \frac{dp}{dy} + \frac{p}{y} = \frac{1}{py}$

$p\frac{dp}{dy} + \frac{p^2}{y} = \frac{1}{y}$ $\quad$ برنولی $\quad u = p^2$

$\frac{du}{dy} = 2p\frac{dp}{dy}$ $\quad \frac{du}{dy} + \frac{2}{y}u = \frac{2}{y}$

با جداسازی

$\frac{p\,dp}{1-p^2} + \frac{dy}{y} = 0$

-3

تغییرمکان $y'' + \sin y = 0$ $\quad \Rightarrow$ سرعت وقتی $y = ?$ $\quad y(0) = \frac{\pi}{3}$

$y'(0) = 0$

$p\frac{dp}{dy} + \sin y = 0$ $\quad \frac{1}{2}p^2 = \cos y + c$

59

Subject:
Year Month Date ( )

$\Rightarrow y' = p = \sqrt{2\cos y + c}$ $\quad c = -1$

$0 = \sqrt{2\cos\frac{\pi}{3} + c} \Rightarrow c = -1$

-4

$2yy'' - y'^2 = 0 \qquad 2yp\frac{dp}{dy} + p^2 = 0$

$\frac{dp}{p} + \frac{1}{2}\frac{dy}{y} = 0 \qquad \ln p y^{1/2} = \ln c_1$

$py^{1/2} = c_1 \Rightarrow y^{1/2}dy = c_1 dx$

-5

$y'' = xy^{-3}$

$\frac{dp}{dx} = xp^3 \qquad \frac{dp}{p^3} = x\,dx \qquad \frac{1}{p^2} = -x^2 + c_1$

$y'^2 = \frac{1}{c_1 - x^2} \Rightarrow y' = \sqrt{\frac{1}{c_1 - x^2}}$

6

$y'' - 3y^2 = 0 \qquad y'(0) = 4 \quad , y(0) = 2$

$p\frac{dp}{dy} = 3y^2 \qquad p\,dp = 3y^2 dy \qquad p^2 = \frac{3}{2}y^3 + c_1$

$y' = \sqrt{\frac{2}{2}y^3 + c_1} \Rightarrow c_1 = 0 \qquad \Rightarrow y' = \sqrt{2y^3}$

$y' = \sqrt{2}y^{3/2} \qquad y^{-3/2}dy = \sqrt{2}\,dx$

PqPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$xy'' + y' = 1 + x^2$ 7

حالت سوم: $F(x, y, y', y'') = 0$

$F(x, \lambda y, \lambda y', \lambda y'') = \lambda^{\alpha} F(x, y, y', y'')$ هرگاه ... نسبت به y و مشتقات ... همگن است

$\Rightarrow y = e^{\int z dx}$ $\quad z = f(x)$

1- $x^2 yy'' = (y - xy')^2$ ... همگن است

$y = e^{\int z dx} \Rightarrow y' = z e^{\int z dx} \Rightarrow y'' = z' e^{\int z dx} + z^2 e^{\int z dx}$

$x^2 yy'' - y^2 - x^2 y'^2 + 2xyy' = 0 \quad e^{2\int z dx}(x^2 z' + x^2 z^2 - 1 - x^2 z^2 + 2xz) = 0$ مرتبه $\frac{1}{2}$

همیشه e^{α} بیرون می‌افتد

مرتبه همگنی $= 2$

1) $xz' = 2 + xz$ 2) $x^2 z' = 1 - 2xz$ ✓

3) $xzz' = 1 + xz$ 4) $xzz' = 2 - 2xz$

$x^2 z' = 1 - 2xz \quad z' + \frac{2}{x} z = \frac{1}{x^2}$

$yy'' + y'^2 + xy^2 = 0$

معادلات خطی با ضرایب متغیر:

معادله کوشی از مرتبه دوم: $x^2 y'' + axy' + by = f(x)$

تبدیل به معادله خطی با ضرایب ثابت $\Rightarrow$ تغییر متغیر $x = e^z$

$z = \ln x \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dz}$

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$y' = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dz^2}$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} + a\frac{dy}{dz} + by = f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dz^2} + (a-1)\frac{dy}{dz} + by = f(x) \Rightarrow$$ معادله دیفرانسیل ناهمگن

$t^2 + (a-1)t + b = 0$ معادله مشخصه حاوی حقیقی شود فقط از a یک واحد کم شود

$t_1 \neq t_2 \in R$ $\Delta > 0$

$$y = c_1 x^{t_1} + c_2 x^{t_2}$$

t $\Delta = 0$

$$y = (c_1 + c_2 \ln x)\, x^{t}$$

$p \pm iq$ $\Delta < 0$

$$y = x^{p}\left(c_1 \cos(q \ln x) + c_2 \sin(q \ln x)\right)$$

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$$ -1

$$t^2 - 4t + 4 = 0 \qquad t = 2$$

$$y = (c_1 + c_2 \ln x)\, x^2$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

2

$x^2 y'' + x y' + 9y = 0$

3

$x^2 y'' + x y' + 5y = \ln x$

$t^2 - 2t + 5 = 0 \qquad 1 \pm 2i$

$y_h = x\left(c_1 \cos(2\ln x) + c_2 \sin(2\ln x)\right)$

$t^2 - t + 5 = 0 \qquad \ddot{y} - \dot{y} + 5y = Z \qquad y_p = AZ + B$

$0 - 2A + 5AZ + 5B = Z$

$5AZ = Z \qquad 5A = 1 \qquad A = \frac{1}{5} \qquad y_p = \frac{Z}{5} + \frac{?}{25}$

$-2A + 5B = 0 \qquad B = \frac{2}{25}$

4

$x^2 y'' - 2y = 0 \qquad t^2 - t - 2 = 0$

5

$t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + 3t \frac{dy}{dt} + by = 0$

کلیه مقادیری از ثابت b که به ازای آنها جواب کراندار دهند

$t \to \infty$

$\lambda^2 + 2\lambda + b = 0 \qquad -1 \pm \sqrt{1-b}$

63

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$y_1 = c_1 t^{(-1-\sqrt{1-b})} + c_2 t^{-1+\sqrt{1-b}}$

لازم است که وقتی t به سمت بینهایت می‌رود رابطه b محدود باشد آیا است؟

$-1+\sqrt{1-b} < 0 \qquad 0 < \sqrt{1-b} < 1$

$0 < 1-b < 1 \Rightarrow -1 < -b < 0 \Rightarrow 0 < b < 1$

معادله خطی با ضرایب متغیر 2 :

$y'' + y' f_1(x) + y f_2(x) = f(x)$

فرض y_1 یک جواب معادله همگن متناظر موجود باشد

$y_1'' + y_1' f_1 + y_1 f_2 = 0$

$y = u y_1$ جواب عمومی =

$u'' y_1 + 2u' y_1' + u y_1'' \quad , \quad u' y_1 + u y_1'$

$u'' y_1 + 2u' y_1' + u y_1'' + f_1 u' y_1 + f_1 u y_1' + u y_1 f_2 = f$

$u(y_1'' + f_1 y_1' + f_2 y_1) = 0$

$\Rightarrow u'' + u'\left(\frac{2y_1'}{y_1} + f_1\right) = \frac{f}{y} \Rightarrow$ معادله فاقد تابع

$\Rightarrow u' = p \Rightarrow p' + p\left(\frac{2y_1'}{y_1} + f_1\right) = \frac{f}{y_1}$ خطی شود

معمولاً $f = 0$ است =

$u'' + u'\left(\frac{2y_1'}{y} + f_1\right) = 0$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\frac{u''}{u'} + 2\frac{y_1'}{y_1} = -f_1 \qquad \ln u' y_1^2 = -\int f_1 dx$$

$$u' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int f_1 dx} \Rightarrow u = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int f_1 dx} dx$$

u دو پارامتر دارد

چون معادله همگن است $\Rightarrow y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ ، $y_2 = u y_1$ برای تابعی که u مستقل است

تعیین y_1

اگر $f_1 + x f_2 = 0 \Rightarrow y_1 = x$

اگر $1 + f_1 + f_2 = 0 \Rightarrow y_1 = e^x$

اگر $1 - f_1 + f_2 = 0 \Rightarrow y_1 = e^{-x}$

$\alpha^2 + \alpha f_1 + f_2 = 0 \Rightarrow y_1 = e^{\alpha x}$ ← درجه ۱ = درجه

معادله دارای توابع دوستی زیرا که درجه

۱- $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0 \qquad y'' - \frac{2x}{1-x^2} y' + \frac{2}{1-x^2} = 0$

$f_1 + x f_2 = 0 \Rightarrow y_1 = x \quad , y_2 = ux$

$$u = \int \frac{1}{x^2} e^{+\int \frac{2x}{1-x^2} dx} dx = \int \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1-x^2}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

می‌توان بدون رابطه انتگرال‌گیری حساب کرد و در $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ جای گذاری کرد

2-
$$(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2 e^x$$

$$y_1 = x$$

$$p' + p\left(\frac{2}{x} - \frac{x}{x-1}\right) = (x-1)e^x$$

$$p \Rightarrow u \Rightarrow y = uy_1$$

3-
$$x^2(x^2-1)y'' - x(x^2+1)y' + (x^2+1)y = 0$$

$$y_1 = x$$

$$u = \int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}dx} dx$$

4-
$$(x-2)y'' - (4x-7)y' + (4x-6)y = 0$$

$$(x-2)\alpha^2 - (4x-7)\alpha + (4x-6) = 0$$

بر اساس قوای x مرتب شود

$$x(\alpha^2 - 4\alpha + 4) - 2\alpha^2 + 7\alpha - 6 = 0$$

$$\alpha = 2$$

$$y_1 = e^{2x} \qquad y_2 = u e^{2x}$$

$$u = \int \frac{1}{e^{4x}} e^{\int \frac{4x-8+1}{x-2}dx} = \int (x-2)\,dx$$

66

Subject:
Year. Month. Date. ( )

-5

$y_1 = \sqrt{1-x}$ جواب $\Rightarrow y'' + \frac{1}{4(x-1)^2} y = 0$

جواب دوم کدام است ؟

$\Rightarrow y_2 = u y_1 \qquad u = \int \frac{1}{1-x} e^{0} dx$ همگن

حل معادلات با استفاده از سری توانی :

$f(x) \quad , x=a$

تابع $f(x)$ در $x=a$ تحلیلی است اگر در $x=a$ دارای بسط تیلور با شعاع همگرایی مثبت باشد

بسط مک لورن $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$

$(x-0) \qquad (x-0)$ تیلور

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$

$y'' + y' f_1(x) + y f_2(x) = f(x)$

اگر سه تابع f_1 ، f_2 و f در نقطه ای تحلیلی باشند می توان بسط تیلور را به کار گرفت

ا- اگر $y(x)$ جواب معادله دیفرانسیل زیر با شرط اولیه $y(0)=0$ ، $y'(0)=1$ باشد مشتق مرتبه سوم در نقطه (0) کدام است

$y(0)=0 \qquad y'(0)=1 \qquad y''(0)=? \qquad y'''(0)=?$

$e^{-x} y'' + x y' + y = 3 \qquad y''(0) + 0 + 0 = 3 \qquad y''(0) = 3$

$-e^{-x} y'' + e^{-x} y''' + y' + x y'' + y' = 0 \qquad -3 + y'''(0) + 1 + 0 + 1 = 0$

$y'''(0) = 1$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

2- اگر $y(x)$ جواب معادله دیفرانسیل زیر با شرط زیر باشد در بسط تابع $y(x)$ برحسب توانهای صعودی x ضریب x^3 کدام است

$y(0)=-2$ و $y'(0)=2$

$y''-(x^2+1)y=0$ $\quad \frac{y'''}{3!}=?=\frac{1}{3}$

$y''=2xy+(x^2+1)y'$ $\quad y'''_{(0)}=2$

3- ضریب x^3 کدام است

$y''+y\sin x+ye^x=0$ $\quad y_{(0)}=y'_{(0)}=1$

$y''_{(0)}=-1$ $\quad y''+y'\sin x+y'\cos x+y'e^x+ye^x=0$

$y'''(0)=-1-1-1=-3$ $\quad \frac{-3}{3!}=-\frac{1}{2}$

4- هرگاه $y=\sum a_n x^n$ جواب به صورت سری توانی برای معادله $y''-2xy'+8y=0$ و $y'(0)=0$ و $y(0)=12$ باشد آنگاه ضریب a_2 کدام است

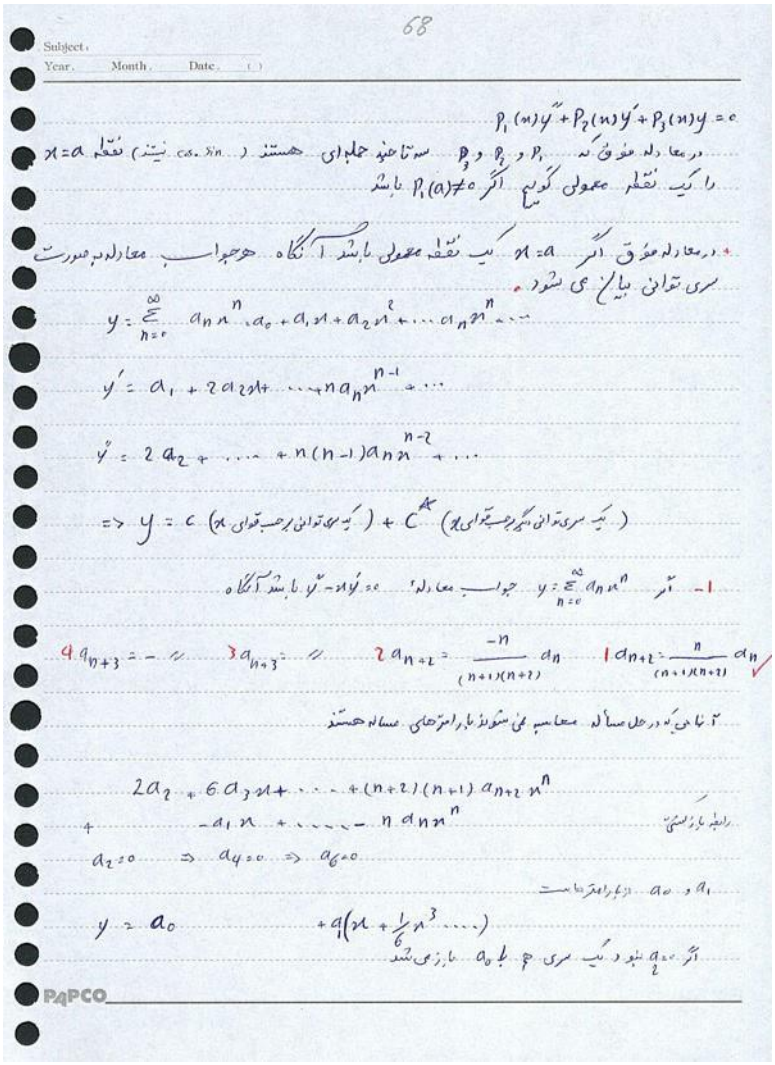
$a_2=\frac{y''(0)}{2!}$ $\quad y''_{(0)}=-8\times 12$ $\quad a_2=-48$

5- $y''+xy=0$ $\quad$ " $\quad$ "

$y_{(0)}=y'_{(0)}=1$ ضریب a_3 کدام است

$y''_{(0)}=0$

$y''_{(0)}+1=0$ $\quad y''=-1$ $\quad a_3=\frac{-1}{6}$



68

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$P_1(x)y'' + P_2(x)y' + P_3(x)y = 0$

در معادله فوق که P_1 و P_2 و P_3 سه تابع جمله‌ای هستند (نه $\cos x$ و $\sin x$) نقطه $x=a$ را یک نقطه معمولی گوییم اگر $P_1(a) \neq 0$ باشد

+ در معادله فوق اگر $x=a$ یک نقطه معمولی باشد آنگاه جواب معادله به صورت سری توانی بیان می شود.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots a_n x^n + \dots$$

$$y' = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$$

$$y'' = 2a_2 + \dots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \dots$$

$$\Rightarrow y = c\,(x \text{ یک سری توانی برحسب توانهای}) + C^{*}\,(x \text{ یک سری توانی دیگر برحسب توانهای})$$

۱- اگر $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ جواب معادله $y'' - xy' = 0$ باشد آنگاه

$a_{n+2} = \frac{n}{(n+1)(n+2)} a_n$ ✓ $\quad 2\, a_{n+2} = \frac{-n}{(n+1)(n+2)} a_n \quad 3\, a_{n+3} = \dots \quad 4\, a_{n+3} = \dots$

آنها یی که در حل مسأله معادیر می شوند پارامترهای مسأله هستند

$$2a_2 + 6a_3 x + \dots + (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$
$$- a_1 x - \dots - n a_n x^n$$

رابطه بازگشتی

$a_2 = 0 \Rightarrow a_4 = 0 \Rightarrow a_6 = 0$

a_0 و a_1 دو پارامتر ما هستند

$$y = a_0 + a_1\left(x + \frac{1}{6}x^3 + \dots\right)$$

اگر $a_2 \neq 0$ بود دیگر سری بر حسب a_0 باز می شد

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مسأله قبل $y'' - xy' + y = 0$ 2

$2a_2 + 6a_3 x + \dots + (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n - \dots$

$-a_1 x - \dots - n a_n x^n - \dots$

$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n - \dots$

$a_2 = -\frac{1}{2} a_0 \quad , a_3 = 0$

if $y'' - xy' - y = 0$

$a_{n+2} = \frac{1}{(n+2)} a_n$

$-a_0 \quad -a_1 x \quad \dots \quad -a_n x^n$

$a_2 = \frac{1}{2} a_0 \qquad a_3 = \frac{1}{3} a_1$

$y = a_0 \left(1 + \frac{1}{2} x^2 + \dots\right) + a_1 \left(x + \frac{1}{3} x^3 + \dots\right)$

شعاع همگرایی از رابطه بازگشتی گرفته می شود

$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{\text{جمله بعد}}{\text{جمله قبل}} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+2} = 0 \quad R = \infty$ شعاع همگرایی

جمله بعد از a_n می شود a_{n+2}

Subject:
Year. Month. Date. ( )

معادله لژاندر: $(1-x^2)y'' - 2xy' + m(m+1)y = 0$ $\quad P_1(a) \neq 0$

نقطه $x=0$ یک نقطه معمولی تلقی می‌شود

رابطه بازگشتی $\Rightarrow$ جایگذاری $\quad c_{n+2} = -\frac{(m-n)(m+n+1)}{(n+2)(n+1)} c_n$

شعاع همگرایی $\quad R=1 \quad$ فاصله همگرایی $\quad [-1,1]$

اگر به n صفر داده شود c_2 و اگر یک داده شود c_3 حساب می‌شود c_0 و c_1 قابل محاسبه نیستند.

$$\Rightarrow y = c_0(1 + \square x^2 + \not{\square} x^4) + c_1(x + \square x^3 + \not{\square} x^5 + \dots)$$

$c_6 = 0 \quad$ if $m(m+1) = 20 \Rightarrow m=4 \Rightarrow c_6 = c_{n+2} \Rightarrow n=4 \Rightarrow (m-n)=0$

$\Rightarrow c_6 = 0 \Rightarrow c_8 = 0 \Rightarrow \dots$

$m(m+1) = 12 \quad m=3$

$$y = c_0(1 + \not{\square} x^2 + \square x^4 + \dots) + c_1(x + \not{\square} x^3)$$

یک چند جمله‌ای از درجه m که فقط زوج است یا فقط فرد حتماً در معادله صدق می‌کند.

مثل $ax^5 + bx^3 + cx = 0$

$m=4 \quad c_0 + c_2 x^2 + c_4 x^4$ در معادله صدق می‌کند

$$\Rightarrow c_0(1 + \square x^2 + \square x^4)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

71

$$C_{n+2} = -\frac{(m-n)(m+n+1)}{(n+2)(n+1)} C_n \quad \Rightarrow C_n = \frac{\bigcirc}{\square} C_{n+2}$$

$$\Rightarrow C_4 (x^4 + \oslash x^2 + \square)$$

اگر C_n را مطابق زیر بگیریم

$$C_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$$

$\Rightarrow$ جواب مثلا $12x^4 + 5x^2 + 6$ چند جمله‌ای زوایدار

مثلا

چند جمله‌ای زوایدار را با $P_n(x)$ نشان می‌دهند

$m=4 \Rightarrow$ جواب $= P_4(x)$ $\quad$ عزیز $= 20 \Rightarrow$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k! (n-k)! (n-2k)!} x^{n-2k}$$

لازم و ثابت حقیقت شود

فرمول رودریگ

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

$$x=1 \Rightarrow \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1) t^n \Rightarrow P_n(1) = 1$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

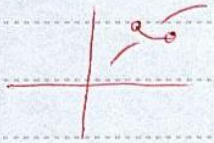
} حفظ شوند

شرط تعامد P_n ها

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = 0 \qquad m \neq n$$

$$\int_{-1}^{1} (P_n(x))^2\, dx = \frac{2}{2n+1}$$

اگر تابع f در شرایط قضیه دیریکله صدق کند (تعداد انفصال محدود باشد و در نقاط انفصال حد چپ و راست موجود باشد (تابع پیوسته قطعه ایست)) و تابع و مشتق آن به طور قطعه ای پیوسته باشد، در این صورت در نقاط پیوستگی تابع $f(x)$ را می توان به صورت زیر بسط داد:



$$f(x) = \sum_{0} c_n P_n(x)$$

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\, dx$$

و در نقطه ناپیوستگی میانگین حد چپ و راست می شود.

73

Subject:
Year. Month. Date. ( )

1- $\int_{-1}^{1} (\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma)\, P(x)\, dx = 0$ (زوج، $2k-1$ فرد)

2- $P_2(x) = ax^2 + Bx + \gamma$ ، $-1 < x < 1$ ، $P_1 = x$ ، $P_0(x) = 1$

مقادیر α و B و γ چگونه باشند که P_0 و P_1 و P_2 یک مجموعهٔ متعامد باشند

B نباید باشد $\Leftarrow B = 0$

$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

$\int_{-1}^{1} P_1(x) P_2(x)\, dx$ ، $\int_{-1}^{1} P_0(x) P_2(x)\, dx$ ، $\int_{-1}^{1} (P_n(x))^2\, dx = \frac{?}{2n+1}$

سه معادله سه مجهول

3- $\int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^2) P_{2n+1}(x)\, dx = 0$

4- P_2 و y_1 جواب و $(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$ از اولر با اندیس $m = 2$

$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ ، جواب $= y_2$ P_1 از اولر با اندیس 1

$\int_{-1}^{1} x y_1 y_2\, dx = 0$

$\int_{-1}^{1} y_1 y_2\, dx = 0$ ✓

$\int_{-1}^{1} y_1 y_2\, dx = \frac{?}{5}$

$\int_{-1}^{1} y_1 y_2\, dx = \frac{?}{3}$

74

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\int_{-1}^{1} x^3 P_2(x)\,dx = 0 \qquad -5$$

$$\int_{-1}^{1} (x+1) P_0\,dx = \qquad P_0 = 1 \qquad -6$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} (x+1)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$P_1(x)\,y'' + P_2(x)\,y' + P_3(x)\,y = 0$$

P_1 و P_2 و P_3 سرتا، چندجمله‌ای

اگر $P_1(a) = 0$ آنگاه a یک نقطه منفرد است.

$$P_1(a) = 0 \Rightarrow P_1(x) = (x-a)(Q(x))$$

$$\Rightarrow y'' + \frac{g(x)}{(x-a)}\,y' + \frac{h(x)}{(x-a)^2}\,y = 0$$

اگر خارج‌قسمت منفرد تحلیلی نیست

$g(x) = \frac{\text{چندجمله‌ای}}{\text{چندجمله‌ای}}$ گویا =

اگر $g(x)$ و $h(x)$ در $x = a$ تحلیلی باشند آنگاه a را منفرد منظم گویند و اگر (لااقل) یکی تحلیلی نباشد منفرد نامنظم است.

(منفرد)

-1 ✗ در معادله زیر نوع نقاط تکین را تعیین کنید

$$x^2(x-1)^3 y'' + x(x-1)y' + y = 0$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

75

نقاط منفرد

تحلیلی $g(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ $\Rightarrow$ $x=0$

$x=0$ منفرد منظم $\Rightarrow$

تحلیلی $h(x)=\frac{1}{(x-1)^3}$

$x=1$ منفرد نامنظم $\Rightarrow$ در $x=1$ تحلیلی نیست $g(x)=\frac{1}{x(x-1)}$ $\Rightarrow$ $x=1$

در حالت منفرد نامنظم مسأله حل می شود

2 نقاط تکین $0,1$ $x^2(1-x)y''+y'-y=0$

تحلیلی نیست $g(x)=\frac{1}{x(1-x)}$ $\Rightarrow x=0$ نقطه تکین نامنظم $x=0$

تحلیلی $\Rightarrow h(x)=-\frac{x-1}{x^2}$ $g(x)=\frac{1}{x^2}$ $x=1$

$x=1$ منفرد منظم

فرض شود $x=0$ یک نقطه منفرد منظم باشد

$P_1(x)y''+P_2(x)y'+P_3(x)y=0$

$y''+\frac{g(x)}{x}y'+\frac{h(x)}{x^2}y=0$

$g(x)$ و $h(x)$ هردو در $x=0$ تحلیلی باشند.

اگر $x=0$ یک نقطه منفرد منظم برای معادله باشد آنگاه معادله دارای یک جواب به صورت (لااقل) سری توسعه یافته سری توانی است

$y=x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \quad , a_0\neq 0$

96

Subject:
Year. Month. Date. ( )

معادله شاخصی $\Rightarrow r^2 + r(g(0)-1) + h(0) = 0$ ضریب کمترین توان در اصطلاح چیست؟

1- ریشه‌های معادله شاخصی معادله زیر کدام است

$$3x(3x+2)y'' - 4y' + 4y = 0$$

ابتدا g و h را تعیین می‌کنیم

$$g(x) = \frac{-4}{3(3x+2)} \quad , \quad h(x) = \frac{4x}{3(3x+2)}$$

$$r^2 + r\left(-\frac{2}{3} - 1\right) + 0 = 0 \qquad r_1 = 0 \quad r_2 = \frac{5}{3}$$

2- ریشه‌های معادله شاخصی کدام است

$$x^2y'' - 3xy' + (x+4)y = 0$$

$$g(x) = -3 \quad , \quad h(x) = x+4 \qquad \Rightarrow r^2 + r(-3-1) + 4 = 0$$

$$r = 2, 2$$

3- ریشه‌های معادله شاخصی کدام است

$$xy'' + y' + y = 0 \qquad g(x) = 1 \quad , \quad h(x) = x$$

$$r^2 + r(1-1) + 0 = 0 \qquad r_1 = r_2 = 0$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

77

حالت های بررسی

1 معادله شاخصی دارای دو ریشه متمایز $r_1 \neq r_2$ و تفاضل ریشه ها عدد صحیح نباشد

$y_1 = x^{r_1} \sum_0^\infty \dots$

$y_2 = x^{r_2} \sum_0^\infty \dots$

$\Rightarrow \frac{y_1}{y_2} = x^{r_1 - r_2} (\dots$

$y_1 = x^{r_1} \sum_0^\infty a_n x^n$ ، $y_2 = x^{r_2} \sum_0^\infty b_n x^n$

2 $\Delta = 0$ و یک ریشه بدست آید: برای حالت دوم جواب را بصورت زیر در نظر می گیریم

$y_1 = x^r \sum_0^\infty a_n x^n$

$y_2 = u y_1$ که u تابعی از x خارج قسمت

$y_2 = y_1 \ln x + x^r \sum_1^\infty b_n x^n$

جواب شامل تابع log است

اگر بجای 1 صفر گذاشته باز گزینه درست است ولی درست تر 1 است

3 $r_1 > r_2$ و تفاضل ریشه ها عدد صحیح است

جواب اول با r_1 برابر است

$y_1 = x^{r_1} \sum_0^\infty a_n x^n$

در اکثر مواقع $a_0 = 1$ می شود

$y_2 = k y_1 \ln x + x^{r_2} \sum_0^\infty b_n x^n$

78

Subject:
Year. Month. Date. ( )

1- دوجواب مستقل معادل $3xy'' + 2y' + y = 0$ به چه صورت است؟

$$g(x) = \frac{2}{3} \qquad h(x) = \frac{x}{3}$$

$$r^2 + r\left(\frac{2}{3} - 1\right) + 0 = 0 \qquad r^2 - \frac{1}{3}r = 0 \qquad r_1 = 0 \;,\; r_2 = \frac{1}{3}$$

$$y_1 = x^{\frac{1}{3}} \sum \cdots \;,\; y_2 = \sum \cdots$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y$$

2- جواب کلی مستقل

$$3x(x+1)y'' + 2(x+1)y' + 4y = 0$$

$$g(x) = \frac{2(x+1)}{3(x+1)} = \frac{2}{3} \qquad h(x) = \frac{4x}{3(x+1)}$$

$$r^2 + r\left(\frac{2}{3} - 1\right) + 0 = 0 \qquad r_1 = 0 \quad r_2 = \frac{1}{3}$$

جواب کلی دارد

3- جواب مستقل خطی شده $x > 0$ $x^2y'' + 3xy' + (1+x)y = 0$

$$g(x) = \frac{3x}{x} = 3 \qquad h(x) = \frac{x^2(1+x)}{x^2}$$

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \qquad r_1 = r_2 = -1$$

$$y_1 = x^{-1} \sum a_n x^n \qquad y_2 = y_1 \ln x + x^{-1} \sum b_n x^n$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

معادلهٔ بسل !

فرم کلی $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$

سه چند جمله‌ای که ضریب y'' در $x=0$ صفر می‌شود ($x=0$ صفر ۲ تایی)

$x=0 \Rightarrow g(x)=1 \quad , \quad h(x)=x^2-\nu^2$

$r_1 = \nu$

$r_2 = -\nu$

اگر ν صحیح باشد حالت سوم

اگر ν صفر باشد حالت دوم

رابطهٔ بازگشتی معادلهٔ بسل

$$c_{n+2} = \frac{c_n}{(n+2)(n+2+2\nu)}$$

شروع همگرایی سری بینهایت است و همه جا جواب می‌دهد

r_1 را در مسأله می‌گذاریم تا اگر در حالت سوم است رشته برابر صفر باشد و اگر حالت دوم و سه است عوض نمی‌کند

$$a_{n+2} = \frac{a_n}{(n+2)(n+2+2\nu)}$$

ν هر مقداری باشد جواب اول مثل هم است و اختلاف در جواب دوم است

تابع بسل نوع اول $y_1 = x^{\nu} a_0 (1 + \bigcirc x^2 + \square x^4 + \dots) = J_\nu(x)$

معادله صادق است به ازای جمیع مقادیر a_0

جایگذاری r_1

$$a_0 = \frac{1}{2^{\nu} \Gamma(\nu+1)}$$

$\nu!$

80

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$J_\nu(x) = x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu}\, m!\, \Gamma(\nu+m+1)}\, x^{2m}$$ تابع بسل نوع اول ! جواب اول معادله بسل

جدول دارد تا سه رقم بعد از اعشار حساب شده .

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

حتماً حالت 3 است اگر n صحیح باشد و حتماً k مخالف صفر می شود .

$$(x^\nu J_\nu(x))' = x^\nu J_{\nu-1}(x) \Rightarrow \int x^\nu J_{\nu-1}(x)\,dx = x^\nu J_\nu(x) + C$$

$$(x^{-\nu} J_\nu(x))' = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) \Rightarrow \int x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)\,dx = -x^{-\nu} J_\nu(x) + C$$ منفی

$$J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x)$$

$\int J_0\,dx =$ غیرقابل ملاحظه

1- با توجه به فرمول $xJ_n' = -nJ_n + xJ_{n-1}$ انتگرال زیر را حساب کنید

$$\int_0^1 x(1-x^2) J_0\,dx = 2J_2(1)$$

$$\int_0^1 x J_0\,dx = x J_1(x)\Big|_0^1 = J_1(1)$$

اگر به فرمول نفوذ کنید باید با جزء به جزء مطابق

فرمولهای بالا شود

جزء به جزء

$$\int x^2 J_0(x)\,dx = x^2 x J_1 x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 x^2 J_1\,dx = J_1(1) - 2x^2 J_2(x)\Big|_0^1$$

$$= 2J_2(1)$$

81

Subject:
Year. Month. Date. ( )

2- با توجه به $n J_n - x J_{n+1} = -x J_n + n J_{n-1}$ انتگرال را حساب کنید

$$\int_0^1 x^2 J_1(x)\,dx = J_2(1)$$

مثال:

$$\int x^2 J_2(x)\,dx = \int x^3 \left(x^{-1} J_2(x)\,dx\right) = -x^3 x^{-1} J_1(x) + 3\int x^2 x^{-1} J_1\,dx$$

$$\int x J_1\,dx = -x J_0 + \int J_0\,dx$$

$x=0$ یا

جزء به جزء ← بعد ← $x=0$ را می‌گیریم

جواب‌های دوم

برای حالت یک

$$y = A J_\nu(x) + B J_{-\nu}(x)$$

می‌گیریم $J_{-\nu}(x)$: جواب دوم را

برای حالت دو

اگر y_1 و y_2 مستقل باشند هرکدام با ترتیب خطی هردو مستقل است و ترتیب خطی کدام جواب است

$$y_2 = J_0 \ln x + \sum_1 b_n x^n$$ جواب دوم

$$Y_0 = a(J_0 + b y_2)$$

$\frac{e}{\pi}$ ↙ ↓ $\gamma = 2\ln 2$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

82

وقتی تفاضل عدد صحیح باشد که k صفر نیست

$$y_2 = k J_n(x) + x^{-n} \sum_0 b_n x^n$$

در حالت 2

$$y = A J_0(x) + B Y_0(x)$$

که $Y_n = a(J_n + b y_n)$

$$y = A J_n(x) + B Y_n(x)$$

$$Y_\nu(x) = \frac{1}{\sin \nu\pi}\left(J_\nu(x)\cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)\right)$$ تابع بسل نوع دوم

برازای این جواب معادله بسل می شود

$$y = A J_\nu(x) + B Y_\nu(x)$$ توابع بسل نوع دوم

۱- اگر جواب معادله $x^2 y'' + xy + (x^2 - n^2) y = 0$ به شکل $y = c_1 y_n + c_2 Y_0$ باشد

آنگاه جواب معادله زیر کدام است

$$x^2 y'' + x y' + (\lambda^2 x^2 - n^2) y = 0$$

$$y = A J_\nu(\lambda x) + B Y_\nu(\lambda x)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

2- جواب معادله زیر کدام است؟

$$x^2y'' + xy' + (25x^2 - \frac{9}{4})y = 0$$

$$z = 5x \rightarrow \frac{dz}{dx} = 5$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = 5\frac{dy}{dz}$$

$$y'' = 5^2\frac{d^2y}{dz^2}$$

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2} + z\frac{dy}{dz} + (z^2 - \frac{9}{4})y = 0$$

$$y = AJ_{\frac{3}{2}}(5x) + BY_{\frac{3}{2}}(5x)$$

3-

$$4x^2y'' + 4xy' + (8x^2 - \frac{1}{4})y = 0$$

$$y = AJ_{\frac{1}{2}}(\sqrt{2}x) + BY_{\frac{1}{2}}(\sqrt{2}x)$$

4-

$$x^2y'' + xy' + (9x^2 - 4)y = 0$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

5- جواب معادله کدام است؟

$xy'' - y' + xy = 0$ فرض مسئله $y = ux$ $\quad y' = u + xu'$ و $y'' = 2u' + xu''$

$x^2u'' + 2xu' - u - xu' + xxu = 0 \Rightarrow x^2u'' + xu' + (x^2-1)u = 0$

$u = AJ_1(x) + BY_1(x) \qquad y = x(\quad)$

6- سؤال بالا با کدام یک از تغییر متغیرهای زیر تبدیل به بسل می شود؟

$y = ux$

$xy'' + (1+2)y' + xy = 0$

با تغییر متغیر $y = x^{-1}z$ تبدیل به بسل می شود.

7- جواب کدام است؟

$9x^2y'' + 9xy' + 4(9x^4 - \frac{1}{4})y = 0$

$z = x^2 \quad , \quad \frac{dz}{dx} = 2x$

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = 2x\frac{dy}{dz}$

$y'' = 2\frac{dy}{dz} + (2x)^2\frac{d^2y}{dz^2}$

$4z^2\frac{d^2y}{dz^2} + 4z\frac{dy}{dz} + 4(z^2 - \frac{1}{9})y = 0$ بسل با اندیس $\frac{1}{3}$

$y = AJ_{1/3}(x^2) + BY_{1/3}(x^2)$

PaPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

85

معادله $x^2y'' + xy' + 4(x-1)y = 0$ با تغییر متغیر $z = x^2$ تبدیل به معادله بسل با اندیس ۱ می شود.

تبدیل لاپلاس:

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

$$\mathcal{L}^{-1} F(s) = f(t)$$

لاپلاس و لاپلاس معکوس خاصیت خطی دارند

$f(t)$	$F(s)$
k	$\frac{k}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
t^α	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{2}{s^6} = \frac{2}{5!}\mathcal{L}^{-1}\frac{5!}{s^6} = \frac{2}{5!}t^5$$

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha!, \quad \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^{3/2}} = \frac{1}{\Gamma(3/2)}\mathcal{L}^{-1}\frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}t^{1/2}$$

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha)$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

86

1- اگر a یک عدد حقیقی باشد لاپلاس $f(t)=e^{iat}$ برابر است با؟

$$= \frac{1}{s-ia}$$

2- $\mathcal{L}^{-1}\frac{8-6s}{16s^2+9}$ برابر است با؟

$$\frac{1}{16}\mathcal{L}^{-1}\frac{8-6s}{s^2+(\frac{3}{4})^2} = \frac{1}{16}\left(8\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2+(\frac{3}{4})^2} - 6\mathcal{L}^{-1}\frac{s}{s^2+(\frac{3}{4})^2}\right)$$

$$\frac{1}{16}\left[8\times\frac{4}{3}\sin(\frac{3}{4}t) - 6\cos(\frac{3}{4}t)\right]$$

3- اگر $\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{s^4} \Rightarrow f(t)=?$!

$$f(t)=\frac{t^3}{6}$$

4- a و b را طوری تعیین کنید که تابع $2\sin 2t + 4\cos 2t$ تبدیل لاپلاس $\frac{as+b}{s^2+4}$ باشد !

$$a=4 \ , \ b=4$$

5- معکوس $\mathcal{L}^{-1}\frac{4-5s}{s^{3/2}}$ برابر است با

$$= 4\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^{3/2}} - 5\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^{1/2}} = \frac{8}{\sqrt{\pi}}t^{1/2} - \frac{5}{\sqrt{\pi}}t^{-1/2}$$

6- حاصل $\int_0^\infty e^{-2t}\cos t\,dt$ برابر است با؟

$$= \mathcal{L}\cos t\Big|_{s=2} = \frac{s}{s^2+1}\Big|_{s=2} = \frac{2}{5}$$

87

Subject:

Year. Month. Date. ( )

7-

$$\int_0^\infty e^{-3t}\sin t\cos t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-3t}\sin 2t\,dt = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)\right\}\Big|_{s=3}$$

اگر عامل e نباشد می‌توان از x را عمل گرفت و تقسیم می‌شود انتگرال‌های از ۰ تا ∞ را با لاپلاس حل کرد.

تبدیل لاپلاس مشتق :

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$$

1. $f(t)=t \Rightarrow f'(t)=1 \Rightarrow \frac{1}{s} = s\mathcal{L}(t) - 0 \Rightarrow \mathcal{L}(t) = ?$

2. $f(t)=e^t \Rightarrow f'(t)=e^t \Rightarrow \mathcal{L}(e^t) = s\mathcal{L}(e^t) - 1 \Rightarrow \mathcal{L}(e^t) = ?$

3. $f(t)=t\sin t \Rightarrow f'(t)=\sin t + t\cos t$

$f''(t)=2\cos t - t\sin t$

$$\Rightarrow \mathcal{L}f'' = \frac{2s}{s^2+1} - \mathcal{L}(t\sin t) = s^2\mathcal{L}(t\sin t) - 0 - 0 \Rightarrow \mathcal{L}(t\sin t) = ?$$

1- اگر $y'' - y' + y = t, y(0)=y'(0)=0$ آنگاه لاپلاس y کدام است؟

اگر معادله شرایط مرزی در نقطه ۰ داشته باشد از لاپلاس حل سود راحت‌تر است.

$$\mathcal{L}y'' - \mathcal{L}y' + \mathcal{L}y = \mathcal{L}t \qquad s^2Y - sY + Y = \frac{1}{s^2} \qquad Y = ?$$

89

Subject:

Year. Month. Date. ( )

قضایای انتقال:

۱- انتقال بر محور sها:

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = F(s-a)$$

$$\mathcal{L}^{-1}F(s-a) = e^{at}\underbrace{\mathcal{L}^{-1}F(s)}_{f(t)}$$

۱- تبدیل لاپلاس $2e^{-2t}\sin 2t$ کدام است؟

$$\mathcal{L}\,2e^{-2t}\sin 2t = 2\cdot\frac{2}{(s+2)^2+4}$$

۲- لاپلاس معادله دیفرانسیل کدام است؟ $f(t) = e^{3t}(2\cos 5t - 3\sin 5t)$

$$\frac{25}{s^2+25} - \frac{15}{s^2+25} = \frac{2(s-3)}{(s-3)^2+25} - \frac{15}{(s-3)^2+25}$$

۳- لاپلاس $f(t) = e^{-t}\cos t$ کدام است؟

$$= \frac{s+1}{(s+1)^2+1}$$

۴- لاپلاس $f(t) = (e^t\underbrace{\int_0^t te^u\,du}_{f_1(t)})$ کدام است؟

$$F(s) = F_1(s-1)$$

$$F_1(s) = \mathcal{L}\int_0^t te^u\,du = \frac{1}{s}F_2(s)$$

$$F_2(s) = \mathcal{L}(te^t) = F_3(s-1)$$

$$F_3(s) = \mathcal{L}\,t = \frac{1}{s^2}$$

90

Subject:
Year. Month. Date. ( )

5- تبدیل معکوس $\frac{1}{\sqrt{9s-1}}$ کدام است؟

$$\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{\sqrt{s-\frac{1}{9}}}=\frac{1}{3}e^{\frac{t}{9}}\mathcal{L}^{-1}\underbrace{\frac{1}{s^{1/2}}}_{\frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}}$$

6- تبدیل معکوس $\frac{s-1}{s^2-2s+5}$ کدام است؟ فرض کنید مربع کامل شود.

گام دوم درست ما تشکیل مربع کامل صورت را درست می‌بینیم

$$\frac{s-1}{s^2-2s+5}=\frac{(s-1)}{(s-1)^2+4}\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}=e^t\mathcal{L}^{-1}\frac{s}{s^2+4}=e^t\cos 2t$$

$$\frac{3s+7}{s^2-2s-3}=\frac{3(s-1)+10}{(s-1)^2+4}\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}=e^t\mathcal{L}^{-1}\frac{3s+10}{s^2+4}=e^t(3\cosh 2t+5\sinh 2t)$$

$$\frac{2s+3}{s^2+4s+4}=\frac{2(s-2)+7}{(s-2)^2}\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}=e^{2t}\mathcal{L}^{-1}\frac{2s+7}{s^2}=e^{2t}(2+7t)$$

106

Subject:

Year. Month. Date. ( )

P4PCO

91

Subject:

Year. Month. Date. ( )

7.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{7}t^3 e^{4t}\right\}_{s=7} = \frac{6}{(s-4)^4}$$

$$\frac{3!}{s^4} = \frac{6}{s^4}$$

8- حل مسئله مقدار اولیه زیر $y(0)=2, y'(0)=1$ و $y'' + 8y' + 16y = 0$

$$\mathcal{L}y'' + \mathcal{L}8y' + \mathcal{L}16y = 0 \qquad s^2Y - 2s - 1 + 8sY - 16 + 16Y = 0$$

$$Y(s+4)^2 = 2s + 17 \Rightarrow Y = \frac{(2s+17)}{(s+4)^2} = \frac{2(s+4)+9}{(s+4)^2}$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}Y = e^{-4t}\mathcal{L}^{-1}\frac{2s+9}{s^2} = e^{-4t}(2+9t)$$

9- $y'' - 2y' + y = te^t + 4, \quad y(0) = y'(0) = 1$

$$\mathcal{L}y'' - 2\mathcal{L}y' + \mathcal{L}y = \mathcal{L}(te^t + 4) = \mathcal{L}te^t + \mathcal{L}4$$

$$s^2\mathcal{L}y - s - 1 - 2sY + 2 + Y = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{4}{s}$$

$$Y = \frac{1}{(s-1)^4} + \frac{4}{s(s-1)^2} + \frac{s-1}{(s-1)^2} \Rightarrow y = \mathcal{L}^{-1}Y = e^t\frac{t^3}{3} + e^t + 4\int_0^t \tau e^\tau d\tau$$

قضیه دوم انتقال: انتقال بر محور t

$$U_a(t) = U(t-a) = \begin{cases} 1 & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$$

نتایج تابع پله‌ای واحد

92

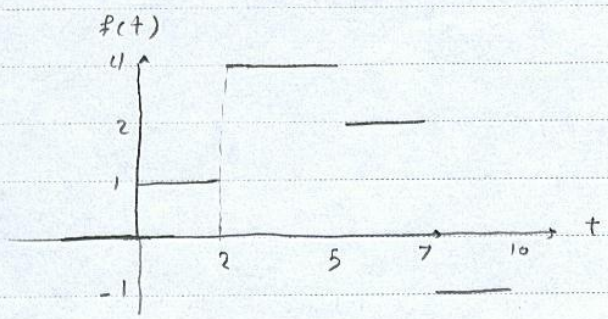
Subject:

Year. Month. Date. ( )

$\int_0^a 0 \times e^{-st} dt + \int_a^\infty e^{-st} dt$

$$\mathcal{L}(U_a(t)) = \int_a^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s} e^{-as}$$

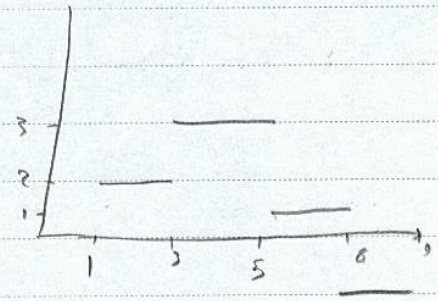
$$\mathcal{L}(U_a(t)) = \frac{1}{s} e^{-as}$$

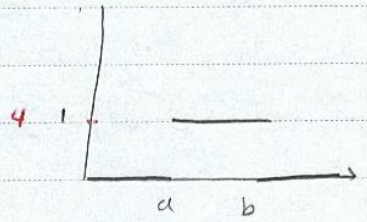


4

$$f(t) = U_0(t) + 3U_2(t) - 2U_5(t) - 3U_7(t) + U_{10}(t)$$

$$2U_1(t) + U_3 - 2U_5 - 3U_8 + 2U_9$$



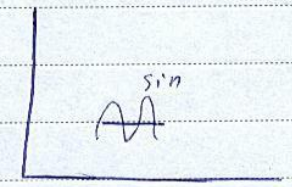


$$U_{[a,b]}(t) = U_a(t) - U_b(t) = \begin{cases} 1 & a < t < b \\ 0 & \text{—} \end{cases}$$

$$f(t) = (U_a(t) - U_b(t)) \frac{1}{4}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )



$$f(t)=(U_a(t)-U_b(t))\sin t$$

$$y''\quad\quad\quad\quad=f(t)=\begin{cases} t & 0<t<\pi \\ \cos t & \pi<t<2\pi \\ (t^2-1) & t>2\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(t)=(U_0(t)-U_\pi(t))\,t+(U_\pi(t)-U_{2\pi}(t))\cos t+(t^2-1)U_{2\pi}(t)$$

$$\mathcal{L}(U_a(t)f(t))=e^{-as}\mathcal{L}f(t+a)$$

$$\mathcal{L}f(t)=e^{0}\mathcal{L}(t)-e^{-\pi s}\mathcal{L}(t+\pi)+e^{-\pi s}\mathcal{L}\underbrace{\cos(t+\pi)}_{-\cos t}-e^{-2\pi s}\mathcal{L}\cos(t+2\pi)$$

$$+e^{-2\pi s}\mathcal{L}((t+2\pi)^2-1)=\frac{1}{s^2}-e^{-\pi s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{\pi}{s}\right)-e^{-\pi s}\frac{s}{s^2+1}$$

$$-e^{-2\pi s}\frac{s}{s^2+1}-e^{-2\pi s}\left(\frac{2}{s^3}+4\pi\frac{1}{s^2}+(4\pi^2-1)\frac{1}{s}\right)$$

$$f(t)=\begin{cases} t & 0<t<2 \\ & \\ 2 & t>2 \end{cases}$$ تبدیل لاپلاس -1

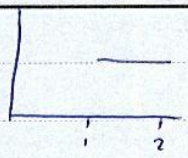
$$f(t)=\begin{cases} 1 & 0<t<2 \\ t & t>0 \end{cases}$$

$$f(t)=\begin{cases} 2 & 0<t<1 \\ t & t>1 \end{cases}$$

94

Subject:
Year. Month. Date. ( )

2 - تبدیل لاپلاس کدام است .



حل ۱ مشت آهن :

$$f(t)=\begin{cases} t & 0\le t<2 \\ 2 & t>2 \end{cases} = (U_0-U_2)\,t + 2U_2(t)$$

$$\mathcal{L}f(t) = e^{0}\mathcal{L}(t) - e^{-2s}\mathcal{L}(t+2) + 2\frac{1}{s}e^{-2s}$$

$$= \frac{1}{s^2} - e^{-2s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s}\right) + \frac{2}{s}e^{-2s}$$

3 - معادله لاپلاس $y_{(0)}=1$ ، $y'+2y=f(t)$ ، $f(t)=\begin{cases} 1 & 1<t<2 \\ 0 & \text{—} \end{cases}$ کدام است $\mathcal{L}y=Y$

$$sY - 1 + 2Y = \frac{1}{s}\left(e^{-s}-e^{-2s}\right)$$

$$Y = \frac{1}{s+2} + \frac{e^{-s}}{s(s+2)} - \frac{e^{-2s}}{s(s+2)}$$

جواب سوال ✓

جواب — معادله :

$$\mathcal{L}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-as}F(s)\right) = U_a(t)\,f(t-a)\right\} \Leftarrow \mathcal{L}\left(U_a(t)\,f(t)\right) = e^{-as}\mathcal{L}f(t+a)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$f(t) = \int_0^t e^{-2t}\,dt = -\frac{1}{2}e^{-2t}\Big|_0^t = \frac{1}{2}(1-e^{-2t})$

$y = e^{-2t} + U_1(t)\,\frac{1}{2}(1-e^{-2(t-1)}) - U_2(t)\cdot\frac{1}{2}(1-e^{-2(t-2)})$

۴- تبدیل معکوس $F_s = \frac{2e^{-2s}}{s^2+4}$ (قضیه مقادیر) e^{-2s} آمد پس حتما از این قضیه استفاده می‌شود

$U_2(t)\sin 2(t-2)$

سوال بعد $\frac{e^{-\pi s}}{(1+s)^2+1} = U_\pi(t)\sin h\,2(t-2)$

بعدی $\frac{2e^{-2s}}{s^2-4}$ $F_s = \frac{1}{1+(1+s)^2} \Rightarrow f(t) = e^{-t}\sin t$

$= U_2(t)\,e^{(t-\pi)}\sin(t-\pi)$

مشتق گیری از تبدیل لاپلاس

$\mathcal{L}f(t) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$

$F'(s) = \int_0^\infty e^{-st}(-t f(t))\,dt = \mathcal{L}(-t f(t))$ مشتق نسبت به s

$\Rightarrow \mathcal{L}(+t f(t)) = -F'(s)$

$\Rightarrow \mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n F^{(n)}(s)$ مشتق n ام

96

Subject:

Year. Month. Date. ( )

۱- حاصل انتگرال کدام است

$$\int_0^\infty te^{-4t}\cos 2t\,dt$$

$$= \mathcal{L}(t\cos 2t)\Big|_{s=4} = -\left(\frac{s}{s^2+4}\right)'\Big|_{s=4} = 0.03 = \frac{3}{100}$$

$$\int_0^\infty xe^{-sx}\cos\beta x\,dx = \mathcal{L}(x\cos\beta x) = -\left(\frac{s}{s^2+\beta^2}\right)' = -\frac{s^2+\beta^2-2s^2}{(s^2+\beta^2)^2}$$

$$= \frac{s^2-\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}$$

-3

$$\int_0^\infty te^{-2t}\sin t\,dt = -\left(\frac{1}{s^2+1}\right)'\Big|_{s=2} = \frac{2s}{(s^2+1)^2}\Big|_{s=2} = \frac{4}{25}$$

-4

$$\mathcal{L}(t^2e^{-3t}) = \left(\frac{1}{s+3}\right)''$$

با استفاده از $\frac{2}{s^2} \to \frac{2}{(s+3)^3}$

$\mathcal{L}(t\cos at)$ -5

Subject:
Year. Month. Date. ( )

6- لاپلاس رابطه زیر کدام است

$$f(t)=(t-\pi)\,U_{\pi}(t)\,e^{2t}\sin 3t$$

$$=e^{-\pi s}\mathcal{L}\left(te^{2(t+\pi)}\sin(3t+\pi)\right)=-e^{-\pi s}e^{2\pi}\mathcal{L}(e^{2t}t\sin 3t)\Rightarrow ①$$

$$\mathcal{L}(t\sin 3t)=-\left(\frac{3}{s^2+9}\right)'=\frac{6s}{(s^2+9)^2}$$

$$① \Rightarrow =-e^{-\pi(s-2)}\,6\,\frac{s-2}{((s-2)^2+9)^2}$$

ادامه درس

$$\mathcal{L}(tf(t))=-F'(s) \qquad \Rightarrow f(t)=-\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}F'(s)$$

مورد استفاده در توابع Ln و Arc می‌باشد.

۱- معکوس $F(s)$ کدام است

$$F(s)=\ln\frac{s-2}{s+2}=\ln(s-2)-\ln(s+2)$$

$$F'(s)=\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s+2} \qquad \text{معکوس} \Rightarrow e^{2t}-e^{-2t} \;\alpha\; \frac{1}{t}$$

$$f(t)=-\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{t}$$

$$\ln\frac{s}{s-1}=\ln s-\ln(s-1) \qquad \text{و} \quad F'(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1} \Rightarrow \text{جواب}=\frac{e^{2t}-1}{t}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$F(s) = \ln \frac{(s^2+4\alpha^2)^{1/4}}{s^{1/2}} = \frac{1}{4}\ln(s^2+4\alpha^2) - \frac{1}{2}\ln s$$

$$F'(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2+4\alpha^2} - \frac{1}{s}\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2t}(\cos 2\alpha - 1)$$

-3

$$F(s) = \cot^{-1} s \qquad F'(s) = \frac{-1}{s^2+1} \Rightarrow -tf = \frac{\sin t}{t}$$

-4

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s} = \int_0^t \frac{\sin t}{t}\,dt$$

$$\frac{-1/s^2}{1/s^2+1} = \frac{-1}{s^2+1}$$

5- تبدیل لاپلاس جواب مسأله زیر کدام است.

$$xy'' + (1-x)y' + y = 0 \qquad y(0)=1 \;,\; y'(0) = -1$$

معادله با ضرایب متغیر دو قضیه آخر

$$\mathcal{L}\,xy'' + k(1-x)y' + \mathcal{L}\,y = 0$$

99

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$-(s^2Y - s + 1)' + sY - 1 + (sY - 1)' + Y = 0$$

$$-(2sY + s^2Y' - 1) + sY - 1 + Y + sY' + Y = 0$$

$$Y'(s - s^2) + Y(2 - s) = 0$$

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{-s+2}{s(1-s)} = \frac{s-2}{s^2-s} = \frac{-2}{s} + \frac{1}{s-1} \Rightarrow \ln Y = -2\ln s + \ln(s-1)$$

$$= \ln \frac{s-1}{s^2}$$

$$\ln Y = -\frac{1}{2}\ln(s^2-s) - \frac{3}{2}\ln s + \frac{3}{2}\ln(s-1)$$

$$Y = \frac{s-1}{s^2} \qquad y = 1 - t$$

: 6

$$t\ddot{y} + 2\dot{y} + ty = 0 \qquad \mathcal{L}\{y\} = Y = c - y(0)\,t\mathcal{L}^{-1}s$$

$$\mathcal{L}\{t^2y'' + 2ty' + t^2y\} = 0$$

$$+(s^2Y - sy(0) - y'(0))' + 2sY + 2y(0) + Y' = 0$$

$$2sY + s^2Y' - y(0) - 2sY + 2y(0) + Y' = 0$$

$$Y'(s^2+1) = -y(0) \qquad Y' = \frac{-y(0)}{(s^2+1)} \Rightarrow Y = -y(0)\,t\mathcal{L}^{-1}(s) + c$$

100

Subject:
Year. Month. Date. ( )

انتگرال گیری از تبدیل لاپلاس:

اگر $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t}$ موجود باشد آنگاه

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_s^\infty F(u)\,du$$

$$\Rightarrow f(t) = t\,\mathcal{L}^{-1}\int_s^\infty F(u)\,du$$

$$F(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2} \qquad \int F(s) = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{s^2+1} \qquad -\frac{1}{2}\sin t$$

$$f(t) = -\frac{t}{2}\sin t$$

$$\int_0^\infty e^{-u}\,\frac{\sin \alpha u}{u}\,du = \tan^{-1}\alpha$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin \alpha t}{t}\right) = \int_s^\infty \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}\,ds = \tan^{-1}\frac{s}{\alpha}\Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{s}{\alpha} = \cot^{-1}\frac{\alpha}{s}$$

حالت خاص $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du = \frac{\pi}{2}$ $s=0$ $\mathcal{L}\,\frac{\sin t}{t}$

$$\mathcal{L}\,\frac{\sin 2t}{t}$$

PAPCO

در سوال یک یکار رفته $\frac{\pi}{2} - \cot^{-1}\frac{1}{\alpha} = \tan^{-1}\alpha$

101

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}$

$\ln \frac{e^t}{t}$ حدس اول و جواب نمی دهد

$\mathcal{L}\left\{\frac{e^t-1}{t}\right\} = \int_s^\infty \left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}\right) ds = \ln(s-1) - \ln s \Big|_s^\infty = \ln\frac{s-1}{s}\Big|_s^\infty$

$= \ln\frac{s}{s-1}$

قضیه پیچش : (کانولوشن)

$(f * h)(t) = \int_0^t f(\lambda)\, h(t-\lambda)\, d\lambda$ کانولوشن

خاصیت جابجایی دارد

$\frac{1}{s(s-1)}$ ، $\frac{1}{s^3(s^2-1)}$ ، $\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}$ ...

$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\,H(s)\} = \int_0^t f(\lambda)\, h(t-\lambda)\, d\lambda$

$F(s)\,H(s) = \mathcal{L}\int_0^t f(\lambda)\, h(t-\lambda)\, d\lambda$

102

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s(s-1)} = \int_0^t e^{\lambda}\,d\lambda \qquad (1, e^t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s^2(s^2-1)} = \frac{1}{2}\int_0^t (t-\lambda)^2 \sinh\lambda\,d\lambda \qquad (\tfrac{t^2}{2}, \sinh t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{1}{2}\int_0^t \sin 2\lambda \sin(t-\lambda)\,d\lambda$$

تبدیل به جمع شوند

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{(s^2+1)^2} = \int_0^t \sin\lambda \sin(t-\lambda)\,d\lambda = k(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{s}{(s^2+1)^3} = \int_0^t k(\lambda)\cos(t-\lambda)\,d\lambda$$

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{(s-2)(s+3)^2} = \int_0^t \lambda e^{-3\lambda} e^{2(t-\lambda)}\,d\lambda \qquad (e^{2t}\cdot te^{-3t})$$

۱. حل $y'' + y = f(x),\ y(0)=y'(0)=0$ به روش

$$s^2 Y + Y = F(s)$$

$$Y = \frac{1}{s^2+1}F(s) \quad \Rightarrow \quad y = \int_0^x \sin(x-t) f(t)\,dt$$

103

Subject:

Year. Month. Date. ( )

حل معادله انتگرالی $\varphi(t)=2t+\int_0^t e^{t-u}\varphi(u)\,du$ به روش لاپلاس ... ؟

$y_1=1+e^{2t}$

$l=l$

$\Phi(s)=\frac{2}{s}+\Phi(s)\frac{1}{s-1}$

$\Phi(s)\left(1-\frac{1}{s-1}\right)=\frac{2}{s} \Rightarrow \Phi(s)=2\frac{s-1}{s(s-2)}$

$\frac{s-2}{s-1}$

$\varphi(t)=1+e^{2t}$

حل معادله انتگرالی $y(t)=1+\int_0^t y(u)\sin(t-u)\,du$ به روش لاپلاس ... 3

$y_2=1+\frac{t^2}{2}$ $\qquad l=l$

$Y=\frac{1}{s}+\frac{Y}{s^2+1} \Rightarrow Y\left(1-\frac{1}{s^2+1}\right)=\frac{1}{s}$

$Y=\frac{s^2+1}{s^3} \Rightarrow 1+\frac{t^2}{2}$

$f(t)=4e^{-t}+\int_0^t \alpha f(t-\alpha)e^{-\alpha}\,d\alpha$ (بیت گاوس) $\Rightarrow y_2=\frac{1}{2}(1-e^{-2t})$ 4

$F=\frac{1}{(s+1)^2}+F\cdot\frac{1}{(s+1)^2} \qquad F\left((s+1)^2-1\right)=1$

104

Subject:
Year. Month. Date. ( )

صدف حاج آقاسی

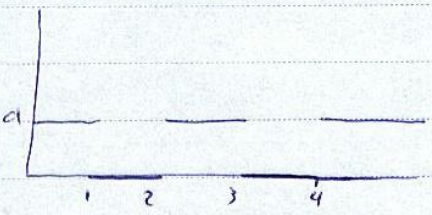
$$F = \frac{1}{(s+1)^2 - 1} \Rightarrow f = \frac{e^{-t}}{2}(e^{t} - e^{-t})$$

توابع متناوب:

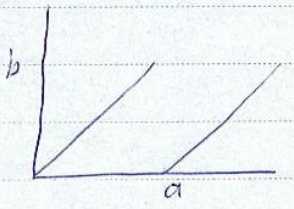
$f(t+P) = f(P)$ ، P کوچکترین عددی نامنفی که در معادله صدق می کند (دوره تناوب نامیده)

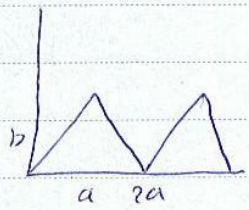
$$\mathcal{L} f(t) = \frac{1}{1 - e^{-Ps}} \int_0^P e^{-st} f(t)\, dt$$

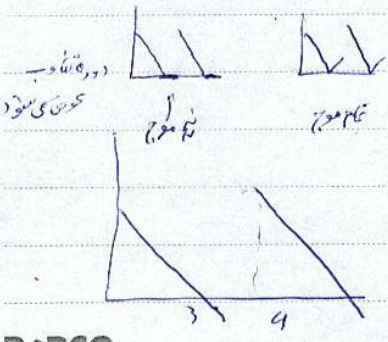
۱-

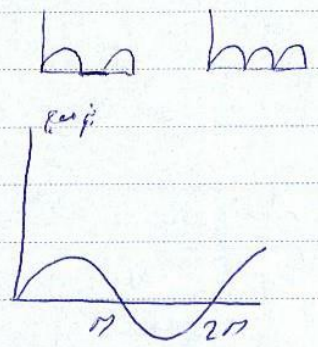


$$\frac{a}{1-e^{-2s}} \int_0^1 e^{-st}\, dt = \frac{a}{s(1-e^{-s})}$$









105

Subject:
Year. Month. Date. ( )

