مترویدهای۳–همبند مینور–مینیمال دارای یک مینور ثابت

سارا کوهی

دانشکده علوم
گروه ریاضی

شهریور ۱۳۸۹

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

استاد راهنما:

دکتر قدرت اله آزادی

«حق چاپ برای دانشگاه ارومیه محفوظ است»

فهرست مندرجات

۱ مفاهیم مقدماتی ۱

۱.۱ تعاریف مقدماتی از نظریه گراف ۱

۲.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی از نظریهٔ مترویدِ ۷

۳.۱ طرح موضوع ۲۸

۲ تجزیه درختی ۳۱

۱.۲ قضیه‌ها ۳۱

۲.۲ روش ساختن درختی از $T(M)$ با ادغام یک یال از M ۴۴

۳ نتایج مقدماتی ۴۶

۱.۳ تعاریف ۴۶

۲.۳ قضیه‌ها و لم‌های مورد نیاز ۴۷

۳.۳ نتایج تکنیکی ۵۲

۴ بررسی حالت همبندی ۷۱

۱.۴ تعاریف ۷۱

۲.۴ قضیه‌ها و لم‌های مورد نیاز ۷۵

۳.۴ قضیه اصلی ۷۶

۵ یک کران کلی ۱۰۰

۱.۵ نتایج اصلی ۱۰۰

۶ اثبات قضیه اصلی ۱۰۵

۱.۶ نتایج نهایی ۱۰۵

مراجع ۱۱۷

چکیدهٔ انگلیسی ۱۲۰

چکیده

N را یک مینور از مترویدِ ۳–همبندِ M در نظر می‌گیریم، به طوری که هیچ مینور ۳–همبندِ سره M، N را به عنوان مینور ندارد. هدف ما در این پایان‌نامه این است که کرانی برای $|E(M) - E(N)|$ به‌دست آوریم.

ترومپر [۱] [۱۳] نشان داده است که اگر N یک مترویدِ ۳–همبندِ باشد، آن‌گاه $|E(M) - E(N)| \leq ۳$. **لموس** [۲] و **آکسلی** [۳] ثابت کرده‌اند که اگر N یک مترویدِ k–همبند باشد، آن‌گاه $|E(M) - E(N)| \leq ۲k - ۲$.

$\lambda_۱(N)$ را تعداد مؤلفه‌های همبندِ N در نظر می‌گیریم. اگر $\Lambda_۲(N)$ مجموعه‌ای شامل مترویدهای ۳–همبند باشد، $\lambda_۲(N)$ را تعداد مترویدها در $\Lambda_۲(N)$ در نظر می‌گیریم. در این پایان‌نامه ثابت می‌کنیم که اگر N یک مترویدِ غیرتهی و M یک مترویدِ ۳–همبندِ مینور–مینیمال باشد به

[۱] Truemper
[۲] Lemos
[۳] Oxley

طوری که N را به عنوان مینور دارد، آن‌گاه

$$|E(M) - E(N)| \leq ۲۲(\lambda_۱(N) - ۱) + ۵(\lambda_۲(N) - ۱).$$

این پایان‌نامه براساس مقاله زیر تنظیم شده است:

Manoel. Lemos, James. Oxley, On the minor-minimal 3-connected matroids having a fixed minor. European Journal of combinatorics 24 (2003).

مقدمه

این پایان‌نامه شامل شش فصل می‌باشد. در فصل یک ابتدا چند تعریف مقدماتی از نظریه گراف را می‌آوریم. سپس تعاریف مقدماتی از نظریه متروید را ارائه کرده و بعد چند تعریف اساسی را در رابطه با موضوع مورد بحث در این پایان‌نامه ارائه می‌کنیم. بعد از آن چند قضیه از منابع مورد استفاده را بدون اثبات ارائه می‌کنیم که این قضیه‌ها در اثبات احکام به کار رفته در این پایان‌نامه نقش عمده‌ای دارند. در انتهای فصل قضیه اصلی بیان می‌شود که توسط لم‌ها، گزاره‌ها و قضیه‌های این پایان‌نامه در فصل شش به اثبات می‌رسد.

در فصل دوم ابتدا تجزیه درختی را تعریف می‌کنیم. سپس به بیان چند قضیه از تجزیه درختی می‌پردازیم که کاربرد زیادی در اثبات قضایای بعد خواهد داشت.

در فصل سوم پس از بیان چند تعریف، لم‌های تکنیکی را ثابت می‌کنیم که در اثبات نتیجه اصلی به کار خواهد رفت. به ویژه در لم ۳.۳.۳ نشان می‌دهیم که تخریب یک ۲−جداسازی از N به افزودن حداکثر پنج عضو جدید نیاز دارد.

در فصل چهارم قضیه اصلی را در حالتی که N همبند است، ثابت می‌کنیم. به ویژه قضیه زیر را نیز ثابت می‌کنیم:

قضیه : فرض کنیم N یک متروید همبند ناتهی باشد. اگر M یک متروید ۳−همبند

مینور–مینیمال باشد که N را به عنوان یک مینور دارد، آن‌گاه

$$|E(M)| - |E(N)| \leq ۵(\lambda_۲(N) - ۱).$$

در فصل پنجم قضیه اصلی را با تعدادی نتیجه در مورد مترویدهای همبند ترکیب می‌کنیم تا به حدود بیان شده در قضیه اصلی نزدیک شویم. سپس مدلی مشابه از قضیه اصلی را در نظر می‌گیریم که تنها به همبند بودن M نیاز دارد.

در فصل ششم قضیه اصلی را در حالت کلی ثابت می‌کنیم.

اصطلاحاتی که در این پایان‌نامه استفاده خواهد شد، به غیر از دو مورد، از کتاب آکسلی [۱۰] گرفته شده است. این دو مورد **ساده سازی** [۴] و **هم‌ساده سازی** [۵] متروید N است، که به ترتیب با $Si(N)$ و $Co(N)$ نشان خواهیم داد.

[۴] Simplification

[۵] Cosimplification

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

۱.۱ تعاریف مقدماتی از نظریه گراف

ابتدا چند تعریف مقدماتی از نظریه گراف را مطرح می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱ گراف[۱] G سه تایی[۲] است متشکل از یک مجموعهٔ متناهی و غیرتهی $V(G)$ که اعضای آن رأس های[۳] گراف و مجموعه $E(G)$ که اعضای آن یال های[۴] گراف نامیده می‌شوند، و رابطه‌ای که به هر عضو $E(G)$ دو عضو از $V(G)$ را وابسته می‌کند. اگر $e = uv$ یک یال از G باشد، آن‌گاه u و v را **نقاط انتهایی**[۵] یا رأس‌های انتهایی e و همچنین e را یال واقع بر u و v می‌گویند.

اگر نقاط انتهایی یالی بر هم منطبق باشند، آن‌گاه آن یال را یک **طوقه**[۶] می‌گویند.

اگر نقاط انتهایی دو یال یکسان باشند، آن دو یال را **یال‌های موازی**[۷] می‌گویند.

---

[۱] Graph
[۲] Triple
[۳] Vertex
[۴] Edge
[۵] Endpoints
[۶] Loop
[۷] Parallel edges

تعداد یال‌های واقع بر یک رأس مثلا v را **درجه**[۸] آن رأس می‌نامند، و با $d(v)$ نمایش می‌دهند.

همچنین رأسی را که هیچ یالی بر آن واقع نباشد، **رأس ایزوله** [۹](تنها) می‌گویند.

تعریف ۲.۱.۱ یک **گشت** [۱۰] در گراف G دنباله‌ای از رأس‌ها و یال‌های G به صورت

$$v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 ... v_{n-1} e_n v_n$$

است که در آن v_{i-1} و v_i نقاط انتهایی e_i هستند. اگر هیچ یالی در گشت تکرار نشده باشد، آن‌گاه آن گشت را یک **گذر**[۱۱] می‌گویند و در صورتی که در یک گذر هیچ رأسی تکرار نشده باشد، آن گذر را یک **مسیر**[۱۲] می‌نامند. اگر در مسیر $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 ... v_{n-1} e_n v_n$ داشته باشیم $v_0 = v_n$، آن مسیر را یک **دور**[۱۳] می‌گویند.

تعریف ۳.۱.۱ در یک گراف n رأسی مانند G، اگر هر دو رأس دلخواه آن با هم مجاور باشند، گراف را **کامل** [۱۴] گوییم و با نماد K_n نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴.۱.۱ گرافی را که هر یال آن جهتدار باشد، **گراف جهتدار**[۱۵] می‌گوییم.

تعریف ۵.۱.۱ **وتر** [۱۶] دور C یالی است که در C نیست ولی نقاط انتهایی آن در C قرار دارد.

[۸] Degree
[۹] Isolated vertex
[۱۰] Walk
[۱۱] Trail
[۱۲] Path
[۱۳] Cycle
[۱۴] Perfect graph
[۱۵] Digraph
[۱۶] Chord

تعریف ۶.۱.۱ زیرتقسیم[۱۷] یال uv از گراف G عبارت است از عمل حذف یال uv و افزودن مسیر uwv به جای آن که این با درج رأس w در یال uv انجام گیرد.

تعریف ۷.۱.۱ یک **جورسازی**[۱۸] در گراف G مجموعه‌ای از یال‌های غیر طوقه G است که رئوس انتهایی مشترکی نداشته باشند.

رئوس واقع بر یال‌های موجود در جورسازی را **اشباع شده**[۱۹] می‌گوییم.

جورسازی را که در آن تمام رئوس اشباع شده باشند، یک جورسازی **تام**[۲۰] می‌گوییم.

تعریف ۸.۱.۱ گراف **همبند**[۲۱] گرافی است که برای هر دو رأس دلخواه آن مانند u و v یک $u-v$ مسیر وجود داشته باشد.

تعریف ۹.۱.۱ گراف H را **زیرگراف**[۲۲] گراف G گوییم، هرگاه $V(H)$ و $E(H)$ به ترتیب زیرمجموعه‌هایی از $V(G)$ و $E(G)$ باشند.

تعریف ۱۰.۱.۱ هرگاه G_1 و G_2 دو گراف باشند، **اجتماع**[۲۳] آن‌ها را با نماد $G_1 \cup G_2$ نمایش می‌دهیم که مجموعه رئوس آن $V(G_1) \cup V(G_2)$ و مجموعه یال‌های آن $E(G_1) \cup E(G_2)$ است.

تعریف ۱۱.۱.۱ گراف $G = (V, E)$ را **دوبخشی**[۲۴] گوییم، هرگاه بتوان مجموعه رئوس آن را به دو مجموعه مجزا چنان افراز کرد که رئوس انتهایی هر یال در افرازهای متمایزی قرار گیرند. گراف

[۱۷] Subdivide
[۱۸] Matching
[۱۹] Saturated
[۲۰] Perfect
[۲۱] Connected
[۲۲] Subgraph
[۲۳] Union
[۲۴] Bipartite

دوبخشی G را به صورت سه تایی (X, Y, E) نیز نمایش می‌دهند که در آن X و Y افرازهایی از V می‌باشند.

اگر هر رأس X مجاور با هر رأس Y باشد، آن‌گاه گراف دوبخشی را یک گراف دوبخشی کامل گویند. هرگاه $|X| = m$ و $|Y| = n$، گراف دوبخشی حاصل را با نماد $K_{m,n}$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۱.۱.۱۲ دو گراف G و H را یکریخت [۲۵] گوییم هرگاه نگاشت‌های دوسویی $\psi : V(G) \to V(H)$ و $\theta : E(G) \to E(H)$ چنان موجود باشند که رأس v از گراف G روی یال e از گراف G باشد، اگروتنها اگر $\psi(v)$ روی یال $\theta(e)$ باشد. دو گراف یکریخت G و H را با نماد $G \cong H$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱۳ گرافی را که هر دو رأس آن دقیقاً با یک مسیر به هم وصل شده باشند، یک درخت [۲۶] می‌گوییم.

تعریف ۱.۱.۱۴ یالی که حذف آن تعداد مؤلفه‌های همبند گراف را افزایش می‌دهد، **پل** [۲۷] می‌گوییم. به عبارت دیگر یک یال پل است، اگروتنها اگر مشمول در هیچ دوری نباشد.

تعریف ۱.۱.۱۵ هر زیرگراف همبند ماکسیمال گراف G را یک **مؤلفه** [۲۸] گراف G گویند.

تعریف ۱.۱.۱۶ یک **برش رأسی** [۲۹] گراف G، مجموعه‌ای از رأس‌ها است که با حذف آن‌ها تعداد مؤلفه‌های گراف G افزایش می‌یابد.

[۲۵] Isomorphic
[۲۶] Tree
[۲۷] Bridge
[۲۸] Component
[۲۹] Vertex cut

هرگاه برش رأسی X شامل تنها یک رأس مثل v باشد، در این صورت v، یک رأس برشی از گراف G نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۱.۱۷ بلوک[۳۰] زیرگراف همبند ماکسیمال است که رأس برشی ندارد.

تعریف ۱.۱.۱۸ گراف G، $k-$همبند است هرگاه هر برش رأسی G دارای حداقل k رأس باشد.

همبندی گراف G را با $\mathcal{K}(G)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{K}(G) = min\{k : G، k-\text{همبند است}\}$$

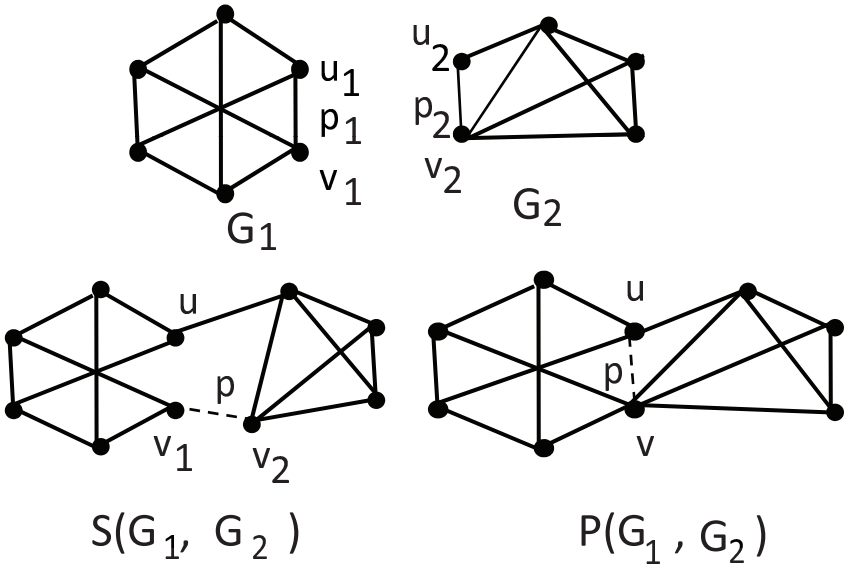
تعریف ۱.۱.۱۹ یک گراف G قابل نشاندن در صفحه یا**مسطح**[۳۱] است هرگاه بتوان G را در صفحه طوری ترسیم کرد که هیچ دو یال G یکدیگر را در نقطه‌ای غیر از رأس قطع نکنند. این روش رسم کردن گراف G را نمایش صفحه‌ای G یا نشاندن مسطح گراف G گویند.

نشاندن مسطح $\widetilde{G}$ از گراف مسطح G می‌تواند به عنوان گرافی یکریخت با G تلقی شود. اغلب به نشاندن مسطح $\widetilde{G}$ از گراف G، گراف مسطح شده می‌گوییم.

تعریف ۱.۱.۲۰ برای $i \in \{۱, ۲\}$، فرض کنیم p_i یالی از گراف G_i باشد. به طور دلخواه جهتی را برای p_i در نظر می‌گیریم، ابتدای آن را u_i و انتهایش را v_i می‌نامیم. سپس $p_۱$ را از $G_۱$ و $p_۲$ را از $G_۲$ حذف می‌کنیم، دو رأس $u_۱$ و $u_۲$ را بر هم منطبق کرده و رأس جدید را u می‌نامیم، برای ایجاد **اتصال سری**[۳۲]، یال جدید p را که $v_۱$ را به $v_۲$ وصل می‌کند اضافه می‌کنیم. برای ایجاد

[۳۰] Block
[۳۱] Planar
[۳۲] Series connection

اتصال موازی[۳۳]، دو رأس v_1 و v_2 را نیز بر هم منطبق کرده و رأس جدید را v می‌نامیم، حال یال جدید را طوری اضافه می‌کنیم که دو رأس u و v را به هم وصل کند. بنابراین به جز در حالتی که دقیقاً یکی از p_1 و p_2 یک طوقه است، اتصال موازی را می‌توان به صورت ساده با منطبق کردن p_1 و p_2 به طوری که هردو در یک جهت باشند به دست آورد.



شکل ۱.۱ اتصال سری و موازی در دو گراف G_1 وG_2

[۳۳] Parallel connection

۲.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی از نظریهٔ متروید

در این قسمت تعاریف وقضایای مقدماتی از نظریه متروید را مطرح می‌کنیم. برای اطلاعات بیشتر وجزئیات اثبات ها خواننده می‌تواند به مرجع [۱۰] مراجعه نماید.

تعریف ۱.۲.۱ متروید[۳۴] M زوج مرتب $M=(E,\mathcal{I})$ است که در آن E یک مجموعه متناهی و $\mathcal{I}$ گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های E است که در سه شرط زیر صدق می کند:

I۱) $\emptyset \in \mathcal{I}$.

I۲) اگر $X \in \mathcal{I}$ و $Y \subseteq X$، آن‌گاه $Y \in \mathcal{I}$.

I۳) اگر $X \in \mathcal{I}$ و $Y \in \mathcal{I}$ و $|X| > |Y|$، آن‌گاه عضوی مانند $x \in X - Y$ وجود دارد که $Y \cup \{x\} \in \mathcal{I}$.

اگر $M=(E,\mathcal{I})$ یک متروید باشد، آن‌گاه M را یک متروید روی E و E را **مجموعه زمینه**[۳۵] آن می‌گویند.

هر عضو $\mathcal{I}$ را یک **مجموعه مستقل**[۳۶] M و هر زیرمجموعه E را که در $\mathcal{I}$ قرار نداشته باشد، یک **مجموعه وابسته** [۳۷] می‌گوییم و هر زیر مجموعه وابسته مینیمال متروید M را یک دور M گوییم.

همچنین مترویدی را که در آن تمام زیرمجموعه‌ها مستقل اند، متروید **آزاد**[۳۸] می‌گوییم.

---

[۳۴] Matroid
[۳۵] Ground set
[۳۶] Independent set
[۳۷] Dependent set
[۳۸] Free

قضیه ۲.۲.۱ فرض کنیم $\mathcal{C}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های مجموعه E باشد، دراین صورت $\mathcal{C}$ گردایه‌ای از دورهای یک متروید روی E است اگروتنها اگر $\mathcal{C}$ در شرایط زیر صدق کند.

$C۱$) $\emptyset \notin \mathcal{C}$.

$C۲$) اگر $C_۱ \in \mathcal{C}$, $C_۲ \in \mathcal{C}$ و $C_۲ \subseteq C_۱$، آن‌گاه $C_۱ = C_۲$.

$C۳$) اگر $C_۱ \in \mathcal{C}$ و $C_۲ \in \mathcal{C}$ و $C_۱ \neq C_۲$ و $e \in C_۱ \cap C_۲$، آن‌گاه $C_۳ \in \mathcal{C}$ وجود دارد به‌طوری که $C_۳ \subseteq (C_۱ \cup C_۲) - e$.

به شرط $C۳$ اصل حذف دور گوییم.

برهان : به [[۱۰] نتیجه ۵.۱.۱] مراجعه شود. ■

یک دور یک عضوی از متروید M را یک طوقه متروید M گوییم. همچنین دوری با n عضو از متروید M را یک n—دور M گوییم.

تعریف ۳.۲.۱ دو متروید M و N را یکریخت[۳۹] می‌گوییم، اگر نگاشت دوسویی $F : E(M) \to E(N)$ وجود داشته باشد به طوری که $X \subseteq E(M)$ در M مستقل باشد، اگروتنها اگر $F(X)$ در N مستقل باشد.

مثال ۴.۲.۱ فرض کنیم A ماتریس زیر باشد

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

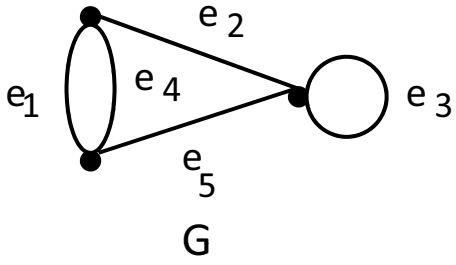
که در آن ستون‌ها به ترتیب از چپ ۱،۲،۳،۴،۵ نام‌گذاری شده‌اند. در این صورت با فرض $E = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ و $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{۱\}, \{۲\}, \{۴\}, \{۵\}, \{۱, ۲\}, \{۱, ۵\}, \{۲, ۴\}, \{۲, ۵\}, \{۴, ۵\}\}$

[۳۹] Isomorphic

$(E,\mathcal{I})$ یک متروید می‌باشد. اعضای $\mathcal{I}$ تمامی زیرمجموعه‌های مستقل خطی از بردارهای ستونی ماتریس A می‌باشند. متروید بالا را یک **متروید برداری**[۴۰] گوییم و با $M[A]$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵.۲.۱ فرض کنیم G یک گراف باشد و $E = E(G)$. مجموعه $\mathcal{I}$ را گردایه مجموعه‌های یال‌های تمامی زیرگراف‌های بی‌دور G در نظر می‌گیریم. در این‌صورت $(E,\mathcal{I})$ یک متروید است. این متروید را **متروید دوری**[۴۱] گراف G گوییم و با نماد $M(G)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۶.۲.۱ فرض کنیم G گراف شکل زیر باشد،



شکل ۲.۱

دراین صورت برای G داریم $E = \{e_۱, e_۲, e_۳, e_۴, e_۵\}$ و

$$\mathcal{I} = \{\emptyset, \{e_۱\}, \{e_۲\}, \{e_۴\}, \{e_۵\}, \{e_۱, e_۲\}, \{e_۱, e_۵\}, \{e_۲, e_۴\}, \{e_۲, e_۵\}, \{e_۴, e_۵\}\}$$

و

$$\mathcal{C} = \{\{e_۳\}, \{e_۱, e_۴\}, \{e_۱, e_۲, e_۵\}, \{e_۲, e_۴, e_۵\}\}$$

[۴۰] Vector matroid
[۴۱] Cycle matroid

تعریف ۷.۲.۱ مترویدی را که یکریخت با یک متروید دوری باشد، **متروید گرافیک**[۴۲] گوییم.

تعریف ۸.۲.۱ هر مجموعه مستقل ماکسیمال متروید M را یک **پایه** [۴۳] M می‌نامیم. پایه‌های متروید M را با نماد $\mathcal{B}(M)$ یا $\mathcal{B}$ نمایش می‌دهیم.

لم ۹.۲.۱ اگر B_1 و B_2 دو پایه متروید M باشند، آن‌گاه $|B_1| = |B_2|$.

برهان : به [[۱۰] لم ۱.۲.۱] مراجعه شود. ■

همان طور که می‌توان هر متروید را توسط دورهایش تعیین کرد، می‌توان آن را توسط پایه‌هایش نیز مطابق قضیه زیر بیان کرد:

قضیه ۱۰.۲.۱ فرض کنیم E یک مجموعه و $\mathcal{B}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های E باشد که در دو شرط زیر صدق می‌کند:

$(B1)$ $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

$(B2)$ اگر $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ و $x \in B_1 - B_2$، آن‌گاه عضوی مانند $y \in B_2 - B_1$ وجود دارد به طوری که $(B_1 - x) \cup y \in \mathcal{B}$.

فرض کنیم $\mathcal{I}$ گردایه آن زیرمجموعه‌های E است که در یک عضو $\mathcal{B}$ جای می‌گیرند. در این صورت $(E, \mathcal{I})$ یک متروید است که $\mathcal{B}$ گردایه پایه‌های آن است.

برهان : به [[۱۰] قضیه ۳.۲.۱] مراجعه شود. ■

[۴۲] Graphic matroid

[۴۳] Base

تعریف ۱۱.۲.۱ فرض کنیم $M = (E, \mathcal{I})$ یک متروید و $X \subseteq E$ باشد. رتبه X را چنین تعریف می‌کنیم:

$$r(X) = Max\{|A| : A \subseteq X \ , A \in \mathcal{I}\}$$

برای تابع رتبه فوق، لم و قضیه زیر را داریم:

لم ۱۲.۲.۱ فرض کنیم E یک مجموعه و $r : ۲^E \to \mathbb{N} \cup \{۰\}$ تابعی است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

$(R۱)$ اگر $X \subseteq E$، آن‌گاه $۰ \leq r(X) \leq |X|$.

$(R۲)$ اگر $X \subseteq Y \subseteq E$، آن‌گاه $r(X) \leq r(Y)$.

$(R۳)$ اگر X و Y دو زیرمجموعه از E باشند، آن‌گاه $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$.

فرض کنیم $\mathcal{I}$ گردایه زیرمجموعه‌های X از E است که $r(X) = |X|$. در این صورت $(E, \mathcal{I})$ یک متروید است که r تابع رتبه[۴۴] آن می‌باشد.

برهان : به [[۱۰] لم ۱.۳.۱] مراجعه شود. ■

قضیه ۱۳.۲.۱ فرض کنیم M یک متروید با تابع رتبه r باشد و $X \subseteq E(M)$. دراین صورت روابط زیر برقرارند:

(الف) X مستقل است اگروتنها اگر $r(X) =| X |$.

(ب) X یک پایه است اگروتنها اگر $|X| = r(X) = r(M)$.

(ج) X یک دور است اگروتنها اگر X غیرتهی بوده و برای هر $x \in X$ داشته باشیم:

[۴۴] Rank

$$r(X - x) = |X| - ۱ = r(X).$$

برهان : به [[۱۰] قضیه ۵.۳.۱] مراجعه شود. ■

تعریف ۱۴.۲.۱ فرض کنیم M یک متروید روی E با تابع رتبه r باشد. تابع

$$cl : ۲^E \to ۲^E$$

با ضابطهٔ

$$\forall \ X \subseteq E \ , \quad cl(X) = \{x \in E : \ r(X \cup x) = r(X)\}.$$

را **عملگر بستار**[۴۵] گوییم. به عبارت دیگر بستار X از افزودن اعضایی به X حاصل می‌شود که افزودن آن‌ها رتبه X را تغییر ندهد.

لم ۱۵.۲.۱ فرض کنیم E یک مجموعه غیر تهی و $cl : ۲^E \to ۲^E$ یک تابع باشد. در این صورت شرط لازم وکافی برای این که cl عملگر بستار یک متروید باشد، این است در شرایط زیر صدق کند:

$(cl۱)$ اگر $X \subseteq E$، آن‌گاه $X \subseteq cl(X)$.

$(cl۲)$ اگر $X \subseteq Y \subseteq E$، آن‌گاه $cl(X) \subseteq cl(Y)$.

$(cl۳)$ اگر $X \subseteq E$، آن‌گاه $cl(cl(X)) = cl(X)$.

$(cl۴)$ اگر $X \subseteq E$، $x \in E$ و $y \in cl(X \cup x) - cl(X)$ ، آن گاه $x \in cl(X \cup y)$.

برهان : به [[۱۰] لم ۲.۴.۱] مراجعه شود. ■

[۴۵] Closure Operator

لم ۱.۲.۱۶ اگر $X \subseteq E$ و $x \in E$، آن‌گاه

$$r(X) \leq r(X \cup x) \leq r(X) + ۱.$$

برهان : به [[۱۰] لم ۳.۴.۱] مراجعه شود. ■

تعریف ۱.۲.۱۷ فرض کنیم M یک متروید باشد و $X \subseteq E(M)$. $cl(X)$ را بستار X در M نامیده و با $\bar{X}$ نمایش می‌دهیم. اگر $cl(X) = X$، آن گاه X را یک مجموعه بسته یا یک **فلت**[۴۶] گوییم.

تعریف ۱.۲.۱۸ یک فلت از رتبه دو را در این پایان‌نامه یک **خط**[۴۷] می‌نامیم.

تعریف ۱.۲.۱۹ زیرمجموعه X از $E(M)$ را یک مجموعه **فراگیر**[۴۸] گوییم، هرگاه $cl(X) = E(M)$. (به عبارت دیگر می‌گوییم X، M را تولید می‌کند.)

همچنین هرگاه برای زیرمجموعه‌های X و Y از $E(M)$ داشته باشیم $cl(X) = Y$، گوییم X، Y را تولید می‌کند. در این حالت Y را توسیع X در M نیز می‌گویند.

قضیه ۱.۲.۲۰ فرض کنیم M یک متروید بوده و $\mathcal{B}$ گردایه پایه‌های آن باشد. تعریف می کنیم $\mathcal{B}^* = \{X \ : \ E - X \in \mathcal{B}\}$. دراین صورت $\mathcal{B}^*$ گردایه پایه‌های یک متروید روی E می‌باشد. این متروید را با M^* نمایش داده و آن را **دوگان** [۴۹] متروید M می‌نامیم.

برهان : به [[۱۰] قضیه ۱.۱.۲] مراجعه شود . ■

[۴۶] Flat
[۴۷] Line
[۴۸] Spanning
[۴۹] Dual

پایه‌ها و دورهای متروید M^* را به ترتیب **هم‌پایه**[۵۰]**ها** و **هم‌دور**[۵۱]**های** متروید M می‌گوییم.

برای دوگان متروید M روابط زیر برقرارند:

$$\mathcal{B}^*(M) = \mathcal{B}(M^*) \qquad , \qquad (M^*)^* = M$$

همچنین تابع رتبه متروید M^* را با r^* نمایش می‌دهیم به طوری که $r(M) + r^*(M) = |E(M)|$.

تابع r^* را تابع هم− رتبه M نیز می گوییم.

تعریف ۲۱.۲.۱ فرض کنیم $M = (E, \mathcal{I})$ یک متروید و $X \subseteq E(M)$ و

$$\mathcal{I}' = \{\ Y \subseteq E(M) - X\ :\ Y \in \mathcal{I}(M)\}$$

باشد، دراین صورت $(E - X, \mathcal{I}')$ یک متروید است. این متروید را با $M\backslash X$ نمایش می‌دهیم و آن را M **حذف**[۵۲] X می‌نامیم.

اگر $Y = E(M) - X$، این متروید را با $M|Y$ نمایش می دهیم و آن را **تحدید**[۵۳] M به روی Y می‌نامیم.

تعریف ۲۲.۲.۱ فرض کنیم که $M = (E, \mathcal{I})$ یک متروید و$X \subseteq E(M)$ باشد. **انقباض**[۵۴] X در M را با M/X نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم: $M/X = (M^*\backslash X)^*$.

[۵۰] Cobase
[۵۱] Cocycle
[۵۲] Deletion
[۵۳] Restriction
[۵۴] Contraction

تعریف ۲۳.۲.۱ فرض کنیم $M = (E, \mathcal{I})$ یک متروید باشد. مترویدی که به وسیله دنباله‌ای از حذف‌ها و انقباض‌ها روی زیرمجموعه‌هایی از $E(M)$ در M حاصل می‌شود را یک **مینور**[۵۵] متروید M می‌نامیم.

همچنین N یک مینور M است اگروتنها اگر N^* یک مینور M^* باشد، یعنی

$$N^* = M^* \backslash X/Y \quad \Leftrightarrow \quad N = M \backslash X/Y$$

تعریف ۲۴.۲.۱ فرض کنیم M یک متروید باشد. برای هر عضو e از متروید M، فرض کنیم

$\gamma(e) = \{e\} \cup \{f \ : \ M$ دوری شامل هر دو عضو e و f داشته باشد.$\}$

حال تعریف می‌کنیم $e\gamma f$ اگروتنها اگر $e \in \gamma(f)$.

قضیه ۲۵.۲.۱ رابطه γ یک رابطه هم ارزی روی $E(M)$ است.

برهان : به [[۱۰] قضیه ۲.۱.۴] مراجعه شود. ■

نتیجه ۲۶.۲.۱ اگر $T \subseteq E(M)$ و T یک $\gamma-$کلاس هم ارزی باشد، آن‌گاه برای هر عضو t از T داریم، $\gamma(t) = T$.

برهان : به [[۱۰] نتیجه ۳.۱.۴] مراجعه شود. ■

کلاس‌های هم ارزی تحت رابطه γ را مؤلفه‌های همبند M گوییم. بدیهی است که هر طوقه و نیز هر هم طوقه M، مؤلفه‌های همبند M می‌باشند.

اگر $E(M)$ تنها مؤلفه M باشد، آن‌گاه متروید M را همبند گوییم. در غیر این صورت M ناهمبند است.

[۵۵] Minor

تعریف ۲۷.۲.۱ زیرمجموعه X از مترویید M را یک **جداساز**[۵۶] گوییم هرگاه X به صورت اجتماعی از مؤلفه‌های M باشد.

مجموعه تهی و $E(M)$ دو جداساز بدیهی M هستند و هر جداساز دیگر M را یک جداساز غیر بدیهی گوییم.

بدیهی است که اگر X یک جداساز M باشد، آن‌گاه $E-X$ نیز یک جداساز M است.

قضیه ۲۸.۲.۱ فرض کنیم T زیرمجموعه‌ای از مجموعه زمینه مترویید M یعنی $E(M)$ باشد. دراین صورت T یک جداساز M است اگروتنها اگر $r(T)+r(E-T)-r(M)=0$.

برهان : به [[۱۰] قضیه ۱.۲.۴] مراجعه شود. ■

قضیه ۲۹.۲.۱ اگر T زیرمجموعه‌ای از مترویید M باشد، آن‌گاه $M\backslash T = M/T$ اگروتنها اگر T یک جداساز M باشد.

برهان : به [[۱۰] نتیجه ۴.۲.۴] مراجعه شود. ■

نتیجه ۳۰.۲.۱ M همبند است اگروتنها اگر M^* همبند باشد.

برهان : به [[۱۰] نتیجه ۸.۲.۴] مراجعه شود. ■

قضیه ۳۱.۲.۱ اگر x و y دو عضو متمایز دور C از مترویید M باشند، آن‌گاه M دارای هم‌دوری مثل C^* است که $C\cap C^*=\{x,y\}$.

برهان : به [[۱۰] نتیجه ۹.۲.۴] مراجعه شود. ■

[۵۶] Separator

قضیه ۳۲.۲.۱ اگر C یک دور و C^* یک هم‌دور M باشند، آن‌گاه $|C \cap C^*| \neq ۱$.

برهان : به [[۱۰] قضیه ۱۱.۱.۲] مراجعه شود. ■

خاصیت قضیه قبل را در این پایان‌نامه **تعامد**[۵۷] می‌نامیم.

تعریف ۳۳.۲.۱ فرض کنیم E یک مجموعهٔ n عضوی و $\mathcal{B}$ گردایه تمام زیر مجموعه‌های m عضوی E باشد که در آن $n \geq m \geq ۰$. دراین صورت $\mathcal{B}$ گردایه پایه‌های یک متروید روی E است. این متروید را با $U_{m,n}$ نمایش داده و آن را متروید یکنواخت[۵۸] می‌نامیم.

بدیهی است که $U^*_{m,n} = U_{n-m,n}$.

تعریف ۳۴.۲.۱ فرض کنیم که $M = (E, \mathcal{I})$ یک متروید باشد. یک فلت از متروید M را که از رتبه $r(M) - ۱$ باشد، یک **ابرصفحه**[۵۹] از آن می‌نامیم.

قضیه ۳۵.۲.۱ فرض کنیم M یک متروید و X زیرمجموعه E باشد که یک دور و در عین حال یک ابرصفحه M است. فرض کنیم $\mathcal{B}' = \mathcal{B}(M) \cup \{X\}$. دراین صورت $\mathcal{B}'$ گردایه پایه‌های متروید M' روی $E(M)$ است. به علاوه

$$\mathcal{C}(M') = (\mathcal{C}(M) - \{X\}) \cup \{X \cup e : e \in E(M) - X\}.$$

گوییم متروید M' به وسیله **واهلش** [۶۰] دور−ابرصفحه X از متروید M به‌دست آمده است.

برهان : به [[۱۰] قضیه ۷.۱.۲] مراجعه شود. ■

[۵۷] Orthogonality
[۵۸] Uniform matroid
[۵۹] Hyperplane
[۶۰] Relaxing

تعریف ۳۶.۲.۱ فرض کنیم X و Y دو فلت متروید M باشند. زوج (X,Y) را یک **زوج مدولار**[۶۱] گوییم هرگاه $r(X)+r(Y)=r(X\cup Y)+r(X\cap Y)$.

همچنین اگر Z یک فلت از متروید M باشد به‌طوری‌که برای هر فلت دلخواه Y از متروید M، (Z,Y) یک زوج مدولار از M باشد، آن‌گاه Z را یک **فلت مدولار**[۶۲] از متروید M می‌گوییم.

قضیه ۳۷.۲.۱ فرض کنیم M_1 و M_2 به ترتیب متروید‌هایی روی مجموعه‌های جدا از هم E_1 و E_2 باشند به‌طوری‌که $E_1\cap E_2=\emptyset$. فرض کنیم $E=E_1\cup E_2$ و $\mathcal{I}=\{I_1\cup I_2 \ : \ I_1\in\mathcal{I}(M_1)\ ,\ I_2\in\mathcal{I}(M_2)\}$. دراین‌صورت $(E,\mathcal{I})$ یک متروید است. این متروید را **جمع مستقیم**[۶۳] دو متروید M_1 و M_2 گوییم و با $M_1\oplus M_2$ نمایش می‌دهیم.

برهان : به [[۱۰] قضیه ۱۲.۲.۴] مراجعه شود. ■

همچنین داریم :

$\mathcal{B}(M_1\oplus M_2)=\{B_1\cup B_2 \ : \ B_1$ یک پایه M_1 و B_2 یک پایه M_2 است $\}$.

$\mathcal{C}(M_1\oplus M_2)=\{\mathcal{C}_1\cup\mathcal{C}_2 \ : \ \mathcal{C}_i$ گردایه دورهای متروید M_i است برای $i\in\{1,2\}\}$.

$r_{M_1\oplus M_2}(X)=r_{M_1}(X\cap E_1)+r_{M_2}(X\cap E_2)$.

قضیه ۳۸.۲.۱ فرض کنیم که M_1 و M_2 دو متروید دلخواه روی دو مجموعه جدا از هم E_1 و E_2 باشند. فرض کنیم p_1 و p_2 به ترتیب اعضایی از M_1 و M_2 باشند که نه طوقه‌اند و نه هم‌طوقه.

[۶۱] Modular pair
[۶۲] Modular flat
[۶۳] Direct sum

فرض کنیم p عضوی است که نه در E_1 است و نه در E_2 و

$$E = (E_1 - p_1) \cup (E_2 - p_2) \cup \{p\}.$$

تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{C}_s = \mathcal{C}(M_1 \backslash p_1) \cup \mathcal{C}(M_2 \backslash p_2) \cup \{(C_1 - p_1) \cup (C_2 - p_2) \cup P \ : \ p_i \in C_i \in \mathcal{C}(M_i)\}.$$

برای $i \in \{1, 2\}$ داریم:

$$\mathcal{C}_p = \mathcal{C}(M_1 \backslash p_1) \cup \{(C_1 - p_1) \cup p \ : \ p_1 \in C_1 \in \mathcal{C}(M_1)\} \cup \mathcal{C}(M_2 \backslash p_2)$$

$$\cup \{(C_2 - p_2) \cup p \ : \ p_2 \in C_2 \in \mathcal{C}(M_2)\} \cup \{(C_1 - p_1) \cup (C_2 - p_2) \ : \quad p_i \in C_i \in \mathcal{C}(M_i)\}.$$

دراین صورت $\mathcal{C}_s$ و $\mathcal{C}_p$ گردایه دورهای یک متروید روی E هستند.

برهان : به [[۱۰] قضیه ۴.۱.۷] مراجعه شود. ■

مترویدهای روی E را که مجموعه دورهای آن‌ها به‌ترتیب $\mathcal{C}_s$ و $\mathcal{C}_p$ باشند با $S((M_1, p_1), (M_2, p_2))$ و $P((M_1, p_1), (M_2, p_2))$ یا به صورت ساده تر $S(M_1, M_2)$ و $P(M_1, M_2)$ نمایش می‌دهیم و این مترویدها را به ترتیب **اتصال سری** [۶۴] و **اتصال موازی** [۶۵] دو متروید M_1 و M_2 نسبت به نقاط پایه p_1 و p_2 گوییم. درحقیقت $S(M_1, M_2)$ و $P(M_1, M_2)$ از دو متروید M_1 و M_2 که مجموعه‌های زمینه آن‌ها در یک عضو مشترکند، حاصل می‌شود. این عضو مشترک را نقطه پایه اتصال می‌گوییم.

[۶۴] Series connection

[۶۵] Parallel connection

تعریف ۳۹.۲.۱ فرض کنیم M و N دو متروید باشند به‌طوری‌که هر یک از آن‌ها حداقل سه عضو دارند و فرض کنیم $E(M) \cap E(N) = \{p\}$ و $\{p\}$ یک جداساز برای هیچ کدام از دو متروید M و N نباشد. **۲–مجموع**[۶۶] $M \oplus_۲ N$ از دو متروید M و N عبارت است از $S(M,N)/p$ و یا به طور معادل $P(M,N)\backslash p$. بدیهی است که $M \oplus_۲ N = N \oplus_۲ M$.

p را نقطه پایه ۲–مجموع و M و N را قسمت‌های آن گوییم.

تعریف ۴۰.۲.۱ متروید Q را **خارج قسمت**[۶۷] متروید M گوییم، هرگاه مترویدی مانند N چنان موجود باشد که برای زیرمجموعه‌ای از $E(N)$ مانند X داشته باشیم:

$$M = N\backslash X \qquad , \qquad Q = N/X$$

واضح است که $E(Q) = E(M)$.

تعریف ۴۱.۲.۱ فرض کنیم k یک عدد طبیعی باشد. برای متروید M، افراز (X,Y) از $E(M)$ را یک k–**جداسازی**[۶۸] گوییم اگر دو شرط زیر برقرار باشد:

$$(۱) \quad min\{\ |X|\ ,\ |Y|\ \} \geq k \qquad , \qquad (۲) \quad r(X) + r(Y) - r(M) \leq k - ۱$$

(الف) اگر در رابطه (۱) تساوی رخ دهد، آن‌گاه (X,Y) را یک k–**جداسازی مینیمال**[۶۹] از M گوییم.

(ب) اگر در رابطه (۲) تساوی رخ دهد، آن‌گاه (X,Y) را یک k–**جداسازی دقیق** [۷۰] از M گوییم.

---

[۶۶] 2-Sum
[۶۷] Quotient
[۶۸] k-Separation
[۶۹] Minimal k-separation
[۷۰] Exact k-separation

(ج) اگر M دارای یک $k-$جداسازی باشد، آن‌گاه M را **$k-$جداشونده**[۷۱] یا **$k-$جداشده**[۷۲] گوییم.

به ازای هر $n \geq ۲$، مترویدهای M، $n-$همبند است هرگاه برای هر $k \in \{۱, ۲, ..., n-۱\}$ مترویدهای M هیچ $k-$جداسازی نداشته باشد. بنابراین M، $۲-$همبند است اگروتنها اگر M همبند باشد.

تعریف ۴۲.۲.۱ همبندی تات از مترویدهای M را با $\lambda(M)$ نمایش می‌دهیم. هرگاه M برای برخی مقادیر k، $k-$جداشده باشد، همبندی $\lambda(M)$ از M عبارت است از:

$$min\{j : M \text{ دارای } j-\text{جداسازی باشد}\}$$

درغیر این صورت تعریف می‌کنیم $\lambda(M) = \infty$.

هرگاه n عدد طبیعی بزرگتر از یک باشد، گوییم مترویدهای M، $n-$همبند است اگروتنها اگر $\lambda(M) \geq n$.

قضیه ۴۳.۲.۱ فرض کنیم M یک مترویدهای باشد. در این صورت $\lambda(M) = \lambda(M^*)$.

برهان : به [[۱۰] قضیه ۵.۱.۸] مراجعه شود. ■

قضیه ۴۴.۲.۱ اگر مترویدهای M، $n-$همبند باشد و $|E(M)| \geq ۲(n-۱)$، آن‌گاه هر دور و نیز هر هم‌دور در M حداقل n عضو خواهند داشت.

برهان : به [[۱۰] قضیه ٦.۱.۸] مراجعه شود. ■

نتیجه ۴۵.۲.۱ اگر مترویدهای M دارای همبندی نامتناهی باشد، آن‌گاه M مترویدهای یکنواخت است. به‌علاوه

---

[۷۱] k-Separable

[۷۲] k-Separated

$$\lambda(U_{r,n}) = \begin{cases} r+۱ & \text{اگر } n \geq ۲r+۲ \\ n-r+۱ & \text{اگر } n \leq ۲r-۲ \\ \infty & \text{درغیراین‌صورت} \end{cases}$$

نتیجه ۴۶.۲.۱ فرض کنیم (X,Y) یک k–جداسازی برای مترویدِ k–همبند M باشد و فرض کنیم $|X| = k$. در این صورت X یک دور هم‌مستقل و یا یک هم‌دور مستقل M است.

برهان : به [[۱۰] نتیجه ۱۱.۱.۸] مراجعه شود. ■

قضیه ۴۷.۲.۱ فرض کنیم M یک مترویدِ n–همبند باشد که حداقل $۲n-۱$ عضو دارد. در این صورت M هیچ زیرمجموعه n–عضوی ندارد که یک دور و نیز یک هم‌دور M باشد.

برهان : به [[۱۰] قضیه ۷.۱.۸] مراجعه شود. ■

قضیه ۴۸.۲.۱ یک مترویدِ ۲–همبندِ M، ۳–همبند نیست اگروتنها اگر برای برخی مترویدهای $M_۱$ و $M_۲$، $M = M_۱ \oplus_۲ M_۲$، به طوری که هر یک از آن‌ها با یک مینور سره از M یکریخت هستند.

برهان : به [[۱۰] قضیه ۱.۳.۸] مراجعه شود. ■

قضیه ۴۹.۲.۱ فرض کنیم $M_۱$ و $M_۲$ مترویدهایی باشند با $E(M_۱) \cap E(M_۲) = \{p\}$. در این صورت :

(i) $r(S(M_1, M_2)) = \begin{cases} r(M_1) + r(M_2) - 1 & \text{اگر } p \text{ یک هم‌طوقه از هر دوی } M_1 \text{ و } M_2 \text{ باشد،} \\ r(M_1) + r(M_2) & \text{درغیراین‌صورت} \end{cases}$

$r(P(M_1, M_2)) = \begin{cases} r(M_1) + r(M_2) & \text{اگر } p \text{ یک طوقه از هر دوی } M_1 \text{ و } M_2 \text{ باشد،} \\ r(M_1) + r(M_2) - 1 & \text{درغیراین‌صورت} \end{cases}$

(ii) مگر این که p یک طوقه از M_1 و یک هم‌طوقه از M_2 باشد لذا:

$$M_1 = S(M_1, M_2)/(E(M_2) - p)$$

مگر این که p یک هم‌طوقه از M_1 و یک طوقه از M_2 باشد لذا:

$$M_1 = P(M_1, M_2)\backslash(E(M_2) - p).$$

(iii) $S(M_1, M_2)\backslash p = (M_1\backslash p) \oplus (M_2\backslash p)$

و $P(M_1, M_2)/p = (M_1/p) \oplus (M_2/p)$.

(iv) $S(M_1, M_2)/p = P(M_1, M_2)\backslash p$.

(v) اگر $e \in E(M_1) - p$، آن‌گاه

$$S(M_1, M_2)\backslash e = S(M_1\backslash e, M_2) , \qquad S(M_1, M_2)/e = S(M_1/e, M_2),$$

$$P(M_1, M_2)\backslash e = P(M_1\backslash e, M_2) , \qquad S(M_1, M_2)/e = p(M_1/e, M_2).$$

برهان : به [[۱۰] قضیه۷ .۱۵.۱] مراجعه شود. ■

تعریف ۵۰.۲.۱ فرض کنیم $M = (E, \mathcal{I})$ یک مترواید باشد و X زیر مجموعه‌ایی از E باشد، گوییم اعضای X در سری هایی از M هستند هرگاه هر دور M که شامل یک عضو X باشد، شامل

همه اعضای X باشد. همچنین هرگاه f و g عناصری از متروید M باشند به طوری که $\{f,g\}$ در M تشکیل یک دور می‌دهند، در این صورت گوییم عناصر f و g در M موازی هستند.

تعریف ۵۱.۲.۱ اگر $M\backslash f = N$ و f یک ۲−دور از M باشد، آن‌گاه M یک توسعه موازی از N است و N یک حذف موازی از M است. همین طور اگر $M/f = N$ و f یک ۲−هم‌دور از M باشد، آن‌گاه M، توسعه سری از N و N انقباض سری از M است.

همچنین M یک توسعه موازی از N است اگر و تنها اگر M^* یک توسعه سری از N^* باشد.

تعریف ۵۲.۲.۱ زیرمجموعه ماکسیمال از اعضای موازی را **کلاس موازی**[۷۳] گوییم، همچنین زیرمجموعه ماکسیمال از اعضای سری را **کلاس سری** [۷۴] گوییم. یک کلاس سری از M، یک کلاس موازی از M^* است و غیر بدیهی است هرگاه شامل حداقل دو عضو باشد.

تعریف ۵۳.۲.۱ یک دور با سه عضو از متروید M را یک **مثلث**[۷۵] و یک هم‌دور با سه عضو از M را یک **سه‌تایی**[۷۶] می‌نامیم.

تعریف ۵۴.۲.۱ یک دنباله از متروید‌های k−همبند $N_0, N_1, ..., N_m$ یک k−**زنجیر**[۷۷] از N_0 تا N_m می‌نامیم. هرگاه N_{i-1} یک مینور از N_i برای $i \in \{1, 2, ..., m\}$ باشد، می‌گوییم این زنجیر دارای طول $t = max\{\ |E(N_i)| - |E(N_{i-1})|\ \}$ است.

همچنین زنجیرهایی با طول یک را فشرده می‌گوییم.

---

[۷۳] Parallel class
[۷۴] Series class
[۷۵] Triangle
[۷۶] Triad
[۷۷] k-Chain

تعریف ۵۵.۲.۱ گراف W_n را با رئوس $v_{n+1}، ...، v_2، v_1$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

رئوس $v_n، ...، v_2، v_1$ را پشت سر هم به ترتیب اندیس‌هایشان روی محیط یک دایره قرار داده و رأس v_{n+1} را در مرکز این دایره قرار می‌دهیم و رئوس دیگر را توسط دقیقاً یک یال به v_{n+1} وصل می‌کنیم. دو مجموعه E_1 و E_2 را از یال‌های این گراف به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$E_1 = \{e'_i \ : \ e'_i = v_{n+1}v_i \ , \ 1 \leq i \leq n\}$$

و

$$E_2 = \{e_i \ : \ e_i = v_iv_{i+1} \ , \ 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{e_n = v_nv_1\}$$

واضح است که $E_1 \cup E_2$ برابر مجموعه یال‌های این گراف است و نیز گشت

$$v_1e_1v_2e_2v_3e_3v_4...v_ne_nv_{n+1}$$

یک دور در گراف W_n خواهد بود. مترویدِ دوری حاصل از گراف W_n را یک چرخ [۷۸] از رتبه n می‌نامیم و آن را با $M(W_n)$ نمایش می‌دهیم. اعضای مجموعه زمینه این مترویدِ یال‌های گراف W_n خواهند بود. بنابراین

$$E(M(W_n)) = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_n, e'_1, e'_2, e'_3, ..., e'_n\}$$

اگر مجموعه C را به صورت

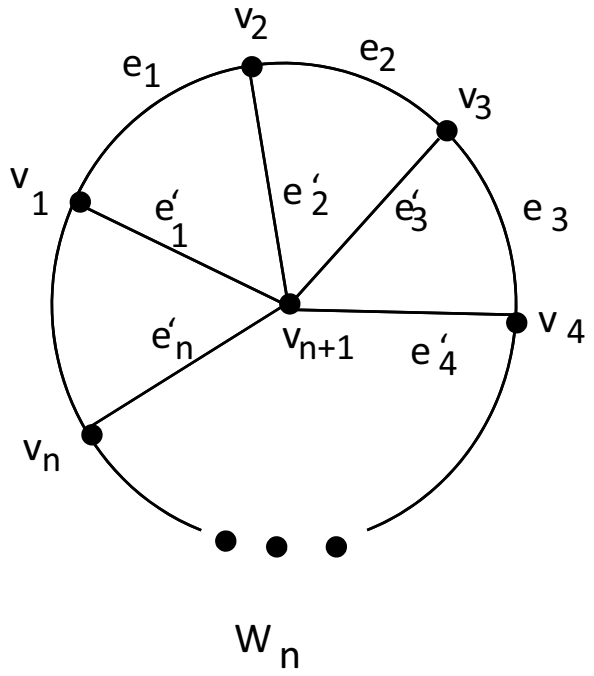
$$C = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$$

تعریف می‌کنیم، آن‌گاه C یک دور—ابرصفحه از $M(W_n)$ خواهد بود. مترویدِ حاصل از واهلش

[۷۸] Wheel

دور–ابرصفحه C در $M(W_n)$ را یک **چرخش**[۷۹] از رتبه n نامیده و آن را با W^n نمایش خواهیم داد.

شکل (۳.۱) چرخ W_n را نمایش می‌دهد.



شکل ۳.۱

تعریف ۵۶.۲.۱ فرض کنیم M یک چرخ باشد و این چرخ را با همان نمادهایی که در تعریف قبل بیان شده، برچسب گذاری می‌کنیم. دراین صورت برای هر i در $\{۱, ۲, ..., n\}$، عضو e'_i را که در مجموعه $E_۱$ قرار دارد، یک **پره**[۸۰] از مترویدِ M و عضو e_i را که در مجموعه $E_۲$ قرار دارد، یک عضو

[۷۹] Whirl
[۸۰] Spoke

محیطی[۸۱] از مترویدِ M می‌گوییم.

یک ساختار اساسی در مطالعه مترویدهای ۳–همبند زنجیره‌ای از مثلث‌ها و سه‌تایی‌هاست. فرض کنیم $T_1, T_2, ..., T_k$ ترتیبی از زیرمجموعه‌های غیرتهی از اعضای مجموعه زمینه مترویدِ M باشند که هر یک از آن‌ها یک مثلث یا یک سه‌تایی است به‌طوری‌که برای هر i در $\{1, 2, ..., k-1\}$،

(الف) $|T_i \cap T_{i+1}| = 2$ و

(ب) $(T_{i+1} - T_i) \cap (T_1 \cup T_2 \cup ... \cup T_i) = \emptyset$ و

(ج) در مجموعه $\{T_i, T_{i-1}\}$ به طور دقیق یک مجموعه مثلث و یک مجموعه سه‌تایی است. دنبالهٔ $T_1, T_2, ..., T_k$ را که دارای شرایط بالا باشد، یک زنجیر از M با **پیوند**[۸۲]های $T_1, T_2, ..., T_k$ می‌نامیم.

اگر $T_1, T_2, ..., T_k$ یک زنجیر از مترویدِ M باشد، آن‌گاه M دارای $k+2$ عضو متمایز مانند $a_1, a_2, ..., a_{k+2}$ است به طوری‌که برای هر i در $\{1, 2, ..., k\}$ داریم $T_i = \{a_i, a_{i+1}, a_{i+2}\}$. برای $k \geq 2$، عضوهای a_1 و a_{k+2} تنها عضوهای زنجیر هستند که فقط در یک پیوند قرار دارند که این دو عضو را اعضای انتهایی زنجیر می‌نامیم، و $a_2, a_3, ..., a_{k+1}$ را اعضای داخلی زنجیر می‌نامیم.

تعریف ۵۷.۲.۱ فرض کنیم (A, B) افرازی از مجموعه زمینه مترویدِ ۳–همبند M باشد به‌طوری‌که $|A| \geq 2$ و $|B| \geq 2$ و $T_1, T_2, ..., T_k$ یک زنجیر از مثلث‌ها و سه‌تایی‌هایی از M به طول حداقل دو پیوند باشد به‌طوری‌که اعضای داخلی زنجیر از A و اعضای انتهایی زنجیر از B باشند،

[۸۱] Rim
[۸۲] Link

دراین صورت زنجیر $T_1, T_2, ..., T_k$ را یک **فن**[۸۳] از M می نامیم.

تعریف ۵۸.۲.۱ متروید $M = (E, \mathcal{I})$ را **قابل نمایش روی میدان** F[۸۴] گوییم، هرگاه $M = M[A]$ که در آن A یک ماتریس روی میدان F است.

تعریف ۵۹.۲.۱ مترویدهای قابل نمایش روی میدان $GF(2)$ را باینری یا **دودویی**[۸۵] می‌گوییم.

تعریف ۶۰.۲.۱ فرض کنیم M و N دو متروید باشند به‌طوری‌که

$$E(M) \cap E(N) = \Delta .$$

فرض کنیم M و N مترویدهای دودویی و Δ یک مثلث در هر دو متروید M و N باشد. **اتصال موازی تعمیم یافته**[۸۶] M و N را روی Δ با $P_\Delta(M, N)$ نشان خواهیم داد و آن مترویدی روی $E(M) \cup E(N)$ است که فلت‌های آن زیرمجموعه‌های X از $E(M) \cup E(N)$ هستند به‌طوری‌که $X \cap E(M)$ یک فلت در M و $X \cap E(N)$ یک فلت در N باشد.

۳.۱ طرح موضوع

در این پایان‌نامه تکیه زیادی روی منابع [۳] و [۱۰] و [۱۳] خواهیم داشت و بیشتر از مطالب این منابع استفاده خواهیم کرد و برای اثبات قضیه اصلی این پایان‌نامه ابتدا به بیان یک قضیه از منبع

[۸۳] Fan
[۸۴] F-representable
[۸۵] Binary
[۸۶] Generalized parallel connection

[۱۳] می‌پردازیم که این قضیه در اثبات قضیه اصلی نقش عمده‌ای دارد.

قبل از بیان قضیه مطالب زیر را می آوریم:

فرض کنیم N یک مینور متروید ۳−همبند M باشد. علاقمند هستیم اعضایی از M را حذف کنیم تا متروید حاصل ۳−همبند بوده و N یک مینور آن باشد. حال این سوال مطرح می‌شود که اگر این کارعملی نباشد، در مورد $|E(M) - E(N)|$ چه چیزی می توان گفت؟ به ویژه آیا تفاضل بالا کرانی دارد؟ بدیهی است اگر N یک متروید ۳−همبند باشد، آن‌گاه تفاضل بالا برابر صفر است. در این پایان‌نامه نشان می‌دهیم که کران بالای دقیقی برای حالتی که N یک متروید همبند باشد، وجود دارد.

برای متروید N، $\lambda_1(N)$ را تعداد مؤلفه‌های همبند N در نظر می‌گیریم. حال متروید N را می‌توانیم توسط اعمال جمع مستقیم و ۲−مجموع از گردایه‌ای مثل $\Lambda_2(N)$ از مترویدهای ۳−همبند به‌دست آوریم. کانینگهام و ادموندز [۴] ثابت کرده‌اند که $\Lambda_2(N)$ تحت یکریختی منحصربه فرد است. فرض کنیم $\lambda_2(N)$ تعداد مترویدها در گردایه $\Lambda_2(N)$ باشد.

قضیه ۱.۳.۱ فرض کنیم N یک متروید ۳−همبند باشد به‌طوری‌که $|E(N)| \geq 4$. اگر M یک متروید ۳−همبند مینور−مینیمال باشد که N را به عنوان یک مینور سره دارد، آن‌گاه:

$$|E(M)| - |E(N)| \leq 3.$$

برهان : به [[۱۳] قضیه ۱.۲] مراجعه شود. ■

حال به بیان قضیه زیر می‌پردازیم که قضیه اصلی این پایان‌نامه است.

قضیه ۲.۳.۱ (قضیه اصلی) فرض کنیم N یک متروید غیر تهی و M متروید ۳–همبند مینور–مینیمال باشد به‌طوری‌که N را به عنوان مینور دارد، دراین صورت

$$|E(M)| - |E(N)| \leq ۲۲(\lambda_۱(N) - ۱) + ۵(\lambda_۲(N) - ۱).$$

فصل ۲

تجزیه درختی

در این فصل ابتدا به بیان و اثبات چند قضیه از تجزیه درختی می‌پردازیم که در اثبات قضیه اصلی این پایان‌نامه کاربرد زیادی خواهد داشت. در پایان فصل روش به‌دست آوردن درخت $T(M/e)$ را از درخت $T(M)$ بیان می‌کنیم.

۱.۲ قضیه‌ها

قضایای زیر توسط کانینگهام و ادموندز در [۴] ثابت شده است.

قضیه ۱.۱.۲ فرض کنیم M یک متروید همبند باشد. در این صورت برای برخی عدد صحیح مثبت k، مجموعه‌ای از مترویدهای ۳–همبند $M_1, M_2, ..., M_k$ و یک درخت k–رأسی T با یال‌های برچسب گذاری شده با $e_1, e_2, ..., e_{k-1}$ و رأس‌های برچسب گذاری شده با $M_1, M_2, ..., M_k$ وجود دارد، به‌طوری که

(الف) $$E(M_1) \cup E(M_2) \cup E(M_K) = E(M) \cup \{e_1, e_2, ..., e_{k-1}\}$$

(ب) اگر e_i یالی باشد که رأس‌های M_{j_1} و M_{j_2} را به هم وصل می‌کند، آن‌گاه

$$E(M_{j_1}) \cap E(M_{j_2}) = \{e_i\}$$

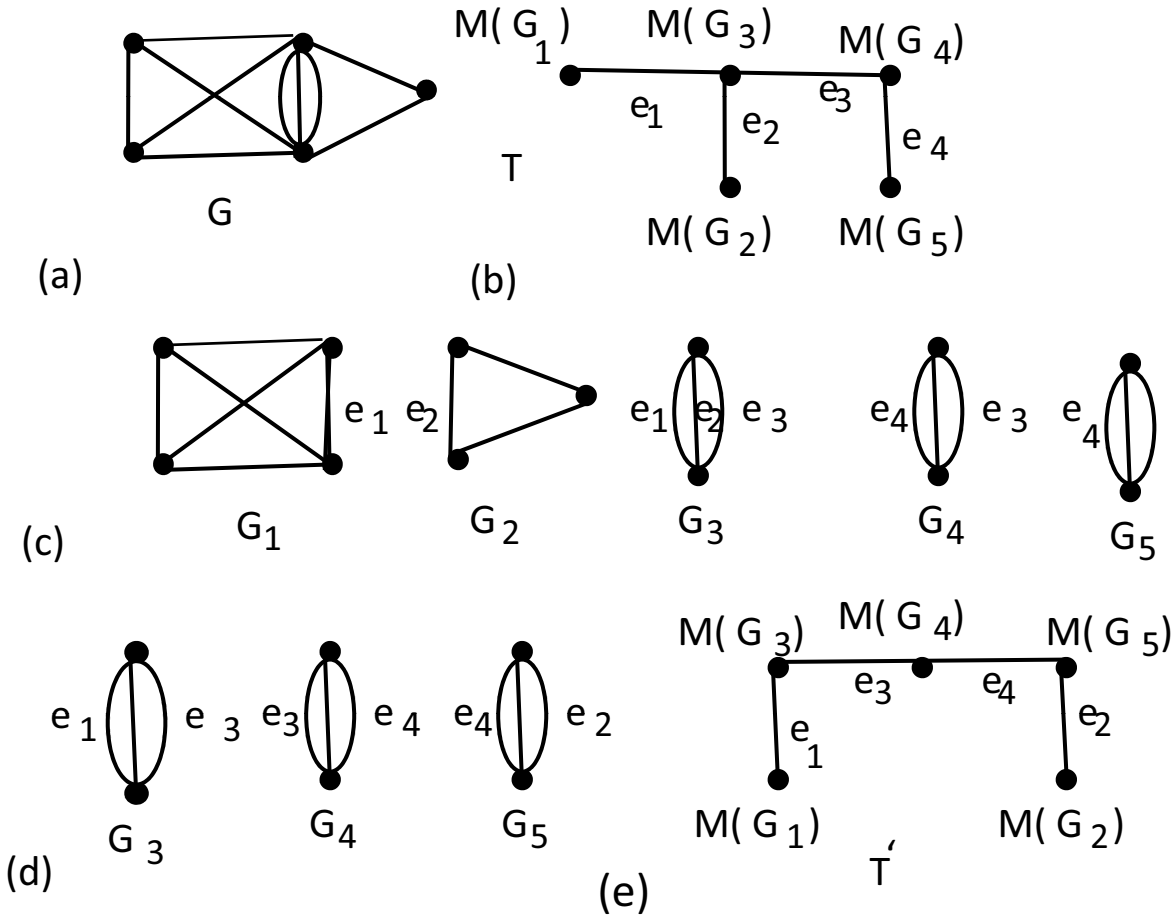
(ج) اگر یالی وجود نداشته باشد که رأس‌های M_{j_1} و M_{j_2} را به هم وصل کند، آن‌گاه

$$E(M_{j_1}) \cap E(M_{j_2}) = \emptyset$$

(د) M مترویدی است که تنها رأس درخت $T/e_1, e_2, ..., e_{k-1}$ را برچسب گذاری می‌کند و به صورت زیر حاصل می‌شود:

یال‌های e_1، e_2، ...، e_{k-1} را به ترتیب و یک به یک در T منقبض می‌کنیم، وقتی که e_i منقبض می‌شود رأس‌های انتهایی آن بر هم منطبق می‌شوند و رأس به دست آمده از این انطباق را با مترویدِ حاصل از ۲–مجموع مترویدهای متناظر با رأس‌های انتهایی e_i برچسب گذاری می‌کنیم.

مثال ۲.۱.۲ فرض کنیم M مترویدِ دوری گراف G باشد که در شکل ۱.۲(a) نمایش داده شده است. در این صورت درخت T در شکل ۱.۲(b) در حکم قضیه قبل صدق می‌کند که در آن G_1، G_2، ...، G_5 در شکل ۱.۲(c) نمایش داده شده‌اند. به هر حال T تنها درختی از این نوع نیست. درخت T' نیز با برچسب گذاری مجدد G_3، G_4 و G_5 به صورتی که در شکل ۱.۲(d) نمایش داده شده است، در حکم قضیه قبل صدق می‌کند.



شکل ۱.۲ یک گراف G و دو تجزیه از $M(G)$

مثال قبل نشان می‌دهد که درخت برچسب گذاری شده در قضیه قبل منحصربه فرد نیست. به هر حال، کانینگهام و ادموندز در [۴] نشان دادند که با تغییر اندکی در قضیه قبل یک تجزیه منحصربه فرد حاصل می‌شود. چون در مثال قبل قادر بودیم یک هم‌دور را به بیشتر از یک راه تجزیه کنیم، غیر یکتایی به وجود آمده است. با استفاده از دوگان، یک دور را هم می‌توان به بیشتر از یک راه تجزیه

کرد. کانینگهام و ادموندز با محدود کردن راه‌هایی که دورها و هم‌دورها می‌توانند در تجزیه دیده شوند، یکتایی تجزیه درختی را تضمین می‌کنند. به ویژه آن‌ها ثابت کرده‌اند که درخت T در قضیه ۱.۱.۲، نسبت به برچسب گذاری مجدد یال‌هایش منحصر به فرد است، مشروط بر این که:

(الف) هر M_i یک مترویید ۳−همبند باشد که حداقل چهار عضو دارد و یا یک دور یا یک هم‌دور باشد.

(ب) T هیچ دو رأس مجاوری نداشته باشد که هر دو توسط دور یا هر دو توسط هم‌دور برچسب گذاری شده باشند.

درختی که در شرایط قضیه ۱.۱.۲ و شرط (الف) مثال ۲.۱.۲ صدق کند، یک تجزیه درختی[۱] از M می‌نامیم.

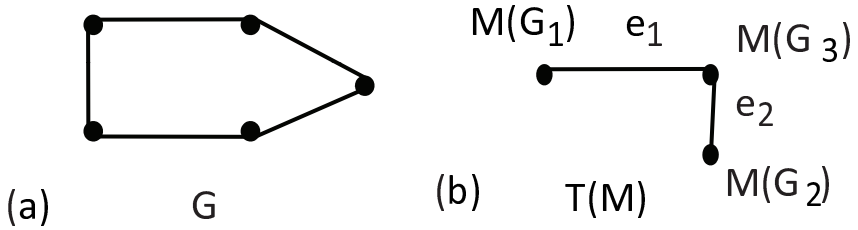
قضیه ۳.۱.۲ هر مترویید همبند M دارای یک تجزیه درختی $T(M)$ است که در آن هیچ دو رأس مجاوری وجود ندارند که هر دو توسط دور یا هر دو توسط هم‌دور برچسب گذاری شده باشند. به علاوه، درخت $T(M)$ نسبت به برچسب گذاری یال‌هایش یکتاست. $T(M)$ را تجزیه درختی کانونی[۲] می‌نامیم.

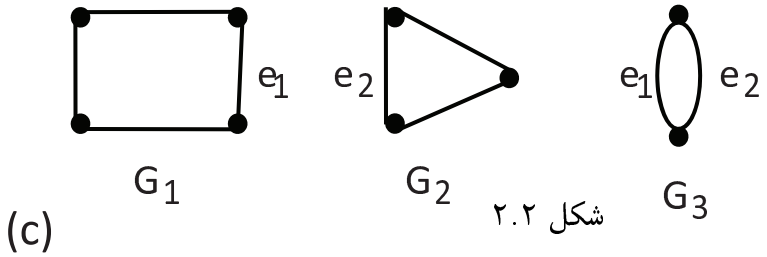
فرض کنیم $\Lambda^u_۴(M)$ مجموعه‌ای از متروییدها باشد که رأس‌های $T(M)$ را برچسب گذاری می‌کند، به‌طوری‌که M را می‌توان توسط اعمال جمع مستقیم و ۲−مجموع از $\Lambda^u_۴(M)$ که مجموعه‌ای از متروییدهای ۳−همبند است، به‌دست آورد. کانینگهام و ادموندز [۴] ثابت کرده‌اند که $\Lambda^u_۴(M)$ تحت یکریختی منحصربه فرد است. اگر یک رأس M' از $T(M)$ متناظر با یک دور یا یک هم‌دور با

[۱] Tree decomposition
[۲] canonical tree decomposition

n عضو برای $n \geq ۴$ باشد، آن‌گاه M' یک تجزیه درختی $T^۳(M')$ دارد که در آن وقتی که M' یک دور است، هر رأس به وسیله یک دور سه عضوی برچسب گذاری می‌شود و وقتی که M' یک هم‌دور است، هر رأس به وسیله یک هم‌دور سه عضوی برچسب گذاری می‌شود. این نتیجه می‌دهد که $T^۳(M')$، $n-۲$ رأس دارد و به علاوه هر درخت با $n-۲$ رأس می‌تواند طوری برچسب گذاری شود که یک تجزیه درختی از M' باشد. حال رأسی از $T(M)$ را که با M' برچسب گذاری شده است، با یکی از انتخاب‌هایش برای $T^۳(M')$ عوض می‌کنیم. در واقع رأس $T(M)$ را که با M' برچسب گذاری شده است، حذف کرده و اجتماع جدا از هم گراف حاصل یعنی $T(M)-M'$ را با $T^۳(M')$ به دست می‌آوریم. برای هر یال x از $T(M)$ که M' را مثلاً به $M'x$ وصل می‌کند، یالی که آن را نیز x می‌نامیم به $(T(M)-M')\cup T^۳(M')$ اضافه می‌کنیم که $M'x$ را به رأسی از $T^۳(M')$ وصل می‌کند که توسط مترویدی که x یک عضو آن می‌باشد، برچسب گذاری شده است. روش بالا را برای هر رأس $T(M)$ که توسط یک دور یا یک هم‌دور با حداقل چهار عضو برچسب گذاری شده است، تکرار می‌کنیم. فرض کنیم گراف حاصل $T^۳(M)$ باشد. $T^۳(M)$ یک تجزیه درختی M است که در آن هر رأس توسط یک مترويد ۳−همبند برچسب گذاری شده است.

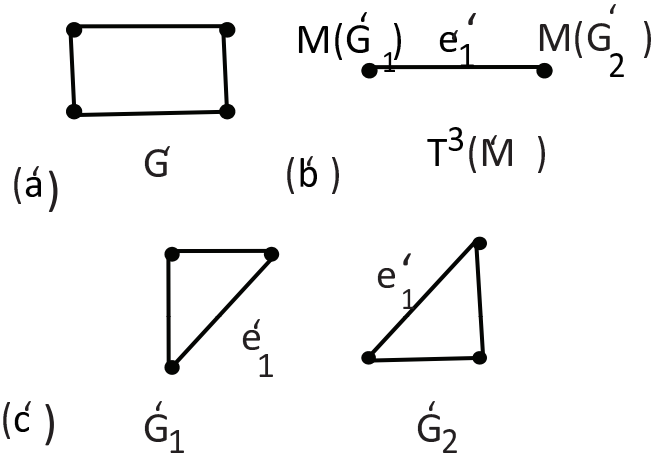
مثال ۴.۱.۲ فرض کنیم M مترويد دوری گراف G باشد که در شکل $۲.۲(a)$ نمایش داده شده است. دراین صورت درخت T در شکل $۲.۲(b)$ در حکم قضیه ۱.۱.۲ صدق می‌کند که در آن $G_۱$، $G_۲$ و $G_۳$ در شکل $۲.۲(c)$ نمایش داده شده‌اند.





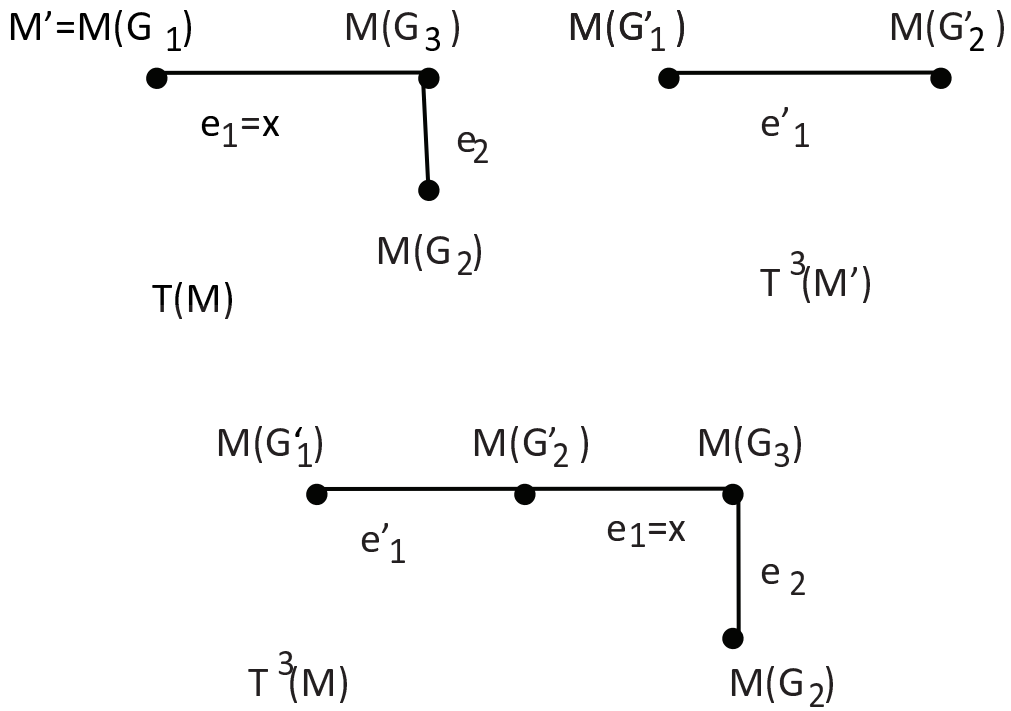
شکل ۲.۲

$M(G_۱)$ از $T(M)$ که متناظر با یک دور با چهار عضو است را M' می‌نامیم و تجزیه درختی $T^۳(M')$ را برای آن می‌سازیم. M' متروید دوری گراف G' است که در شکل $۳.۲(a')$ نمایش داده شده است. دراین صورت درخت $T^۳(M')$ در شکل $۳.۲(b')$ در حکم قضیه ۱.۱.۲ صدق می‌کند که در آن $G'_۱$ و $G'_۲$ در شکل $۳.۲(c')$ نمایش داده شده‌اند.



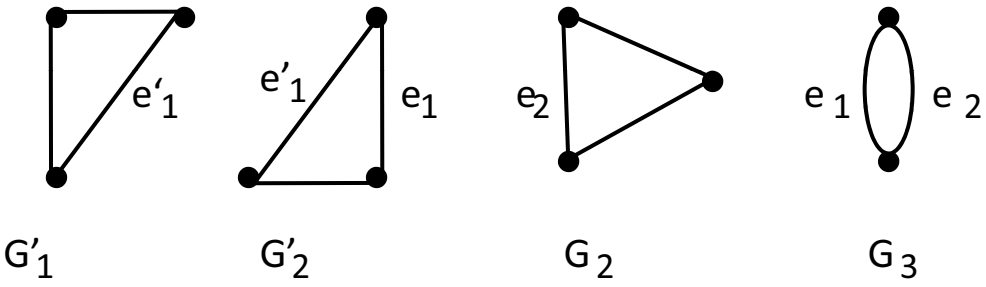
شکل ۳.۲

می‌بینیم که وقتی M' یک دور است، هر رأس به وسیله یک دور ۳–عضوی برچسب گذاری می‌شود و $T^{۳}(M')$، $n-۲$ رأس دارد. حال $T^{۳}(M)$ را می‌سازیم. ابتدا M' را از $T(M)$ حذف می‌کنیم و اجتماع جدا از هم $(T(M)-M')\cup T^{۳}(M')$ را به‌دست می‌آوریم.



شکل ۴.۲

درخت $T^{۳}(M)$ در حکم قضیه ۱.۱.۲ صدق می‌کند که در آن $G_{۳}، G_{۲}، G'_{۲}، G'_{۱}$ در شکل ۵.۲ نمایش داده شده‌اند و می‌بینیم که هر رأس توسط یک مترویدِ ۳–همبند برچسب گذاری شده است.



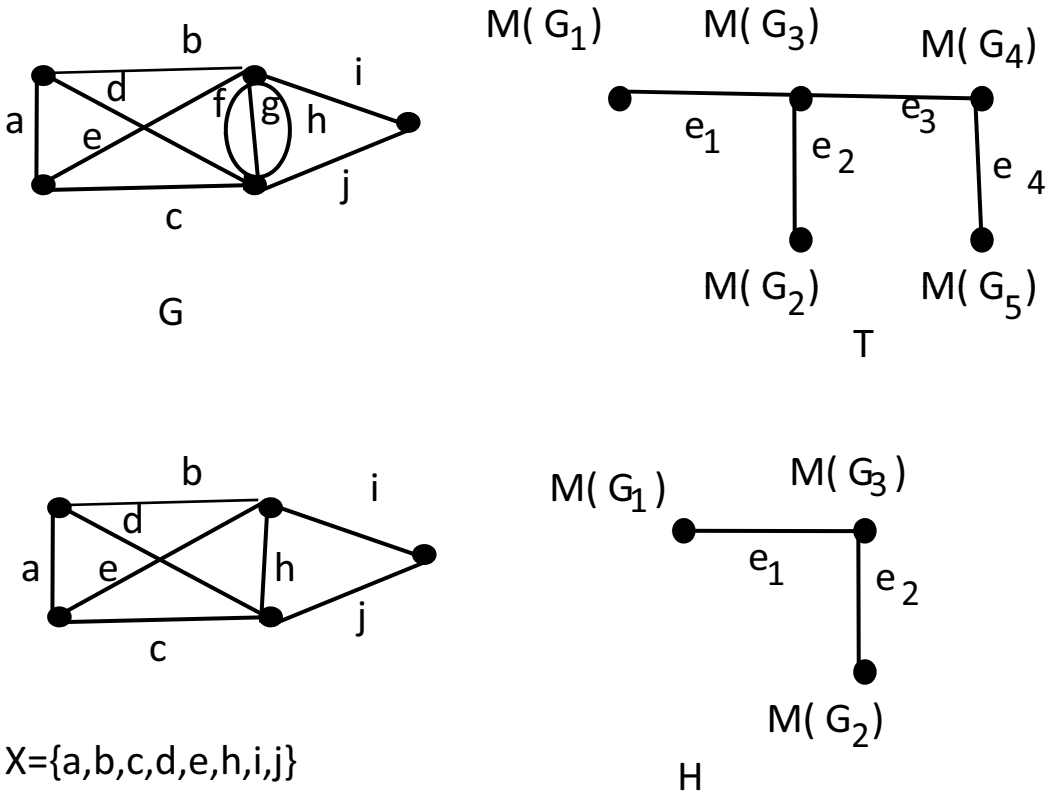
شکل ۵.۲

درخت $T^{۳}(M)$ به صورت منحصر به فرد توسط M مشخص نمی‌شود. فرض کنیم $\Lambda_{۲}(T^{۳}(M))$ مجموعه مترویدهایی باشد که رأس‌های $T^{۳}(M)$ را برچسب گذاری می‌کند. $\Lambda_{۲}(M)$ را به جای $\Lambda_{۲}(T^{۳}(M))$ قرار داده و فرض کنیم $\lambda_{۲}(M)$ تعداد اعضای $\Lambda_{۲}(M)$ باشد. اگر M دارای مؤلفه‌های همبند $M_{۱}$،$M_{۲}$،...،M_t باشد. $\lambda_{۲}(M)$ را مساوی $\sum_{i=۱}^{t} \lambda_{۲}(M_i)$ تعریف می‌کنیم. فرض کنیم $\lambda_{۱}(M) = t$ تعداد مؤلفه‌های همبند M باشد.

فرض کنیم M یک مترویدِ همبند و T یک تجزیه درختی از M باشد. یک زیرگراف همبند H از T زیرمجموعه X از $E(M)$ را القا می‌کند، هرگاه X اجتماع روی همه رأس‌های M_j از H از $E(M_j) \cap E(M)$ باشد. هر یال e از T یک افراز از $E(M)$ در زیرمجموعه‌های $X_{۱}$ و $X_{۲}$ را مشخص می‌کند که به وسیله مؤلفه‌های $T - e$ القا شده‌اند. در این حالت گوییم یال e افراز $\{X_{۱}, X_{۲}\}$ از $E(M)$ را نمایش می‌دهد و همچنین گوییم e مجموعه‌های $X_{۱}$ و $X_{۲}$ را نمایش می‌دهد. حال فرض کنیم M' رأسی از T باشد که یک دور یا یک هم‌دور است. گوییم M' افراز $\{X, Y\}$ از $E(M)$ را

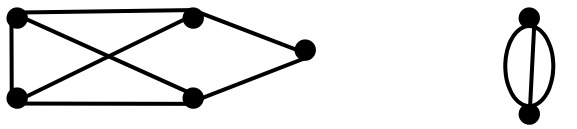
نمایش می‌دهد اگر هر زیرمجموعه از $E(M)$ که به وسیله مؤلفه‌ای از $T - M'$ القا می‌شود تماماً در X یا در Y قرار گیرد.

مثال ۵.۱.۲ فرض کنیم M مترویدِ دوری گراف G در مثال ۲.۱.۲ باشد. دوباره درخت T را در نظر می‌گیریم. زیرگراف همبند H از T را در نظر می‌گیریم. این زیرگراف زیرمجموعه X از $E(M)$ را القا می‌کند.



شکل ۶.۲

حال یال $e_۳$ از درخت T را در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که یک افراز از $E(M)$ در زیرمجموعه‌های $X_۱$ و $X_۲$ مشخص می‌کند که به‌وسیله مؤلفه‌های $T - e_۳$ القا شده‌اند.



شکل ۷.۲

قضیه زیر توسط کانینگهام و ادموندز ثابت شده است.

قضیه ۶.۱.۲ فرض کنیم M یک مترویید همبند و $\{X_۱, X_۲\}$ یک افراز از $E(M)$ باشد به‌طوری‌که $|X_۱|, |X_۲| \geq ۲$. دراین صورت احکام زیر معادلند:

الف) $\{X_۱, X_۲\}$ یک ۲−جداسازی از M است.

ب) M یک تجزیه درختی ۳−همبند دارد که دارای یالی است که $\{X_۱, X_۲\}$ را نمایش می‌دهد.

ج) $T(M)$ یک یال یا یک رأس دارد که $\{X_۱, X_۲\}$ را نمایش می‌دهد به‌طوری‌که در حالت دوم، یعنی اگر یک رأس $\{X_۱, X_۲\}$ را نمایش دهد، این رأس به وسیله یک دور یا یک هم‌دور برچسب گذاری می‌شود.

برهان : ابتدا از قسمت (الف) قسمت (ب) را ثابت می‌کنیم.

فرض کنیم $\{X_۱, X_۲\}$ یک ۲−جداسازی از M باشد. دراین صورت M می‌تواند به صورت ۲−مجموع مترویدهای $M_۱$ و $M_۲$ با نقطه پایه b نوشته شود که مجموعه‌های زمینه آن‌ها به ترتیب، $X_۱ \cup b$ و $X_۲ \cup b$ می‌باشند. حال یک تجزیه درختی ۳−همبند $T^۳(M)$ را برای M با استفاده از استقرأ می‌سازیم.

ابتدا از یک درخت با دو رأس $T_۱$ که رأس‌های آن با $M_۱$ و $M_۲$ وتنها یال آن با e برچسب گذاری شده است، شروع می‌کنیم. فرض کنیم درخت T_k برای $k \geq ۱$ ساخته شده است. اگر هر مترویدی که یک رأس T_k را برچسب گذاری می‌کند، ۳−همبند باشد، آن‌گاه قرار می‌دهیم $T_k = T^۳(M)$. در غیر این صورت مترویدی مثل M' را انتخاب می‌کنیم که رأس T_k را برچسب گذاری می‌کند و ۳−همبند نیست و با توجه به این که اگر M'، ۳−همبند نباشد، آن‌گاه دارای یک k−جداسازی برای برخی $k < ۳$ است، فرض می‌کنیم $\{X'_۱, X'_۲\}$ یک ۲−جداسازی از M' باشد، حال می‌توان M' را به صورت ۲−مجموع از دو مترویدِ $M'_۱$ و $M'_۲$ با مجموعه‌های زمینه $X'_۱ \cup b'$ و $X'_۲ \cup b'$ نوشت. درخت $T_{k+۱}$ به‌وسیله شکافتن رأس M' از T_k به دو رأس $M'_۱$ و $M'_۲$ که به وسیله یال b' به هم وصل می‌شوند، به‌دست می‌آید به‌طوری‌که هر یال e از T_k که بر M' واقع است، بر اعضای $\{M'_۱, M'_۲\}$ که شامل e هستند واقع باشد. بنابراین $T^۳(M)$ یک تجزیه درختی ۳−همبند از M است و یال b همان یالی است که $\{X_۱, X_۲\}$ را نمایش می‌دهد. لذا (الف)، (ب) را نتیجه می‌دهد.

حال از قسمت (ب)، قسمت (ج) را ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم $T^۳(M)$ یک تجزیه درختی ۳−همبند از M و b یالی باشد که $\{X_۱, X_۲\}$ را نمایش می‌دهد. بنابه قضیه ۳.۱.۲، برای این که $T(M)$ را از $T^۳(M)$ به‌دست آوریم، به دنبال دو رأس مجاور از $T^۳(M)$ می‌گردیم که هر دو به وسیله

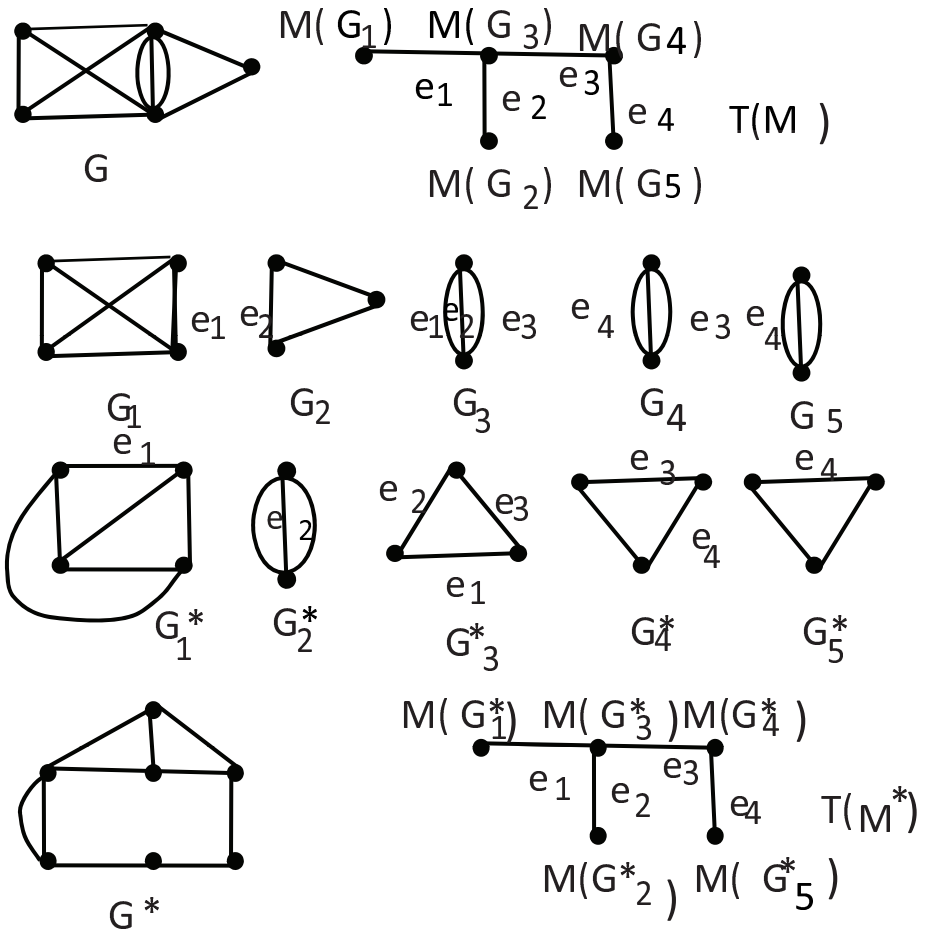
دور یا هر دو به وسیله هم‌دور برچسب گذاری شده باشند. وقتی که دو تا از چنین رأس‌هایی را پیدا کنیم، یالی که آن‌ها را به هم وصل می‌کند منقبض می‌کنیم و رأس حاصل از ترکیب آن دو رأس را به وسیله ۲—مجموع دو رأسی که نقاط انتهایی یال را برچسب گذاری کرده بودند، برچسب گذاری می‌کنیم. این فرایند را تا زمانی ادامه می‌دهیم که هیچ دو رأس مجاوری که هر دو به وسیله دور یا هر دو به وسیله هم‌دور برچسب گذاری شده باشند، نداشته باشیم. حال یکتایی $T(M)$ نتیجه می‌دهد که درخت حاصل همان $T(M)$ است.

حال b یالی از $T(M)$ است که $\{X_1, X_2\}$ را نشان می‌دهد، مگر این که در $T^3(M)$ هر دو نقطهٔ انتهایی b به وسیله دور یا هر دو به وسیله هم‌دور برچسب گذاری شده باشند. حال همین حالت را بررسی می‌کنیم. بدون این که چیزی از کلیت مسئله کاسته شود، فرض می‌کنیم که هر دو نقطه انتهایی b به وسیله دور برچسب گذاری شده باشند. پس b یالی از یک زیردرخت ماکسیمال T^c از $T(M)$ است که همه رئوس آن به وسیله دور برچسب گذاری شده‌اند. برای تشکیل $T(M)$، زیردرخت T^c را به یک رأس تنها منقبض می‌کنیم و فرض می‌کنیم این رأس تنها یکی از نقاط انتهایی b مثلاً v باشد. برای $T = T^3(M)$، هر زیرمجموعه از $E(M)$ که به وسیله یک مؤلفه از $T - v$ القا می‌شود، تماماً در X_1 یا تماماً در X_2 قرار دارد. این وقتی برقرار است که ما یالی واقع بر رأس v را منقبض کنیم. بنابراین نتیجه می‌گیریم رأس v همان رأسی است که $\{X_1, X_2\}$ را در $T(M)$ نمایش می‌دهد و به وسیله دور برچسب گذاری شده است. بنابراین از قسمت (ب)، قسمت (ج) را نتیجه گرفتیم.

اثبات (الف) $\Rightarrow$ (ج) مشابه بالا است. ■

فرض کنیم M یک مترویدِ همبند باشد. می‌توان $T(M^*)$ و $T^{۳}(M^*)$ به ترتیب از $T(M)$ و $T^{۳}(M)$ به وسیله جایگزین کردن هر مترویدی که یک رأس از $T(M)$ و $T^{۳}(M)$ را برچسب گذاری می‌کند، با دوگان آن، به‌دست آورد.

مثال ۷.۱.۲ دوباره مثال ۲.۱.۲ را در نظر می‌گیریم. دوگان مترویدهایی که رأس‌های $T(M)$ را برچسب گذاری می‌کنند به‌دست می‌آوریم و به وسیله آن‌ها $T(M^*)$ را می‌سازیم.



شکل ۸.۲

۲.۲ روش ساختن درختی از $T(M)$ با ادغام یک یال از M

حال فرض کنیم $e \in E(M)$ و M/e همبند و غیر تهی باشد. لازم است تا رابطه بین $T(M)$ و $T(M/e)$ را شرح دهیم که با توجه به دوگان، اگر $M\backslash e$ همبند باشد، این تعیین کنندهٔ رابطه بین $T(M)$ و $T(M\backslash e)$ نیز خواهد بود. فرض کنیم M' مترویدی باشد که رأسی از $T(M)$ را برچسب گذاری می‌کند به‌طوری‌که $e \in E(M')$. برای به‌دست آوردن $T(M/e)$ به روش زیر عمل می‌کنیم:

(الف) $T(M'/e)$ را می‌سازیم.

(ب) اجتماع جدا از هم $T(M'/e)$ و $T(M) - M'$ را به‌دست می‌آوریم.

(ج) اگر b یالی از $T(M)$ باشد که M' را به K وصل می‌کند، با افزودن یالی که آن را b می‌نامیم، راس K از $T(M) - M'$ را به رأسی از $T(M'/e)$ که شامل b است، وصل می‌کنیم.

(د) اگر یال جدید اضافه شده b دو دور یا دو هم‌دور را به هم وصل کند، آن‌گاه یال b را منقبض کرده و رأس حاصل از انطباق دو رأس انتهایی b را با ۲−مجموع با نقطه پایه b مترویدهایی که دو رأس انتهایی b را نشان دار می‌کنند، برچسب گذاری می‌کنیم.

(و) اگر $|E(M'/e)| = ۲$ و $T(M)$ بیشتر از یک رأس داشته باشد، آن‌گاه یال b را که M'/e را به مثلاً H وصل می‌کند، منقبض می‌کنیم و رأس حاصل را با H' برچسب گذاری می‌کنیم. H' مترویدی است که از H با دوباره برچسب گذاری کردن b با عضو یکتای b' از $E(M'/e) - b$ به‌دست می‌آید. بالاخره، اگر K' یک هم‌دور باشد و b'، K' را به یک هم‌دور دیگر مثل K'' وصل کند، آن‌گاه b' را منقبض می‌کنیم و رأس حاصل را با ۲−مجموع دو مترویدی که نقاط انتهایی b' را نشان دار می‌کنند،

برچسب گذاری می‌کنیم.

فصل ۳

نتایج مقدماتی

در این فصل پس از بیان چند تعریف و قضیه‌ها ولم‌های مورد نیاز، تعدادی لم تکنیکی را ثابت می‌کنیم که در اثبات قضیه اصلی به کار خواهند رفت. به ویژه در لم ۳.۳.۳، نشان می دهیم که تخریب یک ۲−جداسازی دقیق N به افزودن حداکثر پنج عضو جدید نیاز دارد. این حقیقت در اثبات قضیه اصلی در حالتی که N همبند است، بسیار مهم خواهد بود.

۱.۳ تعاریف

تعریف ۱.۱.۳ مترویدِ حاصل از حذف طوقه‌ها و عناصر کلاس‌های موازی به غیر از یک عضو از هر کلاس موازی از مترویدِ N را با $Si(N)$ نمایش می‌دهیم و آن را ساده‌سازی مترویدِ N می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۳ هم‌ساده‌سازی مترویدِ N را با $Co(N)$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Co(N) = (Si(N^*))^*.$$

تعریف ۳.۱.۳ هرگاه $X_۱$، $X_۲$، $Y_۱$، $Y_۲$ چهار زیرمجموعه از مجموعه زمینه متروید M باشند افرازهای $(X_۱, X_۲)$ و $(Y_۱, Y_۲)$ را **متقاطع**[۱] می گوییم هرگاه هر چهار مجموعه $X_۱ \cap Y_۱$ و $X_۱ \cap Y_۲$ و $X_۲ \cap Y_۱$ و $X_۲ \cap Y_۲$ غیرخالی باشند.

تعریف ۴.۱.۳ فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌های جدا از هم از مجموعه زمینه متروید M باشند، دراین صورت:

$$k_M(A,B) = min\{r(X) + r(Y) - r(M)\}.$$

که در آن $\{X, Y\}$ افرازی از $E(M)$ است به‌طوری‌که $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$.

۲.۳ قضیه‌ها و لم‌های مورد نیاز

قضیه ۱.۲.۳ متروید M همبند است اگروتنها اگر، برای هر دو عضو x و y از $E(M)$، دوری شامل آن دو وجود داشته باشد.

برهان : به [[۱۰] قضیه ۴.۱.۴] مراجعه شود. ■

نتیجه ۲.۲.۳ متروید M همبند است اگروتنها اگر، برای هر دو عضو x و y از آن، یک دور یا یک هم‌دور شامل هر دو وجود داشته باشد.

برهان : به [[۱۰] نتیجه ۳.۳.۴] مراجعه شود. ■

قضیه ۳.۲.۳ فرض کنیم M یک متروید روی مجموعه E باشد و فرض کنیم $X \subseteq E$. دراین صورت:

[۱] Cross

(الف) X یک مجموعه مستقل است اگروتنها اگر $E-X$ هم–فراگیر باشد.

(ب) X فراگیر است اگروتنها اگر $E-X$ هم–مستقل باشد.

(ج) X یک ابرصفحه است اگروتنها اگر $E-X$ یک هم‌دور باشد.

(د) X یک دور است اگروتنها اگر $E-X$ یک هم–ابرصفحه باشد.

برهان : به [[۱۰] قضیه ٦.۱.۲] مراجعه شود. ■

قضیه ۴.۲.۳ فرض کنیم M یک متروید و X یک زیرمجموعه از $E(M)$ باشد. دراین صورت:

(الف) X یک دور است اگروتنها اگر X یک مجموعه مینیمال با این خاصیت باشد که برای هر x در X، $x \in cl(X-x)$.

(ب) M} یک دور C دارد به‌طوری‌که $cl(X) = X \cup \{x \ : \ x \in C \subseteq X \cup x$.

برهان : به [[۱۰] قضیه ۱۰.۴.۱] مراجعه شود. ■

نکته ۵.۲.۳ فرض کنیم C یک دور از متروید M و e عضوی از $E(M)$ باشد. دراین صورت:

(الف) اگر $e \notin C$، آن‌گاه C اجتماعی از دورهای M/e است.

(ب) اگر $e \in C$، آن‌گاه e یک طوقه از M است یا $C-e$ یک دور از M/e است.

برهان : به [[۱۰] تمرین بخش ۱.۳] مراجعه شود. ■

قضیه ٦.۲.۳ فرض کنیم $\mathcal{C}$ مجموعه دورهای متروید M باشد. دراین صورت $\mathcal{C}$ در شرط زیر صدق می‌کند:

(C_3') اگر C_1 و C_2 اعضایی از $\mathcal{C}$ باشند و $e \in C_1 \cap C_2$ و $f \in C_1 - C_2$، دراین صورت یک عضو

$C_۳$ از $\mathcal{C}$ وجود دارد به‌طوری‌که $f \in C_۳ \subseteq (C_۱ \cup C_۲) - e$.

برهان : به [[۱۰] قضیه ۱۱.۴.۱] مراجعه شود. ■

لم ۷.۲.۳ فرض کنیم M یک مترویید همبند باشد که یک مثلث نیست. فرض کنیم f یک عضو از M است به‌طوری‌که $M\backslash f$ ناهمبند می‌باشد، دراین صورت $\lambda_۲(M/f) = \lambda_۲(M) - ۱$.

برهان : به [[۷] لم ۵.۲] مراجعه شود. ■

لم ۸.۲.۳ فرض کنیم e عضوی از مترویید همبند N باشد و فرض کنیم که برای برخی $s \geq ۲$، $N_۱، N_۲، ...، N_s$ مؤلفه‌های همبند $N\backslash e$ باشند. برای هر i در $\{۱, ۲, ..., s\}$، اگر $|E(N_i)| > ۱$، فرض کنیم N_i' از $N/[E(N) - (E(N_i) \cup e)]$ با دوباره برچسب گذاری کردن عضو e با عضو e_i به‌دست آمده باشد. اگر $|E(N_i)| = ۱$، فرض کنیم $E(N_i) = \{e_i\}$ و فرض کنیم $N_i' = N_i$. فرض کنیم $N_۰$ یک دور $(s+۱)$–عضوی با مجموعه زمینه $\{e, e_۱, ..., e_s\}$ باشد. دراین صورت N می‌تواند از $N_۰$ با دنباله‌ای از ۲–مجموع‌ها از مترویدهای N_i'، به طوری که $|E(N_i)|$ بیشتر از یک عضو دارد، به دست آید. به‌علاوه اگر N ساده باشد، آن‌گاه

$$\lambda_۲(N) \leq s - ۱ - l + \sum_{i=۱}^{s} \lambda_۲(N_i).$$

که در آن l برابر با تعداد هم‌طوقه‌های $N\backslash e$ است.

برهان : به [[۷] لم ۱۰.۲] مراجعه شود. ■

لم ۹.۲.۳ فرض کنیم e عضوی از مترویدِ همبند N باشد به‌طوری‌که $N\backslash e$ همبند است، دراین صورت:

$$\lambda_{۲}(N) \leq \lambda_{۲}(N\backslash e).$$

برهان : به [[۷] لم ۹.۲] مراجعه شود. ■

قضیه ۱۰.۲.۳ فرض کنیم e عضوی از مترویدِ همبند M باشد. دراین صورت $M\backslash e$ یا M/e همبند است.

برهان : به [[۱۰] قضیه ۱.۳.۴] مراجعه شود. ■

قضیه ۱۱.۲.۳ فرض کنیم M یک مترویدِ ۳–همبند روی مجموعه E باشد و فرض کنیم $e \in E$. دراین صورت $Si(M/e)$ یا $Co(M\backslash e)$، ۳–همبند است.

برهان : به [[۱۰] قضیه ۴.۱] مراجعه شود. ■

قضیه ۱۲.۲.۳ فرض کنیم M یک مترویدِ ۳–همبند با حداقل چهار عضو و C یک دور از M باشد. اگر $M\backslash e$ برای هر $e \in C$، ۳–همبند نباشد، آن‌گاه C با حداقل دو سه‌تایی مجزا از M اشتراک دارد.

برهان : به [[۵] قضیه ۱] مراجعه شود. ■

نتیجه ۱۳.۲.۳ فرض کنیم M یک مترویدِ ۳–همبند و e عضوی از M باشد به‌طوری‌که هیچ کدام از $M\backslash e$ و M/e، ۳–همبند نیستند، دراین صورت e در یک مثلث یا در یک سه‌تایی از M قرار

دارد.

برهان : به [[۱۰] نتیجه ۸.۴.۸] مراجعه شود. ■

قضیه ۱۴.۲.۳ فرض کنیم M_1 و M_2 به ترتیب مترویدهایی با توابع رتبه r_1 و r_2 وعملگرهای بستار cl_1 و cl_2 و مجموعهٔ زمینه E باشند. دراین صورت احکام زیر معادلند :

(الف) M_2 خارج قسمت M_1 است.

(ب) هر فلت M_2 یک فلت M_1 است.

(ج) هرگاه $X \subseteq Y \subseteq E$ آن گاه : $r_1(Y) - r_1(X) \geq r_2(Y) - r_2(X)$.

(د) هر دور M_1 به صورت اجتماعی از دورهای M_2 است.

(و) برای هر $X \subseteq E$، $cl_1(X) \subseteq cl_2(X)$.

برهان : به [[۱۰] نتیجه ٦.۳.۷] مراجعه شود. ■

لم ۱۵.۲.۳ فرض کنیم M یک مترویدِ ۳–همبند باشد به‌طوری که برای هر $e \in E$، $M\backslash e$ و M/e، ۳–همبند نباشد، دراین صورت احکام زیر برقرارند:

(الف) اگر $\{A, B\}$ یک ۲–جداسازی از $M\backslash e$ باشد و $|A| = ۲$، آن‌گاه $A \cup e$ یک سه‌تایی از M است.

(ب) اگر $\{A, B\}$ یک ۲–جداسازی از M/e باشد و $|A| = ۲$، آن‌گاه $A \cup e$ یک مثلث از M است.

برهان : به [[۵] لم ۲.۲] مراجعه شود. ■

قضیه ۱۶.۲.۳ فرض کنیم N یک مینور همبند از مترویید همبند M باشد و فرض کنیم $e \in E(M) - E(N)$. دراین صورت حداقل یکی $M\backslash e$ و M/e همبند است و N را به عنوان یک مینور دارد.

برهان : به [[۱۰] قضیه ۶.۳.۴] مراجعه شود. ■

قضیه ۱۷.۲.۳ اگر e یک عضو از مترویید ۳−همبند M باشد، آن گاه یکی از عبارت های زیر صحیح است:

(الف) $Co(M\backslash e)$، ۳−همبند است و هیچ کلاس سری از $M\backslash e$ شامل بیش از دو عضو نیست.

(ب) $Si(M/e)$، ۳−همبند است و هیچ کلاس موازی از M/e شامل بیش از دو عضو نیست.

برهان : به [[۱۱] قضیه ۲.۲.۳] مراجعه شود.

۳.۳ نتایج تکنیکی

دو لم زیر خواص $k_M(A,B)$ را بیان می‌کنند. اثبات این دو لم توسط **بیکسبی** [۲] و **کلارد** [۳] در [۳] ارائه شده است.

لم ۱.۳.۳ فرض کنیم B و A زیرمجموعه‌های جدا از هم از مجموعه زمینه مترویید M باشند. دراین صورت :

(الف) $k_M(A,B) = k_{M^*}(A,B)$.

(ب) اگر N یک مینور M باشد به‌طوری‌که $A \cup B \subseteq E(N)$، آن‌گاه $k_N(A,B) \leq k_M(A,B)$، و

[۲] Bixby
[۳] Coullard

(ج) اگر $e \in E(M) - (A \cup B)$، آن‌گاه

$$max\{\ k_{M\backslash e}(A,B), k_{M/e}(A,B)\ \} = k_M(A,B)$$

و

$$min\{\ k_{M\backslash e}(A,B), k_{M/e}(A,B)\ \} \geq k_M(A,B) - ۱\ .$$

برهان : به [[۳] لم ۱.۳] مراجعه شود. ■

سیمور [۱۲] به طور دقیق ساختار مترویدی مثل M را تجزیه و تحلیل کرد که این متروید، N را به عنوان مینور دارد به‌طوری‌که $\{A,B\}$ یک افراز از $E(N)$ است و M مینور–مینیمال است و در رابطه $k_M(A,B) > k_N(A,B)$ صدق می‌کند. ما این نتیجه را تنها در حالتی که $\{A,B\}$ یک ۲–جداسازی از N است، به کار می‌بریم.

لم ۲.۳.۳ فرض کنیم N یک متروید و $\{A,B\}$ یک ۲–جداسازی دقیق از N باشد. فرض کنیم M یک متروید مینور–مینیمال باشد که N را به عنوان یک مینور دارد و در رابطه $k_M(A,B) > ۱$ صدق می‌کند. دراین صورت احکام زیر برقرارند:

(الف) زیرمجموعه‌های یکتای P و Q از $E(M)$ وجود دارند به‌طوری‌که $N = M\backslash P/Q$.

(ب) فرض کنیم $M_z = M\backslash z$ وقتی که $z \in P$ و $M_z = M/z$ وقتی که $z \in Q$. دراین صورت M_z فقط یک ۲–جداسازی $\{X_z, Y_z\}$ دارد به‌طوری‌که $A \subseteq X_z$ و $B \subseteq Y_z$ و این ۲–جداسازی دقیق است.

(ج) $P \cup Q$ را می‌توان به صورت $z_۱, z_۲, ..., z_n$ برچسب گذاری کرد به‌طوری که برای همه مقادیر i، $X_{z_i} = A \cup \{z_۱, z_۲, ..., z_{i-۱}\}$ و $Y_{z_i} = B \cup \{z_{i+۱}, z_{i+۲}, ..., z_n\}$.

(د) اعضای $z_1, z_2, \ldots, z_n$ به طور متناوب اعضای P و Q هستند.

(و) M هیچ دوری مثل C ندارد که $C \subseteq P \cup Q$ و $|C - Q| \leq 1$ و M هیچ هم‌دوری مثل C^* ندارد به‌طوری‌که $C^* \subseteq P \cup Q$ و $|C^* - P| \leq 1$.

(ه) برای همه مقادیر $i > 1$، اگر $z_i \in P$، آن‌گاه دوری مثل C از M وجود دارد به‌طوری‌که $\{z_{i-1}, z_i\} \subseteq C$ و $C - \{z_{i-1}, z_i\} \subseteq (Q \cap \{z_j \ : \ j > i\}) \cup B$. اگر $z_i \in Q$، آن‌گاه هم‌دوری مثل C^* از M وجود دارد به‌طوری‌که $\{z_{i-1}, z_i\} \subseteq C^*$ و $C^* - \{z_{i-1}, z_i\} \subseteq (P \cap \{z_j \ : \ j > i\}) \cup A$.

به علاوه با تعویض جای A و B، حکم برای همه مقادیر $i < n$ برقرار است.

برهان : به [[۳] لم ۲.۳] مراجعه شود. ■

لم ۳.۳.۳ فرض کنیم $\{A, B\}$ یک ۲–جداسازی دقیق از مترویدِ N باشد. فرض کنیم M یک مترویدِ مینور–مینیمال باشد که N را به عنوان یک مینور دارد و $k_M(A, B) > 1$. دراین صورت

$$|E(M)| - |E(N)| \leq 5. \qquad (1)$$

به علاوه اگر N همبند باشد و برای بعضی از اعضای e در $E(M) \cup E(N)$، $M\backslash e$ یا M/e ناهمبند باشد، آن‌گاه $|E(M) - E(N)| = 1$. به ویژه اگر $M\backslash e$ ناهمبند باشد، آن‌گاه رأسی از $T(M)$ که به وسیله مترویدی شامل e برچسب گذاری می‌شود، یک مثلث است. این رأس دقیقاً دارای دو رأس مجاور در $T(M)$ است که هر دوی آن‌ها توسط هم‌دورها برچسب گذاری می‌شوند و هر چهار مجموعه‌ای که توسط یال‌هایی از $T(M)$ که واقع بر این مثلث هستند، نمایش داده می‌شوند، با هر دو مجموعه A و B اشتراک دارند.

برهان : بنابه لم قبل $E(M)$ زیرمجموعه‌های منحصربه فردی مثل P و Q دارد به‌طوری‌که

$.N = M\backslash P/Q$

حال رابطه (۱) را با استفاده از برهان خلف ثابت می‌کنیم تا به تناقض برسیم. فرض کنیم $n = |P| + |Q| = |E(M)| - |E(N)|$ و فرض کنیم $n \geq ٦$. با در نظر گرفتن دوگان در صورت لزوم، فرض کنیم $z_١ \in P$. بنابراین با توجه به قسمت (د) لم ۲.۳.۳، $z_٦ \in Q$. درنتیجه با توجه به قسمت (الف) لم قبل N یک مینور از $M\backslash z_١/z_٦$ است. حال با توجه به قسمت (ب) لم قبل چون $\{X_{z_٦}, Y_{z_٦}\}$ یک ۲−جداسازی دقیق $M/z_٦$ است، پس این مترویدِ ۲−مجموع مترویدهای $N_٢$ و $M_٢$ می‌باشد که در آن $E(M_٢) = Y_{z_٦} \cup b$. از آنجایی که $z_١ \in P$ و با توجه به قسمت (ب) لم قبل $\{X_{z_١}, Y_{z_١}\}$ یک ۲−جداسازی دقیق $M\backslash z_١$ است، پس $\{X_{z_١}, \{z_٢, z_٣, z_٤, z_٥, b\}\}$ یک ۲−جداسازی دقیق از $N_٢$ است. بنابراین $N_٢$، ۲−مجموع مترویدهای $M_١$ و H است که $E(M_١) = X_{z_١} \cup a$ و $E(H) = \{a, z_٢, z_٣, z_٤, z_٥, b\}$. حال نتیجه می‌گیریم که $M\backslash z_١/z_٦$ با ۲−مجموع گرفتن از $M_١$، H و $M_٢$ به دست آمده است. به علاوه $M\backslash z_١$، ۲−مجموع دو مترویدِ $M_١$ و $N_١$ است که در آن $N_١/z_٦ = H \oplus_٢ M_٢$. حال گوییم H همبند است، زیرا در غیر این صورت اگر a و b در یک مؤلفه از H باشند، آن‌گاه با توجه به قسمت (الف) و (ج) قضیه قبل، P و Q منحصر به فرد نیستند و اگر a و b در مؤلفه‌های متفاوتی از H باشند، آن‌گاه $k_N(A, B) = ٠ \neq ١$. به علاوه چون P و Q منحصر به فردند و $k_N(A, B) = ١$، مترویدِ $H\backslash\{z_٣, z_٥\}/\{z_٢, z_٤\}$ همبند است و به صورت منحصر به فرد به عنوان یک مینور H تعیین می‌شود. بنابراین با توجه به قضیه ۱.۲.۳، $H\backslash\{z_٣, z_٥\}/\{z_٢, z_٤\}$ یک دور شامل $\{a, b\}$ است و با توجه به نتیجه ۲.۲.۳، $H\backslash\{z_٣, z_٥\}/\{z_٢, z_٤\}$ یک هم‌دور شامل $\{a, b\}$ است. این حقیقت که $H\backslash\{z_٣, z_٥\}/\{z_٢, z_٤\}$ به

صورت منحصر به فرد به عنوان یک مینور از H تعیین می‌شود، نتیجه می‌دهد که $\{a, b, z_۲, z_۴\}$ یک دور از H و $\{a, b, z_۳, z_۵\}$ یک هم‌دور از H است. بنابراین با توجه به قسمت (ج) قضیه ۳.۲.۳، $E(H) - \{a, b, z_۳, z_۵\}$ یک ابرصفحه است، لذا $\{z_۲, z_۴\}$ یک ابرصفحه است و از آنجایی‌که یک ابرصفحه از H یک فلت از رتبه $r(H) - ۱$ است، نتیجه می‌گیریم $\{z_۲, z_۴\}$ یک خط از H یعنی یک فلت از رتبه دو است. علاوه بر این $r(H) = r(H^*) = ۳$.

بنابه قسمت (ه) لم ۲.۳.۳، M دوری مثل C دارد که شامل $z_۴$ و $z_۵$ است به‌طوری‌که $C - \{z_۴, z_۵\} \subseteq (Q \cap \{z_j \ : \ j > ۵\}) \cup B$. فرض کنیم C' یک دور از $M/z_۶$ باشد به‌طوری‌که $C' \subseteq C$ و $C' \cap \{z_۴, z_۵\} \neq \emptyset$. اگر $C' \cap B = \emptyset$، آن‌گاه $\{z_۴, z_۵\} \cup (Q \cap \{z_j \ : \ j > ۵\})$ شامل دوری از M است که متناقض با قسمت (و) لم ۲.۳.۳ است. بنابراین $C' \cap B \neq \emptyset$ و لذا $b \cup (C' \cap \{z_۴, z_۵\})$ دوری از H است. چون با توجه به قسمت (الف) نکته ۵.۲.۳، $C - z_۶$ اجتماعی از دورهای $M/z_۶$ است، پس دو حالت زیر را خواهیم داشت:

(الف) هر دوی $\{b, z_۴\}$ و $\{b, z_۵\}$ دورهایی از H هستند، یا

(ب) $\{b, z_۴, z_۵\}$ دوری از H است.

چون b طوقه‌ای از $H/z_۴$ نیست، نتیجه می‌گیریم که $z_۴$ نمی‌تواند با b موازی باشد. بنابراین $\{b, z_۴, z_۵\}$ دوری از H است. چون $\{a, b, z_۲, z_۴\}$ و $\{b, z_۴, z_۵\}$ دورهایی از H هستند، بنابه خاصیت حذف دور و قضیه ۶.۲.۳، نتیجه می‌گیریم که H دوری شامل a و مشمول در $\{a, b, z_۲, z_۵\}$ دارد. چون b در $\{a, b, z_۲, z_۴\}$ و همچنین در $\{b, z_۴, z_۵\}$ قرار دارد، لذا این دور شامل b نیست و بنابراین زیرمجموعه‌ای از $\{a, z_۲, z_۵\}$ می‌باشد. حال $\{a, z_۲\}$ یک دور نیست. علاوه بر این، $\{a, z_۵\}$

یک دور نیست، زیرا در غیر این صورت بنابه خاصیت حذف دور، $\{a, b, z_۴\}$ دوری از H خواهد بود. بنابراین $\{a, z_۲, z_۵\}$ دوری از H است. در نتیجه $H\backslash z_۳$ اتصال موازی دو خط ۳–نقطه‌ای $\{a, z_۲, z_۵\}$ و $\{b, z_۴, z_۵\}$ است. حال در متروید $H/z_۵$، عضو $z_۳$ باید یک طوقه بوده یا موازی با a یا b باشد، در غیر این صورت $H\backslash\{z_۳, z_۵\}/\{z_۲, z_۴\}$ به طور منحصر به فرد به عنوان یک مینور از H به‌دست نمی‌آید. بنابراین $z_۳$ روی خطی از H است که این خط به وسیله $\{a, z_۵\}$ تولید شده یا روی خطی از H است که آن خط به وسیله $\{b, z_۵\}$ تولید شده است. چون هیچ کدام از $\{a, b, z_۲, z_۳\}$ و $\{a, b, z_۳, z_۴\}$ دوری از H نیستند، نتیجه می‌گیریم که $z_۳$ موازی با یکی از a، b و $z_۵$ در متروید H است. در حالت‌های دوم و سوم، $\{X_{z_۳}, Y_{z_۳}\}$ یک ۲–جداسازی دقیق از $M\backslash z_۳$ است و $z_۳$ به وسیله $Y_{z_۳}$ توسیع می‌شود، بنابراین $\{X_{z_۳}, Y_{z_۳} \cup z_۳\}$ یک ۲–جداسازی دقیق از M است، چون $k_M(A, B) > ۱$، M دارای ۲–جداسازی نیست و این یک تناقض است. پس نتیجه می‌گیریم $\{z_۳, a\}$ دوری از H است. حال یادآوری می‌کنیم که $M\backslash z_۱ = M_۱ \oplus_۲ N_۱$، که در آن $N_۱/z_۶ = H \oplus_۲ M_۲$ و $E(M_۱) = X_{z_۱} \cup a$. چون $X_{z_۳}$ و همچنین $X_{z_۱}$، $z_۳$ را در M توسیع نمی‌دهند، نتیجه می‌گیریم که $\{a, z_۳\}$ دوری از $N_۱$ نیست. بنابراین $\{a, z_۳, z_۶\}$ دوری از $N_۱$ است. در نتیجه M دوری مثل D دارد که شامل $\{z_۳, z_۶\}$ است و مشمول در $X_{z_۱} \cup \{z_۳, z_۶\}$ می‌باشد. به علاوه بنابه قسمت (ه) لم ۲.۳.۳، M هم‌دوری مثل D^* دارد که شامل $\{z_۵, z_۶\}$ است و مشمول در $Y_{z_۶} \cup \{z_۵, z_۶\}$ می‌باشد. بنابراین $|D \cap D^*| = ۱$، که یک تناقض است . با توجه به فرض $n \geq ۶$ به این نتیجه رسیدیم که اشتراک این دور و هم‌دور تنها شامل عضو $z_۶$ است، که این متناقض با خاصیت تعامد می‌باشد. بنابراین $n < ۶$، پس نتیجه می‌گیریم که رابطه (۱) برقرار است.

حال فرض می‌کنیم N همبند باشد و برای برخی $e \in P \cup Q$، $M\backslash e$ یا M/e ناهمبند باشد. بدون این که از کلیت مسئله کاسته شود، فرض می‌کنیم $M\backslash e$ ناهمبند است. چون N همبند است، M همبند است و $e \notin P$، بنابراین $e \in Q$. چون $M\backslash e$ ناهمبند است، پس اعضای $\Lambda^u_{\gamma}(M)$ که شامل e هستند دوری مثل C را تشکیل می‌دهند. اگر $E(M) = C$، آن‌گاه $k_M(A,B) = ۱$، که یک تناقض است. بنابراین $E(M)$ به صورت سره شامل C است.

حال M/e، N را به عنوان یک مینور دارد. بنابراین با توجه به انتخاب M، ۲−جداسازی $\{X,Y\}$ از M/e وجود دارد به‌طوری‌که $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$. به‌علاوه بنابه لم ۶.۱.۲ $\{X,Y\}$ به وسیله یک یال یا یک رأس از $T(M/e)$ نمایش داده می‌شوند. با توجه به فصل قبل می‌دانیم که برای تولید $T(M)$ از $T(M/e)$، سه حالت ممکن وجود دارد:

(الف) تنها رأسی از $T(M/e)$ که به وسیله دور D از $T(M/e)$ برچسب گذاری شده بود، برچسب آن به $D \cup e$ تغییر می‌یابد، که در آن $D \cup e$ دوری است که رأسی از $T(M)$ را برچسب گذاری می‌کند.

(ب) یالی از $T(M/e)$ با درج رأس جدیدی که توسط یک مثلث شامل e برچسب گذاری شده است، زیرتقسیم می‌شود.

(ج) تنها رأس w از $T(M/e)$ که به وسیله هم‌دور C^* برچسب گذاری شده بود، با سه رأس $w_۰$، $w_۱$ و $w_۲$ جایگزین می‌شود که در آن $w_۱$ و $w_۲$ تنها مجاورهای $w_۰$ هستند، هر مجاور از w در $T(M/e)$ مجاور با دقیقاً یکی از $w_۱$ و $w_۲$ است و رأس‌های $w_۱$، $w_۰$ و $w_۲$ به ترتیب توسط هم‌دور $C^*_۱$، مثلث C با مجموعه زمینه $\{x_۱, e, x_۲\}$ و هم‌دور $C^*_۲$ برچسب گذاری شده‌اند، یال‌های $w_۱w_۰$ و

$w_۰w_۲$ به ترتیب توسط $x_۱$ و $x_۲$ نشان دار شده‌اند و $E(C^*) = (E(C_۱^*) \cup E(C_۲^*)) - \{x_۱, x_۲\}$.

چون $k_M(A,B) > ۱$، پس ۲–جداسازی $\{X', Y'\}$ از M وجود ندارد به‌طوری‌که $X \subseteq X', Y \subseteq Y'$. نتیجه می‌گیریم که $\{X, Y\}$ به وسیله رأس w از $T(M/e)$ نمایش داده می‌شود که در آن $T(M)$ از $T(M/e)$ با استفاده از روش (ج) به دست می‌آید. بنابراین حکم مطرح شده در آخرین جمله از لم برقرار است. در $T(M)$ برای هر i در $\{۱, ۲\}$، فرض کنیم $\{x_i, b_{i۱}, b_{i۲}, ..., b_{im_i}\}$ یال‌هایی باشند که بر w_i واقع هستند. حال یکی پس از دیگری یال‌هایی از $T(M)$ را که بر $w_۱$ یا $w_۲$ واقع نیستند، منقبض می‌کنیم و بعد از هر انقباض، رأس حاصل را با ۲–مجموع دو مترویدی که دو رأس انتهایی آن یال را برچسب گذاری کرده بودند، نشان‌دار می‌کنیم. دراین صورت M، ۲–مجموع مترویدهای

$$\{C_۱^*, C_۲^*, C, M_{۱۱}, M_{۱۲}, ..., M_{۱m_۱}, M_{۲۱}, M_{۲۲}, ..., M_{۲m_۲}\}$$

است که در آن $E(M_{ij}) - E(M) = \{b_ij\}$.

۲–جداسازی $\{X, Y\}$ دارای این خاصیت است که هر کدام از $E(M_{ij}) - b_{ij}$ مشمول در X یا Y است، لذا طبق قضیه ۶.۱.۲، b_{ij} یالی است که $\{X, Y\}$ را نمایش می‌دهد. بنابراین هر $E(M_{ij}) - b_{ij}$ دقیقاً یکی از A و B را قطع می‌کند. b_{ij} را با A یا B بسته به این که آن عضو متعلق به کدام یک از A یا B باشد، برچسب گذاری می‌کنیم. چون $k_M(A,B) > ۱$، نتیجه می‌گیریم که برای هر i در $\{۱, ۲\}$، مجموعه C_i^* باید حداقل یک عضو داشته باشد که با A برچسب گذاری شده و حداقل یک عضو داشته باشد که با B برچسب گذاری شده است. بنابراین هر چهار مجموعه که

توسط یک یال از $T(M)$ نمایش داده می‌شوند و بر w_0 واقع هستند، هر دوی A و B را قطع می‌کنند.

حال فرض کنیم که $|E(M) - E(N)| > 1$ و f عضوی از $E(M) - (E(N) \cup e)$ باشد. چون N همبند است، پس اگر $f \in P$، آن‌گاه $M\backslash f$ همبند است و اگر $f \in Q$، آن‌گاه M/f همبند است. اول فرض کنیم $f \in C_1^* - \bigcup_{j=1}^{m_1} b_{ij}$. دراین صورت M/f ناهمبند است، بنابراین $f \notin Q$. پس $f \in P$ و $M\backslash f$ همبند است. به‌علاوه $C_1^* - f$ باید شامل x_1 و عضوی از A و عضوی از B باشد. درنتیجه $\{X - f, Y - f\}$ یک ۱−جداسازی از $M/e/f$ است و لذا $k_{M/e/f}(A, B) = 0$. بنابراین بنابه قسمت (ج) لم ۱.۳.۳، داریم $k_{M/f}(A, B) \leq 1 \leq k_M(A, B)$ و بنابراین $k_{M\backslash f}(A, B) = k_M(A, B)$ و این با چگونگی انتخاب M متناقض است. پس نتیجه می‌گیریم که $f \notin C_1^* - \bigcup_{j=1}^{m_1} b_{ij}$ و لذا با استفاده از خاصیت تقارن، $f \notin C_1^* \cup C_2^*$. حال فرض کنیم که اگر $f \in P$، آن‌گاه M' برابر $M\backslash f$ است و اگر $f \in Q$، آن‌گاه M' برابر M/f است. دراین صورت چگونگی ساختن $T(M')$ از $T(M)$ در فصل قبل توضیح داده شده است. با توجه به آن توصیف، $T(M')$ هیچ یال و رأسی ندارد که ۲−جداسازی $\{X', Y'\}$ را نمایش دهد به‌طوری‌که $A \subseteq X'$ و $B \subseteq Y'$. بنابراین $k_{M'}(A, B) > 1$ و بنابراین M' با چگونگی انتخاب M متناقض است. پس نتیجه می‌گیریم که $|E(M) - E(N)| = 1$. ■

لم ۴.۳.۳ فرض کنیم $\{A, B\}$ یک ۲−جداسازی از مترویدِ همبند N باشد. فرض کنیم M یک مترویدِ مینور−مینیمال باشد که N را به عنوان یک مینور دارد و در $k_M(A, B) > 1$ صدق می‌کند. دراین صورت:

(الف) $\lambda_2(M) < \lambda_2(N)$، یا

(ب) مترویدی مثل H وجود دارد که رأسی از $T(M)$ را برچسب گذاری می‌کند که این رأس دقیقاً دو مجاور دارد به‌طوری‌که H یک مثلث است و دو مجاور آن هم‌دور هستند و یا H یک سه‌تایی است و دو مجاور آن دور هستند. برای هر ۲–جداسازی که به وسیله یالی از $T(M)$ نمایش داده شود و H را قطع کند، هر دو قسمت آن با هر دوی A و B اشتراک دارند و مجموعه‌های $E(H) - E(N)$ و $E(M) - E(N)$ برابرند و شامل یک عضو واحدند.

برهان : چون $k_M(A,B) > ۱$، بنابراین M همبند است. به علاوه چون $k_N(A,B) = ۱$، نتیجه می‌گیریم که $M \neq N$ و M نه یک دور و نه یک هم‌دور است. بنابه لم ۲.۳.۳، مجموعه‌های منحصربه‌فرد X و Y وجود دارند به‌طوری‌که $N = M\backslash X/Y$. برای هر H در $\Lambda_۲(M)$، تعریف می‌کنیم:

$$H^- = H\backslash(X \cap E(H))/(Y \cap E(H)).$$

■

برای کامل شدن اثبات لم، دو لم زیر را ثابت می‌کنیم:

لم ۵.۳.۳ مترويد H در $\Lambda_۲(M)$ وجود دارد به‌طوری‌که $|E(H^-)| \leq ۲$.

برهان : فرض کنیم برای هر H در $\Lambda_۲(M)$ داشته باشیم $|E(H^-)| \geq ۳$. دراین صورت با استفاده از تجزیه درختی ۳–همبند $T^۳(M)$ از M، یک تجزیه درختی ۳–همبند $T^۳(N)$ برای N می‌سازیم. برای هر مترویدی مثل H که یک رأس از $T^۳(M)$ را برچسب گذاری می‌کند، مترويد H^- حداقل سه عضو دارد. بنابراین هر رأس از $T^۳(H^-)$ به وسیله یک مترويد با حداقل سه عضو برچسب گذاری می‌شود. ما $T^۳(N)$ را از $T^۳(M)$ با جابه‌جا کردن هر رأس H از $T^۳(M)$ با درخت $T^۳(H^-)$ به‌دست می‌آوریم که در آن یالی مثل b از $T^۳(M)$ که بر H واقع است، متناظر با یالی از $T^۳(N)$

است که بر رأسی از $T^{۳}(H^{-})$ واقع است که این رأس به وسیله مترویدی که b یک عضو آن است، برچسب گذاری شده است. دراین صورت بنابه قضیه ۸.۲.۳ و قضیه ۹.۲.۳، نتیجه می‌گیریم که

$$\lambda_{۲}(N) = \sum_{H \in \Lambda_{۲}(M)} \lambda_{۲}(H^{-}) \geq \sum_{H \in \Lambda_{۲}(M)} \lambda_{۲}(H) = \sum_{H \in \Lambda_{۲}(M)} ۱ = \lambda_{۲}(M) \qquad (۲)$$

می‌توانیم فرض کنیم در رابطه (۲) تساوی برقرار است، در غیر این صورت نتیجه برقرار خواهد بود. بنابراین

(۳) برای هر H در $\Lambda_{۲}(M)$ داریم؛ $\lambda_{۲}(H^{-}) = ۱$

حال با استفاده از قسمت (ج) قضیه ٦.۱.۲، می‌توانیم یک تجزیه درختی ۳−همبند $T^{۳}(N)$ برای N بسازیم به‌طوری‌که این درخت یالی داشته باشد که ۲−جداسازی $\{X_{۱}, X_{۲}\}$ را نمایش دهد. بنابه (۳)، $T^{۳}(M)$ می‌تواند از $T^{۳}(N)$ تنها با برچسب گذاری مجدد هر رأس H^{-} از $T^{۳}(N)$ با نظیر آن یعنی مترویدِ H به دست آید. بنابراین $T^{۳}(M)$ یالی دارد که ۲−جداسازی $\{X'_{۱}, X'_{۲}\}$ نمایش می‌دهد به‌طوری‌که $X_{۱} \subseteq X'_{۱}$ و $X_{۲} \subseteq X'_{۲}$. بنابراین $k_{M}(X_{۱}, X_{۲}) = ۱$، که یک تناقض است. پس ۵.۳.۳ برقرار است.

لم ٦.۳.۳ اگر برای برخی H در $\Lambda_{۲}(M)$ داشته باشیم $|E(H^{-})| \leq ۲$، آن‌گاه $|E(H^{-})| = ۲$، مترویدِ H یک مثلث یا یک سه‌تایی است و $|E(M) - E(N)| = ۱$.

برهان : اگر $E(H^{-}) = \emptyset$، آن‌گاه H یک مؤلفه M است. این با یکتایی X و Y در تناقض است چون وقتی که $f \in E(H)$، N یک مینور از هر دو مترویدِ $M\backslash f$ و M/f است. بنابراین $E(H^{-}) \neq \emptyset$.

حال فرض کنیم که $|E(H^-)| = ۱$. دراین صورت H^- یک طوقه و یا یک هم‌طوقه است. وقتی که H^- به طور منحصربه‌فرد به عنوان یک مینور از H تعیین می‌شود، نتیجه می‌گیریم که H یک دور یا یک هم‌دور است. بنابراین وقتی که $|E(H)| \geq ۳$، اگر $f \in E(H) \cap (X \cup Y)$، آن‌گاه $H\backslash f$ یا H/f ناهمبند است. بنابراین $M\backslash f$ یا M/f ناهمبند است . درنتیجه بنابه لم ۳.۳.۳، $|E(M) - E(N)| = ۱$. ولی $|E(M) - E(N)| \geq |E(H) - E(H^-)| \geq ۲$، که یک تناقض است. بنابراین فرض می‌کنیم $|E(H^-)| = ۲$. گوییم H^- همبند است، زیرا N همبند است. بنابراین H^- با $U_{۱,۲}$ یکریخت است. حال عضو g را از $E(H) \cap (X \cup Y)$ در نظر می‌گیریم. با توجه به دوگان در صورت لزوم، می‌توانیم فرض کنیم $g \in Y$. دراین صورت $H\backslash g$ ناهمبند است، زیرا H^- به طور منحصر به فرد به عنوان یک مینور از H تعیین می‌شود و بنابراین $H\backslash g$ دوری که شامل $E(H^-)$ باشد، ندارد. بنابراین از این که H، ۳—همبند است و حداقل شامل سه عضو است اما $H\backslash g$ ناهمبند است، این نتیجه حاصل می‌شود که $H \cong U_{۲,۳}$. چون $H\backslash g$ ناهمبند است، پس $M\backslash g$ ناهمبند خواهد بود. بنابراین بنابه لم ۳.۳.۳، نتیجه می‌گیریم $|E(M) - E(N)| = ۱$. ■

حال بنا به لم ۵.۳.۳، عضوی مثل H از $\Lambda_۲(M)$ وجود دارد به‌طوری‌که $|E(H^-)| \leq ۲$. بنا به لم ٦.۳.۳، $|E(H^-)| = ۲$ و $|E(M) - E(N)| = ۱$. بنابراین H منحصربه‌فرد است. فرض کنیم $E(M) - E(N) = \{g\}$. دراین صورت $g \in E(H) - E(H^-)$. با در نظر گرفتن دوگان در صورت لزوم، نتیجه می‌گیریم H یک مثلث است و $N = M/g$. به علاوه از آخرین قسمت لم ۳.۳.۳، نتیجه می‌شود که H رأسی از $T(M)$ را برچسب گذاری می‌کند که این رأس دقیقاً دو مجاور دارد که هر دوی آن‌ها به وسیله هم‌دورها برچسب گذاری شده‌اند. به علاوه هر دو یال در $T(M)$ که بر H واقع

هستند، دو مجموعه را نمایش می‌دهند و با استفاده از آخرین قسمت لم ۳.۳.۳، هر چهار مجموعه با هر دوی A و B اشتراک دارند. بنابراین اثبات لم ۴.۳.۳ کامل می‌شود.

لم ۷.۳.۳ فرض کنیم N یک مترویدِ ساده همبند باشد که حداقل چهار عضو دارد. فرض کنیم M یک مترویدِ ۳–همبند مینور–مینیمال باشد که N را به عنوان یک مینور دارد. اگر $e \in E(M) - E(N)$ و N یک مینور از هر دوی $M\backslash e$ و M/e باشد، آن‌گاه e متعلق به یک سه‌تایی T_e^* از M است به‌طوری‌که $T_e^* - e \subseteq E(N)$. به علاوه اگر $N = M\backslash X/Y$ و $X' \subseteq X$، آن‌گاه هر مؤلفه H از $M/Y\backslash X'$ که با $E(N)$ اشتراک ندارد، یک هم‌طوقه است.

برهان : چون N یک مینور ساده از M/e است، می‌توانیم اعضایی از $Si(M/e)$ را انتخاب کنیم به‌طوری که N را به عنوان یک مینور داشته باشند. با توجه به انتخاب N نتیجه می‌گیریم که $Si(M/e)$، ۳–همبند نیست. بنابراین بنابه قضیه ۱۱.۲.۳، $Co(M\backslash e)$، ۳–همبند است و بنابه لم ۱۷.۲.۳، هر کلاس سری از $M\backslash e$ حداکثر دو عضو دارد. چگونگی انتخاب M نتیجه می‌دهد که اعضای $Co(M\backslash e)$ نمی‌توانند انتخاب شوند به‌طوری که N یک مینور از آن باشد.

فرض کنیم هیچ کلاس سری غیر بدیهی از $M\backslash e$ در $E(N)$ مشمول نباشد. دراین صورت برای به دست آوردن N از M، باید عضوی از هر کلاس سری را حذف یا منقبض کنیم. اگر $\{a, b\}$ یک چنین کلاس سری باشد که در آن $a \notin E(N)$، آن‌گاه N یک مینور از $M\backslash e\backslash a$، یا یک مینور از $M\backslash e/a$ است. در حالت اول، چون b یک هم‌طوقه از $M\backslash e\backslash a$ است اما یک هم‌طوقه از N نیست، نتیجه می‌گیریم $b \notin E(N)$، بنابراین N یک مینور از $M\backslash e\backslash a\backslash b$ است به‌طوری‌که برابر با $M\backslash e\backslash b/a$ است. بنابراین در هر دو حالت، N یک مینور از $M\backslash e/a$ است. بنابراین مترویدِ ۳–همبند

$Co(M\backslash e)$، N را به عنوان یک مینور دارد، که یک تناقض است. پس نتیجه می‌گیریم که $M\backslash e$ یک کلاس سری غیربدیهی مشمول در $E(N)$ دارد، بنابراین، M دارای یک سه‌تایی T_e^* است که شامل e است به‌طوری‌که $T_e^* - e \subseteq E(N)$.

حال برای اثبات قسمت دوم لم، فرض کنیم H یک هم‌طوقه نباشد. اگر $f \in E(H)$، آن‌گاه وقتی که $E(H)$ با $E(N)$ اشتراک ندارد، هر دوی $M\backslash f$ و M/f، N را به عنوان مینور دارند. در نتیجه T_f^* وجود دارد و یک سه‌تایی از M/Y است. بنابراین T_f^* یک اجتماع از هم‌دورها از $M/Y\backslash X'$است. اما $T_f^* \cap E(H) = \{f\}$، بنابراین H یک هم‌طوقه است؛ که یک تناقض است و لذا حکم ثابت می‌شود. ■

لم ۸.۳.۳ فرض کنیم N یک دور ۴–عضوی باشد و M یک مترویدِ ۳–همبند مینور–مینیمال باشد که N را به عنوان یک مینور دارد. اگر یک دور غیر فراگیر C از M وجود داشته باشد به‌طوری‌که $E(N) \subseteq C$، آن‌گاه $|E(M)| = ۸$.

برهان : فرض می‌کنیم لم درست نباشد و (M, N) مثال نقضی باشد که برای آن $|E(M)|$ مینیمال است. فرض کنیم:

$$U = \{e \in E(M) - E(N) \ : \ M\backslash e \text{ و } M/e \text{ هر دوی برای مینور } N \text{ است}\}$$

بدیهی است که $E(M) - cl(C) \subseteq U$. فرض کنیم $\mathcal{T}$ مجموعه‌ای از مثلث‌ها از M باشد به‌طوری‌که $T - cl(C)$ غیرتهی است. چون $cl(C) \neq E(M)$، یک هم‌دور D^* از M وجود دارد که اشتراکی با $cl(C)$ ندارد. به‌علاوه برای هر e در D^*، مترویدِ M/e، N را به عنوان یک مینور دارد. بنابراین M/e، ۳–همبند نیست. در نتیجه بنا به قضیه ۱۲.۲.۳، M حداقل دو مثلث دارد که با D^* اشتراک دارند.

بنابراین $|\mathcal{T}| \geq ۲$.

فرض کنیم $T \in \mathcal{T}$. چون $T - cl(C) \subseteq U$، بنابه لم ۷.۳.۳، نتیجه می‌گیریم که هر عضو e از $T - cl(C)$ در یک سه‌تایی T_e^* قرار دارد به‌طوری‌که $T_e^* - e \subseteq E(N)$. در نتیجه، چون $|T - cl(C)| \geq ۲$، متروید M دو سه‌تایی متفاوت $T_{۱T}^*$ و $T_{۲T}^*$ دارد به‌طوری‌که $T_{۱T}^* \cap (T - cl(C))$ و $T_{۲T}^* \cap (T - cl(C))$ مجموعه‌های متمایز تک عضوی هستند و برای هر i، $|T_{iT}^* \cap E(N)| = ۲$. در نتیجه $T_{۱T}^*$،T،$T_{۲T}^*$ یک فن است به‌طوری‌که اعضای محیطی آن یعنی R_T مشمول در $E(N)$ است.

به ویژه، $|T \cap E(N)| = ۱$.

حال T' را که عضوی از $\mathcal{T} - \{T\}$ است، انتخاب می‌کنیم. چون N شامل یک مثلث نیست، $R_T \neq R_{T'}$. بنابراین $|R_T \cup R_{T'}| \geq ۴$. چون $R_T \cup R_{T'} \subseteq E(N)$ و $|E(N)| = ۴$، نتیجه می‌گیریم $R_T \cup R_{T'} = E(N)$. به علاوه هر عضو از $E(N)$ در یکی از $T_{۱T}^*$، $T_{۲T}^*$، $T_{۱T'}^*$ یا $T_{۲T'}^*$ قرار می‌گیرد. بنابراین $E(N)$ مشمول در یک کلاس سری S از $M|cl(C)$ است.

حال نشان می‌دهیم که $cl(C) = C$. فرض کنیم $e \in cl(C) - C$. دراین صورت M دارای یک دور C' است به‌طوری‌که $e \in C' \subseteq C \cup e$. به علاوه بنا به قانون حذف دور و تعامد، می‌توانیم C' را طوری انتخاب کنیم که $C' \cap S = \emptyset$. لذا $C' \subseteq E(M) - E(N)$، بنابراین e یک طوقه از $M/(C - E(N))$. که این با قسمت آخر لم ۷.۳.۳، متناقض است. بنابراین e وجود ندارد و نتیجه می‌گیریم $cl(C) = C$.

دو حالت زیر را بررسی می‌کنیم:

(الف) $T \cap T' \neq \emptyset$، یا

(ب) $T \cap T' = \emptyset$.

(الف) را بررسی می‌کنیم. بدون این که از کلیت مسئله کاسته شود، می‌توانیم فرض کنیم $T' \cap T^*_{۲T} \neq \emptyset$ و $T^*_{۲T} = T^*_{۱T'}$. چون N شامل یک مثلث نیست، نتیجه می‌گیریم که $T^*_{۱T}$،T،$T^*_{۲T}$،T'،$T^*_{۲T'}$ یک فن از M است. اعضای محیطی این فن $R_T \cup R_{T'}$ است که با $E(N)$ برابر است.

حال فرض کنیم $f \in U - (T \cup T')$. دراین صورت بنا به لم ۷.۳.۳، f متعلق به یک سه‌تایی T^*_f از M است به‌طوری‌که $T^*_f - f \subseteq E(N)$. اما بنابه تعامد نتیجه می‌گیریم $T^*_f - f$ اشتراکی با $(T \cup T') \cap E(N)$ ندارد. بنابراین $T^*_f \cap E(N) = E(N) - (T \cup T')$. فرض کنیم $|U - (T \cup T')| \geq ۲$ و f و g اعضای متمایزی از $U - (T \cup T')$ باشند. دراین صورت $T^*_f \cap E(N) = T^*_g \cap E(N)$. بنابراین $\{f, g\} \cup (E(N) - (T \cup T'))$ یک خط چهار نقطه‌ای در M^* است. در نتیجه $M^* \backslash f$، ۳–همبند است و لذا M/f، ۳–همبند می‌باشد. چون $f \in U$، مترویدِ M/f، N را به عنوان یک مینور دارد و با چگونگی انتخاب M در تناقض است. در نتیجه $|U - (T \cup T')| \leq ۱$.

حال $M|(C \cup T \cup T')$ را بررسی می‌کنیم که $C - (T \cup T')$ را به عنوان یک کلاس سری غیر بدیهی دارد. بنابراین $C \cup T \cup T' \neq E(M)$. چون $C \cup U = E(M)$، نتیجه می‌گیریم که $|U - (T \cup T')| \geq ۱$. در نتیجه $|U - (T \cup T')| = ۱$. عضو e را از $U - (T \cup T')$ در نظر می‌گیریم. در این صورت $M|(C \cup T \cup T') = M \backslash e$ و $C - (T \cup T')$ یک کلاس سری از این مترویدِ است. بنابراین $e \cup (C - (T \cup T'))$ یک خط از M^* است. حال $M^* \backslash e$، ۳–همبند نیست، در غیر این صورت M/e با چگونگی انتخاب M متناقض خواهد بود. بنابراین $|C - (T \cup T')| = ۲$ و نتیجه

می‌گیریم $|E(M)| = ۸$. به این ترتیب در حالت (الف) اثبات قضیه کامل می‌شود.

حال فرض کنیم (ب) برقرار باشد. بنابه تعامد، باید داشته باشیم که $R_T - T = R'_T - T'$.

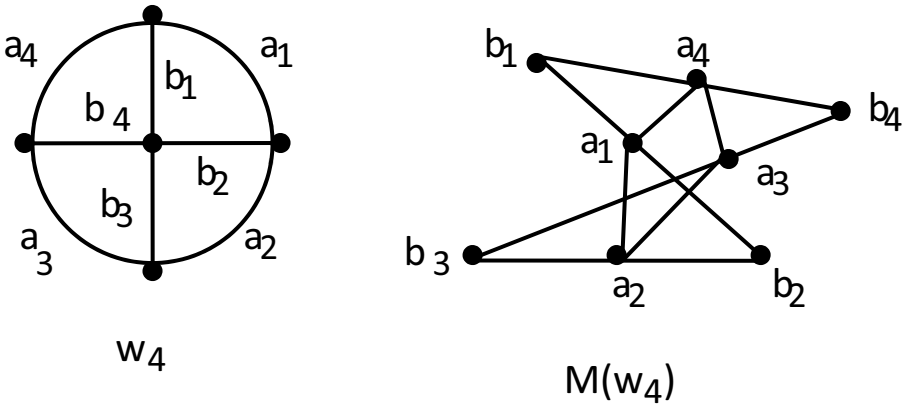
حال نشان می‌دهیم که $E(M) - C$ یک هم‌دور از M است. فرض کنیم $E(M) - C$ یک هم دور M نباشد. دراین صورت چون $cl(C) = C$ و $|T - cl(C)| = ۲$، بنا به قاعده حذف هم‌دور نتیجه می‌گیریم که M هم‌دوری مثل D^* دارد که مشمول در $E(M) - C$ است و با T اشتراکی ندارد. با به کار بستن دوباره قضیه ۱۲.۲.۳، در می‌یابیم که D^* با دو مثلث از M اشتراک دارد، یکی از آن‌ها مثلاً T'' است، که باید با T' متفاوت باشد. در نتیجه $T'' \in \mathcal{T}$، بنابراین $|T'' \cap E(N)| = ۱$ و $|T'' - C| = ۲$. چون $T'' - C$ با D^* اشتراک دارد، بنا به تعامد نتیجه می‌گیریم که $T'' - C \subseteq D^*$، بنابراین $T \cap (T'' - cl(C)) = \emptyset$. بنابراین در رابطه با T'' و $T^*_{۱T}$ و $T^*_{۲T}$ و با استفاده از خاصیت تعامد، نتیجه می‌گیریم که $T'' \cap R_T = \emptyset$، در غیر این صورت $T'' = R_T$. چون $|E(N)| = ۴$، نتیجه می‌گیریم که عضو منحصر به فرد $E(N) - R_T$ در هر دوی T' و T'' قرار دارد. چون $E(N)$ شامل یک مثلث نیست، با مقایسه فن‌هایی که شامل T' و T'' هستند، نتیجه می‌گیریم که $T'' = T'$، که یک تناقض است. لذا نتیجه می‌گیریم که $E(M) - C$ یک هم‌دور از M است. این هم‌دور را C^* می‌نامیم.

حال نشان می‌دهیم که $|C^*| = ۴$. بنابه قاعده حذف هم‌دور، $(T^*_{۱T} \cup T^*_{۲T}) - (T \cap E(N))$ شامل یک هم‌دور D^*_T از M است که با در نظر گرفتن تعامد با هر دوی T و C، باید برابر با $(T^*_{۱T} \cup T^*_{۲T}) - (T \cap E(N))$ باشد. $e \in R_T - T$ را در نظر می‌گیریم. دراین صورت $e \in D^*_T \cup D^*_{T'}$، بنابراین $(D^*_T \cup D^*_{T'}) - e$ شامل یک هم‌دور از M است. این هم‌دور شامل حداکثر یک عضو از C

است و بنابراین باید با C^* برابر باشد. در نتیجه $C^* = (T \cup T') - C$، بنابراین $|C^*| = ۴$.

فرض کنیم $M' = M/(C - E(N))$. دراین صورت بنابه لم ۷.۳.۳، M' یک مترویدِ همبند است. حال ثابت می‌کنیم که M'، ۳−همبند است. می‌دانیم $E(N)$ یک دور و C^* یک هم‌دور از M' است. چون هر یک از $T^*_{۱T}$،$T^*_{۲T}$،$T^*_{۱T'}$،$T^*_{۲T'}$ مشمول در $E(M')$ هستند، هر کدام از این سه‌تایی‌های M یک سه‌تایی از M' نیز هستند. به علاوه هر کدام از این سه‌تایی‌ها شامل تنها یک عضو از C^* هستند و این اعضا متمایز می باشند. بنابراین M'، هیچ ۲−دوری ندارد که با C^* اشتراک داشته باشد. به علاوه چون $E(N)$ یک دور از M' است، هیچ ۲−دوری از M' مشمول در $E(N)$ وجود ندارد. بنابراین M' ساده است. اما M' هم‌ساده نیز می‌باشد، چون M هم‌ساده است. پس M' هیچ ۲−جداسازی بدیهی نمی تواند داشته باشد. فرض کنیم $\{X, Y\}$ یک ۲−جداسازی غیر بدیهی از M' باشد. می‌توانیم فرض کنیم $|X \cap T| \geq ۲$ و X هر در دوی M' و $(M')^*$ بسته باشد. بنابراین X شامل T است و در نتیجه شامل $T^*_{۱T}$ و $T^*_{۲T}$ می‌باشد. درنتیجه X شامل $E(N)$ است، بنابراین $|X| \geq ۶$ و $|Y| \leq ۲$؛ که یک تناقض است. لذا نتیجه می‌گیریم که M'، ۳−همبند است. چون M'، N را به عنوان یک مینور دارد، نتیجه می‌گیریم که $M = M'$. بنابراین $|E(M)| = |E(M')| = ۸$. ■

مثال ۹.۳.۳ فرض کنیم M یک چرخ با رتبه چهار و N تحدید M به اعضای محیطی آن باشد. در این حالت $|E(M)| = ۸$. در لم قبل نشان دادیم که این تساوی در حالت کلی برقرار است.



شکل ۱.۳

داریم $E(M) = \{a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, b_۱, b_۲, b_۳, b_۴\}$ و $E(N) = \{a_۱, a_۲, a_۳, a_۴\}$.

با توجه به این‌که $M(W_r)$ برای $r \geq ۳$، ۳−همبند و خود دوگان است، M یک مترویدِ ۳−همبند مینور−مینیمال است که N را به عنوان یک مینور دارد.

دورهای سه عضوی یا مثلث‌های آن $\{b_۱, a_۴, b_۴\}$، $\{b_۱, a_۱, b_۲\}$، $\{b_۳, a_۲, b_۲\}$ و $\{b_۳, a_۳, b_۴\}$ هستند. هم دورهای سه‌عضوی یا سه‌تایی های آن$\{a_۴, b_۱, a_۱\}$ و$\{a_۱, b_۲, a_۲\}$ و$\{a_۳, b_۴, a_۴\}$ و$\{a_۲, b_۳, a_۳\}$ هستند. به‌طوری که مشاهده می‌کنیم $|T \cap E(N)| = ۱$ و $|T^*_{iT} \cap E(N)| = ۲$ و این مثال در شرایط لم قبل صدق می کند. N یک دور۴− عضوی است و هم دور ۴− عضوی آن $\{b_۱, b_۲, b_۳, b_۴\}$ است و $|E(M)| = ۸$.

فصل ۴

بررسی حالت همبندی

در این فصل قضیه اصلی را برای حالتی که N همبند باشد، ثابت می‌کنیم. همچنین نشان می‌دهیم که کران بالای دقیقی برای حالتی که N یک متروید همبند باشد، وجود دارد. ابتدا به بیان چند تعریف می‌پردازیم. سپس چند نتیجه مورد نیاز را بیان می‌کنیم که در اثبات قضیه اصلی این فصل کاربرد زیادی خواهد داشت.

۱.۴ تعاریف

تعریف ۱.۱.۴ فرض کنیم M مترویدی باشد که با حذف زیر مجموعه غیر خالی T از $E(N)$ از متروید N حاصل شده است. دراین صورت N را یک توسیع [۱] M گویند.

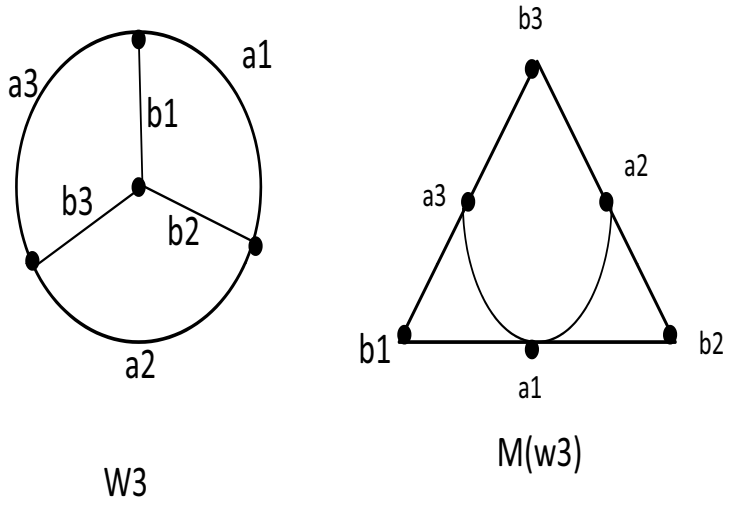
تعریف ۲.۱.۴ یک هم‌دور در یک متروید همبند که حذف آن یک متروید همبند باقی می‌گذارد، هم‌دور رأسی [۲] نامیده می‌شود.

---

[۱] extention

[۲] Vertex Cocircuit

مثال ۳.۱.۴ گراف W_3 و $M(W_3)$ را در شکل زیر در نظر بگیرید.



شکل ۱.۴

می‌بینیم که $\{b_1, b_2, b_3\}$ یک هم‌دور در $M(W_3)$ است که با حذف آن یک متروید همبند باقی می‌ماند. لذا $\{b_1, b_2, b_3\}$ یک هم‌دور رأسی است.

تعریف ۴.۱.۴ گراف G را که راس تنها ندارد، یک شبکه سری—موازی [۳] گویند، هرگاه بتوان آن را از دو گراف همبند که هر کدام شامل تنها یک یال می‌باشند، توسط دنباله‌ای از اعمال توسعه موازی یا سری به دست آورد.

[۳] Series-parallel network

خواص شبکه سری– موازی

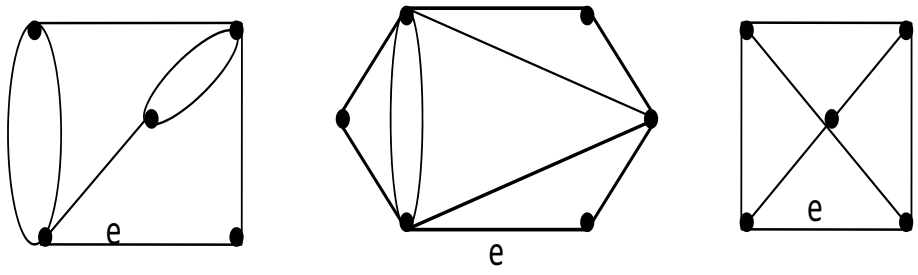
فرض کنیم G یک شبکه سری – موازی باشد. در این صورت:

(الف) G یک گراف مسطح است.

(ب) G یک بلوک است.

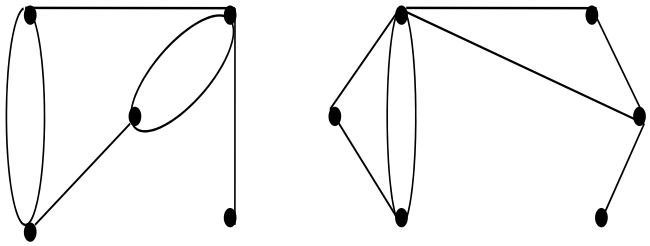
(ج) اگر G حداقل سه یال داشته باشد و e یکی از آن‌ها باشد، آن‌گاه $G\backslash e$ یا G/e یک بلوک نیست .

مثال ۵.۱.۴ گراف‌های G_1 و G_2 و G_3 را در شکل زیر در نظر می‌گیریم. گراف‌های G_1 و G_2 شبکه سری–موازی هستند، زیرا در تمامی خواص شبکه سری–موازی صدق می‌کنند. هر دو مسطح هستند. هر دو بلوک هستند، زیرا هر دو گراف ۲– همبند ماکسیمال هستند.



شکل ۲.۴a

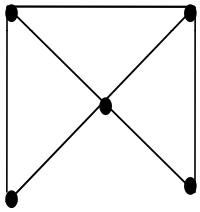
حال شرط آخر را بررسی می‌کنیم. G_1 وG_2 هر کدام بیشتر از سه یال دارند، اگر یال e را از هر دو گراف G_1 وG_2 حذف کنیم، آن‌گاه خواهیم داشت:



G1\e G2\e

شکل ۲.۴ b

مشاهده می‌کنیم که هیچ کدام از گراف های $G_1\backslash e$ و $G_2\backslash e$ یک بلوک نیستند. لذا شرط آخر نیز برقرار است. اما گراف G_3 شبکه سری−موازی نیست. زیرا اولاً G_3، ۲− همبند نیست، همچنین اگر شرط آخر را بررسی کنیم خواهیم داشت:



G3\e

شکل ۳.۴

می‌بینیم که $G_3\backslash e$ یک بلوک است، لذا G_3 شبکه سری− موازی نیست.

۲.۴ قضیه‌ها و لم‌های مورد نیاز

لم ۱.۲.۴ فرض کنیم M یک مترویدِ ۳−همبند باشد که حداقل چهار عضو دارد و فرض کنیم $\{e,f,g\}$ یک مثلث از M باشد به طوری‌که هیچ کدام از مترویدهای $M\backslash e$ و $M\backslash f$، ۳− همبند نباشند. دراین‌صورت M یک سه‌تایی دارد که شامل e و دقیقاً یکی از f و g است. (این لم به لم مثلثی تات معروف است).

برهان : به [[۱۰] لم ۴.۸. ۹] مراجعه شود. ■

قضیه ۲.۲.۴ فرض کنیم f و e اعضای متمایزی از مترویدِ ۳−همبند M باشند. فرض کنیم

(الف) $\{e,f\}$ در مثلث $\{e,f,a\}$ و سه‌تایی $\{e,f,z\}$ از M قرار دارند، دراین‌صورت

(ب) M با $U_{۲,۴}$ یکریخت است، یا

(ج) M با $P_\Delta(M(K_۴),M/z)\setminus\{e,f\}$ یکریخت است، که در آن $\Delta=\{e,f,a\}$.

به ویژه اگر هر دوی $M\backslash e$ و M/e، ناهمبند باشند، آن‌گاه (الف) برقرار است، بنابراین یکی از (ب) و (ج) برقرار می‌باشد.

برهان : به [[۱] قضیه ۱.۵] مراجعه شود. ■

قضیه ۳.۲.۴ فرض کنیم M یک مترویدِ ۳−همبند باشد که در آن $|E(M)|\geq ۴$. فرض کنیم M دارای دورC است به‌طوری‌که برای همه زیرمجموعه‌های دو عضوی مثل Z از C، هردوی $M\backslash Z$ و M/Z، ناهمبند هستند، دراین‌صورت

(الف) $M\cong U_{۲,۴}$، یا

(ب) $|C| = ۳$ و M دارای یک سه‌تایی $\{a,b,c\}$ است به‌طوری‌که $M^*|(C \cup \{a,b,c\}) \cong M(K_۴)$ و

$$M^* = P_\Delta(M^*|(C \cup \{a,b,c\}), M^* \backslash C)$$

برهان : به [[۱] قضیه ۵.۵] مراجعه شود. ■

قضیه ۴.۲.۴ هر متروید ۳–همبند M که حداقل دارای چهار عضو است یک مینور یکریخت با $U_{۲,۴}$ یا $M(K_۴)$ دارد.

برهان : به [[۱۰] قضیه ۱۳.۲.۱۱] مراجعه شود. ■

نکته ۵.۲.۴ هر مینور از متروید M را می‌توان به‌صورت $M \backslash I^* / I$ نوشت به‌طوری‌که I و I^* به ترتیب مجموعه‌های مستقل و هم‌مستقل هستند.

برهان : به [[۱۰] قضیه ۵.۳.۳] مراجعه شود . ■

قضیه ۶.۲.۴ اگر $T \subseteq E$، آن‌گاه برای هر $X \subseteq E - T$، داریم

$$r_{M/T}(X) = r_M(X \bigcup T) - r_M(T) \quad , \quad r_{M \backslash T}(X) = r_M(X)$$

برهان : به [[۱۰] قضیه ۶.۱.۳] مراجعه شود. ■

۳.۴ قضیه اصلی

قضیه ۱.۳.۴ قضیه اصلی فرض کنیم N یک متروید همبند غیرتهی باشد. اگر M یک متروید ۳–همبند مینور– مینیمال باشد که N را به عنوان مینور دارد، آن‌گاه

$$|E(M)| - |E(N)| \leq ۵(\lambda_۲(N) - ۱).$$

برهان : فرض کنیم قضیه برقرار نیست و مثال نقض (M, N) را انتخاب می‌کنیم که نسبت به ترتیب الفبایی روی $(|E(M)|, -|E(N)|)$ مینیمال است. مشاهده می‌کنیم که N، ۳−همبند نیست. به‌ویژه $\lambda_۲(N) \geq ۲$. بنابراین

$$|E(N)| \geq ۴ \qquad (۴)$$

به‌علاوه، چون (M, N) یک مثال نقض برای قضیه است، نتیجه می‌گیریم که

$$|E(M)| > |E(N)| + ۵(\lambda_۲(N) - ۱)$$

بنابراین

$$|E(M)| \geq ۱۰ \qquad (۵)$$

برای کامل شدن اثبات، لم های زیر را ثابت می کنیم :

لم ۲.۳.۴ فرض کنیم $\{X_۱, X_۲\}$ یک ۲−جداسازی از N و N' یک مینور از M باشد که مینور− مینیمال است و N را به‌عنوان یک مینور دارد و در رابطه $K'_N(X_۱, X_۲) > ۱$ صدق می‌کند. دراین‌صورت $T(N')$ یک مسیر ۳−رأسی با رأس مرکزی H است به‌طوری‌که

(الف) $|E(H) \cap E(M)| = |E(N') - E(N)| = ۱$،

(ب) هر دو مجاور H با هر دوی $X_۱$ و $X_۲$ اشتراک دارند و

(ج) یا

(۱) H یک مثلث است که مجاورهای آن در $T(N')$ هم‌دور هستند و N یک هم‌دور است، و یا

(۲) H یک سه‌تایی است که مجاورهای آن در $T(N')$ دور هستند و N یک دور است.

برهان : چون $K'_N(X_1, X_2) > 1$، N' همبند است. به‌علاوه چون $K_N(X_1, X_2) = 1$، نتیجه می‌گیریم که $N \neq N'$. بنابه لم ۳.۳.۳،

$$|E(N')| - |E(N)| \leq 5 \qquad (6)$$

با توجه به چگونگی انتخاب (M, N)، قضیه برای زوج (M, N') برقرار است. بنابراین

$$|E(M)| - |E(N')| \leq 5(\lambda_2(N') - 1)$$

با توجه به نامساوی (۶) و نامساوی آخر، خواهیم داشت :

$$|E(M)| - |E(N)| \leq 5\lambda_2(N')$$

چون قضیه برای زوج (M, N) برقرار نیست، داریم

$$\lambda_2(N') \geq \lambda_2(N) \qquad (7)$$

بنابراین $\lambda_2(N') \geq 2$ و چون N همبند است، هر عضو $\Lambda_2(N')$ حداقل سه عضو دارد. به‌علاوه بنا به لم ۴.۳.۳ و با توجه به دوگان در صورت لزوم، می‌توانیم فرض کنیم که یک رأس H از $T(N')$ وجود دارد که به وسیله یک سه‌تایی برچسب گذاری شده است و دقیقاً دو مجاور دارد که هر کدام از آن‌ها با یک دور برچسب گذاری شده‌اند به‌طوری‌که هر دوی X_1 و X_2 با هر چهار مجموعه که به‌وسیله یال‌های واقع بر H نمایش داده می‌شوند، اشتراک دارند. چون ۲−جداسازی $\{X_1, X_2\}$ دلخواه است، نتیجه می گیریم که هر ۲−جداسازی از N به وسیله یک رأس از $T(N)$ نمایش داده می‌شود نه به وسیله یک یال از $T(N)$. بنابراین $T(N)$ هیچ یالی ندارد، لذا بنابه قسمت (ج) قضیه ۶.۱.۲، N یک دور یا یک هم‌دور است و لم ثابت می‌شود. ■

اکنون می‌دانیم که N یک دور یا یک هم‌دور است. فرض می‌کنیم $N = M\backslash X/Y$. حال لم زیر را ثابت می‌کنیم:

لم ۳.۳.۴ مجموعه‌های X و Y منحصربفرد نیستند.

برهان : فرض می‌کنیم که مجموعه‌های X و Y منحصربفرد هستند و $\{X_1, X_2\}$ یک ۲–جداسازی از N است. دراین صورت بنابه لم ۲.۳.۴، M مینوری مثل N'_1 دارد که دارای عضو e_1 است به‌طوری‌که $N'_1\backslash e_1 = N$. به‌علاوه $T(N'_1)$ یک مسیر ۳–رأسی است که رأس مرکزی آن به وسیله یک سه‌تایی شامل e_1 برچسب گذاری شده است و دو رأس دیگر با دورهای C_{11} و C_{12} برچسب گذاری شده‌اند که در آن هر C_{1i} با هر X_j اشتراک دارد. در نتیجه برای هر i، $|C_{1i} \cap E(N)| \geq 2$. حال ۲–جداسازی $\{C_{11} \cap E(N), C_{12} \cap E(N)\}$ از N را بررسی می‌کنیم. دوباره M مینوری مثل N'_2 دارد که دارای عضو e_2 است به‌طوری‌که $N'_2\backslash e_2 = N$. به‌علاوه $T(N'_2)$ یک مسیر ۳–رأسی است که رأس مرکزی آن به وسیله یک سه‌تایی شامل e_2 برچسب گذاری شده است و دو رأس دیگر آن با دورهای C_{21} و C_{22} برچسب گذاری شده‌اند، که هر کدام از آن‌ها با هر دوی $C_{11} \cap E(N)$ و $C_{12} \cap E(N)$ اشتراک دارند. با در نظر گرفتن یکتایی X و Y، هر دوی e_1 و e_2 عضو X هستند. فرض می‌کنیم که $M' = M\backslash(X - \{e_1, e_2\}/Y$. دراین‌صورت چون $E(N)$ یک دور M است، لذا یک دور M' می‌باشد و M' دارای هم‌رتبه سه است. حال $M'\backslash e_2 = N'_1$ و $M'\backslash e_1 = N'_2$ و دوگان M' مترویدی با رتبه سه است که $\{e_1\}$ و $\{e_2\}$ و $\{e_1, e_2\}$ فلت‌های آن هستند، زیرا $E(M') = E(N) \cup \{e_1, e_2\}$ و $r^*(M') = 3$، لذا $\{e_1, e_2\}$ یک ابرصفحه در M'^* است یا در واقع یک فلت از رتبه دو در دوگان M' است و چون $\{e_1, e_2\}$ یک فلت دو عضوی از رتبه

دو است، لذا $\{e_1\}$ و $\{e_2\}$ فلت‌های از رتبه یک در M'^* هستند و M'^* با ساده‌سازی یکریخت با $M(K_4)$ می‌شود. و چون $M'\backslash\{e_1,e_2\} \cong N$، بنابه لم ۹.۲.۳، $\lambda_2(M') = \lambda_2(N) - 1$. حال $|E(M')| > |E(N)|$، بنابراین (M, M') یک مثال نقض برای قضیه نیست. در نتیجه $|E(M)|-(|E(N)+2) = |E(M)|-|E(M')| \leq 5(\lambda_2(M')-1) \leq 5(\lambda_2(N)-1)-5.$ بنابراین $|E(M)| - |E(N)| \leq 5(\lambda_2(N) - 1)$، که یک تناقض است. بنابراین ۳.۳.۴ برقراراست. ■

فرض کنیم

$$U = \{e \in E(M) - E(N) : \quad M\backslash e \text{ و } M/e \text{ است یک مینور از هر دوی N }\}.$$

بنابه لم ۳.۳.۴ ، $U \neq \emptyset$ و $e \in U$ را انتخاب می‌کنیم. چون $|E(N)| \geq 4$ و M/e، N را به‌عنوان یک مینور دارد، $Si(M/e)$، N را به‌عنوان یک مینور دارد، بنابراین $Si(M/e)$، ۳−همبند نیست، زیرا با مینور− مینیمال بودن M در تناقض خواهد بود. لذا بنابه قضیه ۱۱.۲.۳، $Co(M\backslash e)$، ۳−همبند است و هر کلاس سری غیربدیهی از $M\backslash e$ دقیقاً دو عضو دارد. چون $M\backslash e$، ۳−همبند نیست، بنابه نتیجه ۱۳.۲.۳، مجموعه $\{T_1^*, T_2^*, ..., T_n^*\}$ متشکل از سه‌تایی‌های M که شامل e هستند، غیرخالی‌است. به‌علاوه $T_1^* - e$، $T_2^* - e$، ... و $T_n^* - e$ دو به دو جدا از هم‌اند.

حال لم زیر را ثابت می‌کنیم

لم ۴.۳.۴ برای هر i در $\{1, 2, ..., n\}$، داریم $T_i^* - e \subseteq E(N)$.

برهان : فرض می‌کنیم برای برخی i در $\{1, 2, ..., n\}$، مثلاً $i = 1$، $f \in T_i^* - (e \cup E(N))$. دراین‌صورت $n \geq 2$، در غیراین‌صورت $M\backslash e/f$، ۳−همبند است و N را به‌عنوان یک مینور دارد که با چگونگی انتخاب M متناقض است. همچنین چگونگی انتخاب M نتیجه می‌دهد که M/f،

۳−همبند نیست. با توجه به دوگان لم ۱.۲.۴ با T_1^*، نتیجه می‌گیریم که برای هر x در $\{e,f\}$، مثلث T_x از M وجود دارد به‌طوری‌که $x \in T_x$ و $|T_x \cap T_1^*| = 2$. فرض می‌کنیم $T_e \neq T_f$. دراین‌صورت T_f، T_1^*، T_e و T_2^* یک فن در M است، لذا

$$Si(M/f) \cong M/f\backslash(T_1^* - \{e,f\})$$

و بنابراین $Si(M/f)$، ۳−همبند است و اعضای آن را می‌توان طوری انتخاب کرد که N را به‌عنوان یک مینور داشته باشد. این تناقض با چگونگی انتخاب M نتیجه می‌دهد که $T_e = T_f$. دراین‌حالت، T_1^*، T_e و T_2^* یک فن در M است و $n = 2$. حال به M^* توجه می‌کنیم. فرض کنیم g عضوی منحصر بفرد از $T_e - \{e,f\}$ باشد و برای هر i در $\{1,2\}$، فرض می‌کنیم e_i عضوی منحصربفرد از $T_i^* - T_e$ باشد. چون $Co(M^*\backslash e)$، ۳−همبند نیست، بنابه قضیه ۲.۲.۴، نتیجه می‌گیریم M^* دارای یک مثلث است که با $\{e,f,g\}$ در $\{f,g\}$ اشتراک دارد. فرض می‌کنیم سومین عضو این مثلث e_3 باشد. دراین‌صورت بنابه قضیه ۳.۲.۴، نتیجه می‌گیریم که $\{e_1,e_2,e_3\}$ مثلث Δ از M^* است و $M^* = P_\Delta(M(K_4), M^*\backslash T_e)$ که در آن مثلث‌های $M(K_4)$ به غیر از Δ، T_1^*، T_2^* و $\{f,g,e_3\}$ هستند و $M^*\backslash T_e$ ، ۳−همبند است. حال بنا به (۵)، $|E(M)| \geq 10$. در نتیجه برای همه مقادیر i، مترویدِ $Si(M^*/e_i)$، ۳−همبند نیست. بنابراین برای همه مقادیر i، $Co(M^*\backslash e_i)$ ، ۳−همبند است. و چون هیچ کدام از e_i ها نمی‌توانند در یک سه‌تایی از M^* باشند، نتیجه می‌گیریم که برای همه مقادیر i، $M^*\backslash e_i$، ۳−همبند است. حال N^* یک هم‌دور و یک مینور از M^*/e است. بنابراین اگر $e_1 \notin E(N)$، آن‌گاه $M^*/e\backslash e_1$، N^*، را به‌عنوان مینور دارد. در نتیجه $M^*\backslash e_1$، N^*، را به‌عنوان مینور دارد که با چگونگی انتخاب M^* متناقض است. بنابراین $e_1 \in E(N)$ و با استفاده از تقارن،

$e_۲ \in E(N)$. به‌علاوه $M^*\backslash e/f$، N^* را به‌عنوان مینور دارد و بنابراین M^*/f نیز چنین است. لذا اگر $e_۳ \notin E(N)$، آن‌گاه N یک مینور از $M^*/f\backslash e_۳$، است و همچنین مینوری از $M^*\backslash e_۳$ می‌باشد. بنابراین $e_۳ \in E(N)$.

متروید $M^*\backslash T_e$، ۳−همبند است و بنابراین با چگونگی انتخاب (M, N)، N^* را به‌عنوان یک مینور ندارد. لذا $g \in E(N)$. نتیجه می‌گیریم که $M^*\backslash T_e$، $N^*\backslash g$ را به‌عنوان یک مینور دارد و $N^*\backslash g$ همبند است، زیرا N^* یک هم‌دور است. پس $|E(N^*\backslash g)| = |E(N)| - ۱$ و $\lambda_۲(N^*\backslash g) = \lambda_۲(N) - ۱$.

حال دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم :

(الف) $|E(N^*\backslash g)| \geq ۴$؛

(ب) $|E(N^*\backslash g)| = ۳$.

در حالت (الف)، M' را یک مینور ۳−همبند از $M^*\backslash T_e$ انتخاب می‌کنیم که این مینور− مینیمال است و $N^*\backslash g$ را به‌عنوان یک مینور دارد. با توجه به چگونگی انتخاب (M, N)، قضیه برای $(M', N^*\backslash g)$ بر قرار است و بنابراین

$$|E(M')| - |E(N^*\backslash g)| \leq ۵(\lambda_۲(N^*\backslash g) - ۱) \qquad (۸)$$

در حالت (ب)، M' را یک مینور ۳−همبند از $M^*\backslash T_e$ در نظر می‌گیریم که مینور− مینیمال است و $N^*\backslash g$ را به‌عنوان یک مینور سره دارد. دراین‌صورت بنابه قضیه ۱.۳.۱،

$$|E(M')| - |E(N^*\backslash g)| \leq ۳ \qquad (۹)$$

حال $M^* = P_\Delta(M(K_۴), M^*\backslash T_e)$. فرض می‌کنیم $M' = (M^*\backslash T_e)\backslash X'/Y'$. از انتخاب M' نتیجه می‌گیریم که Δ یک مثلث M' می‌باشد. پس $M^*\backslash X'/Y' = P_\Delta(M(K_۴), M^*\backslash T_e\backslash X'/Y')$. چون M'، ۳−همبند است، بنابراین $M^*\backslash X'/Y'$، ۳−همبند است. به‌علاوه چون $N^*\backslash g$ یک مینور از M' است، نتیجه می‌گیریم N^* یک مینور از $M^*\backslash X'/Y'$ است. با توجه به چگونگی انتخاب M^* نتیجه می‌گیریم که $X' = Y' = \phi$. در نتیجه $M' = M^*\backslash T_e$. بنابراین در حالت (الف)، با استفاده از (۸) داریم،

$$|E(M^*\backslash T_e)| - |E(N^*\backslash g)| \leq ۵(\lambda_۲(N^*\backslash g) - ۱).$$

بنابراین $(|E(M)| - ۳) - (|E(N)| - ۱) \leq ۵((\lambda_۲(N) - ۱) - ۱)$، درنتیجه $|E(M)| - |E(N)| \leq ۵(\lambda_۲(N) - ۱) - ۳$، که یک تناقض است. در حالت (ب)، با استفاده از (۹) داریم، $(|E(M)| - ۳) - (|E(N)| - ۱) \leq ۳$، بنابراین $|E(M)| - |E(N)| \leq ۵$. اما $|E(N)| = ۴$، لذا $\lambda_۲(N) = ۲$، و بنابراین $|E(M)| - |E(N)| \leq ۵(\lambda_۲(N) - ۱)$. این تناقض اثبات لم ۴.۳.۴ را کامل می‌کند. ■

حال فرض می‌کنیم برای همه مقادیر i، $T_i^* = \{e, a_i, b_i\}$. فرض کنیم $M' = M\backslash e/\{a_۱, a_۲, ..., a_n\}$ و $N' = N/\{a_۱, a_۲, ..., a_n\}$. دراین‌صورت $M' \cong Co(M\backslash e)$، بنابراین M'، ۳−همبند است. حال لم زیر را ثابت می‌کنیم.

لم ۵.۳.۴ $|E(N')| \leq ۳$.

برهان : فرض می‌کنیم $|E(N')| \geq ۴$ و M'' یک مینور ۳−همبند از M' باشد که این مینور− مینیمال است و N' را به‌عنوان یک مینور دارد. با توجه به چگونگی انتخاب (M, N)، داریم که

$$|E(M'')| - |E(N')| \leq ۵(\lambda_۲(N') - ۱) \qquad (۱۰)$$

فرض می‌کنیم $M'' = M'\backslash X'/Y'$. دراین‌صورت $M'' = M\backslash(X' \cup e)/Y'/\{a_۱, a_۲, ..., a_n\}$.برای هر i، مترویدِ $M\backslash(X' \cup e)/Y'$ می‌تواند از مترویدِ ۳−همبندِ M''، با افزودن a_i به‌طور سری با b_i به دست آید. بنابراین $\lambda_۲(M\backslash(X' \cup e)/Y') = n + ۱$. حال $E(N) \subseteq E(M\backslash(X' \cup e)/Y')$، بنابراین در ترتیب الفبایی،

$$(|E(M)|, -|E(M\backslash(X' \cup e)/Y')|) \leq (|E(M)|, -|E(N)|)$$

اما بنابه ۱.۳.۴، در هر مثال نقض مینیمال الفبایی (M, N) برای قضیه، مختص دوم یعنی N یک دور یا یک هم‌دور است. چون $M\backslash(X' \cup e)/Y'$ یک دور یا یک هم‌دور نیست، این نتیجه می‌دهد که قضیه برای $(M, M\backslash(X' \cup e)/Y')$ برقراراست. در نتیجه

$$|E(M)| - |E(M\backslash(X' \cup e)/Y')| \leq ۵(\lambda_۲\ (M\backslash(X' \cup e)/Y') - ۱) = ۵n$$

همچنین داریم $|E(M\backslash(X' \cup e)/Y')| = |E(M'')| + n$ و بنابراین $|E(M)| - |E(M'')| \leq ۶n$. با افزودن آخرین نامساوی به (۱۰) به‌دست می‌آوریم $|E(M)| - |E(N')| \leq ۶n + ۵(\lambda_۲(N') - ۱)$. چون $|E(N')| = |E(N)| - n$، خواهیم داشت $|E(M)| - |E(N)| \leq ۵(\lambda_۲(N') + n - ۱)$. اما $\lambda_۲(N) = \lambda_۲(N') + n$ و بنابراین به تناقض می‌رسیم. پس نتیجه می‌گیریم که ۵.۳.۴ برقرار است.

■

حال N' یک دور است و چون $|E(N)| \geq ۴$، از ساختار N' نتیجه می‌گیریم که $|E(N')| \geq ۲$. بنابراین بنابه ۵.۳.۴، $|E(N')| \in \{۲, ۳\}$. اگر $M' = N'$، آن‌گاه چون $\lambda_۲(N) \geq ۲$، داریم

$$|E(M)| - |E(N)| = ۱ \leq ۵(\lambda_۲(N) - ۱)$$

که یک تناقض است. بنابراین $M' \neq N'$. حال متروید M'' را تعریف می‌کنیم. اگر $|E(N')| = ۳$، آن‌گاه بنابه قضیه ۱.۳.۱، M'، دارای یک مینور ۳−همبند مثل M'' است به‌طوری‌که $|E(M'')| - |E(N')| \leq ۳$ و M'' مینور− مینیمال است که N' را به‌عنوان یک مینور سره دارد. اگر $|E(N')| = ۲$، آن‌گاه M' یک توسیع بدون طوقه از N' است، بنابراین M' دارای یک مینور مثل M'' است که یکریخت با $U_{۱,۳}$ می‌باشد به‌طوری‌که $E(N') \subseteq E(M'')$.

فرض کنیم $M'' = M'\backslash X'/Y'$ که در آن Y' طوری انتخاب می‌شود که $|Y'|$ ماکسیمال باشد. دراین‌صورت $M'' = [M\backslash(X' \cup e)/Y']/\{a_۱, a_۲, ..., a_n\}$. فرض کنیم $M''' = M\backslash(X' \cup e)/Y'$. که برای همه مقادیر i، از متروید ۳−همبند M'' با افزودن a_i به‌طور سری با b_i به‌دست می آید. بنابراین برای هر i، تنها ۲−جداسازی‌های M''' عبارت است از $\{\{a_i, b_i\}, E(M''') - \{a_i, b_i\}\}$.

حال لم زیر را ثابت می‌کنیم

لم ۶.۳.۴ $n = ۱$.

برهان : فرض کنیم $n \geq ۲$. ابتدا نشان می‌دهیم که e یک هم‌طوقه در $M\backslash X'/Y'$ نیست. فرض کنیم باشد. دراین‌صورت M یک هم‌دور مثل C^* دارد به‌طوری‌که $e \in C^* \subseteq X' \cup e$. فرض کنید $f \in C^* - e$. دراین‌صورت $\{f, e\}$ یک اجتماع از هم‌دورهای $M\backslash(X' - f)/Y'$ است. بنابراین f یک هم‌طوقه از $M\backslash[(X' - f) \cup e]/Y'$ است، لذا $M\backslash(X' \cup e)/Y' = M\backslash[(X' - f) \cup e]/(Y' \cup f)$. بنابراین نتیجه می گیریم که $M'\backslash X'/Y' = M\backslash(X' - f)/(Y' \cup f)$ که یک تناقض با چگونگی انتخاب Y' است. در نتیجه e یک هم‌طوقه در $M\backslash X'/Y'$ نیست. چون برای هر i، $\{e, a_i, b_i\}$ یک هم‌دور از M است، پس اجتماعی از هم‌دورهای $M\backslash X'/Y'$ خواهد بود. چون e یک هم‌طوقه از

$M\backslash X'/Y'$ نیست، این متروید همبند است. به‌علاوه بنابه خاصیت تعامد، چون $n \geq ۲$، هیچ ۲−دوری در $M\backslash X'/Y'$ وجود ندارد که شامل e باشد.

حال نشان می‌دهیم که $M\backslash X'/Y'$، ۳−همبند است . اگر ۳−همبند نباشد، آن‌گاه دارای یک ۲−جداسازی $\{J \cup e, K\}$ خواهد بود که در آن $e \notin J$ و $|J| \geq ۲$. در نتیجه $\{J, K\}$ یک ۲−جداسازی از $M\backslash(X' \cup e)/Y'$ است، بنابراین J یا K برای برخی i، برابر $\{a_i, b_i\}$ است. در هر حالت، بنابه لم ۱۵.۲.۳، e در یک دور $M\backslash X'/Y'$ است که با برخی $\{e, a_i, b_i\}$ تنها در یک عضو اشتراک دارد. این تناقض با خاصیت تعامد نتیجه می‌دهد که $M\backslash X'/Y'$ نیز ۳−همبند است. چون $M\backslash X'/Y'$، N را به‌عنوان یک مینور دارد، با توجه به چگونگی انتخاب M نتیجه می‌گیریم که $X' = Y' = \phi$. بنابراین $M'' = M'$ و لذا

$$|E(M)| - |E(N)| = (۱ + |E(M'')| + n) - (|E(N')| + n) = |E(M'')| - |E(N')| + ۱ \leq ۴$$

چون $\lambda_۲(N) \geq ۲$، نتیجه می‌گیریم که $|E(M)| - |E(N)| \leq ۵(\lambda_۲(N) - ۱)$ ، که یک تناقض است. پس $n = ۱$. ■

با ترکیب لم‌های ۵.۳.۴ و ۶.۳.۴ با این حقیقت که $|E(N)| \geq ۴$، نتیجه می‌گیریم که

$$|E(N)| = ۴ \qquad (۱۱)$$

و M''' تنها یک ۲−جداسازی دارد، که به‌وسیله $\{a_۱, b_۱\}$ ایجاد می‌شود. هم‌دور $\{e, a_۱, b_۱\}$ را با T_e^* دوباره برچسب گذاری می‌کنیم. چون e به‌طور دلخواه در U انتخاب شده است، نتیجه می‌گیریم که T_e^* برای هر عضو e از U تعریف می‌شود.

لم ۷.۳.۴ یک دور فراگیر D از M وجود دارد به‌طوری‌که $E(M) - D$ یک زیرمجموعه سه‌عضوی از U است که اعضای آن را می‌توان با f، g و h برچسب گذاری کرد به‌طوری‌که $T_g^* \cap T_h^* = \emptyset$ و T_f^* با هر کدام از T_g^* و T_h^* در دقیقاً یک عضو اشتراک دارد.

برهان : چون M''' نه یک دور و نه یک هم‌دور است، قضیه برای زوج (M, M''') برقرار است، بنابراین $|E(M)| - |E(M''')| \leq ۵$. حال بنابه (۱۱)، داریم $|E(N)| = ۴$، بنابراین

$$|E(M''')| - |E(N)| = |E(M'')| - |E(N')| \leq ۳.$$

و این نتیجه می‌دهد که $|E(M)| - |E(M''')| \geq ۳$، زیرا

$$۵ = ۵(\lambda_۲(N) - ۱) < |E(M)| - |E(N)| = (|E(M)| - |E(M''')|) + (|E(M''')| - |E(N)|).$$

حال قصد داریم لم ۲.۳.۳ را برای ۲–جداسازی دقیق $\{T_e^* - e, E(M''') - T_e^*\}$ از M''' به کار ببریم. بدیهی است که M''' یک مینور M است و چون M، ۳–همبند است، پس $k_M(T_e^* - e, E(M''') - T_e^*) > ۱$. حال فرض می‌کنیم $M_۱$ مینوری از M باشد به‌طوری‌که مینیمال است و M''' را به‌عنوان یک مینور دارد و در رابطه $k_{M_۱}(T_e^* - e, E(M''') - T_e^*) > ۱$ صدق می‌کند. فرض می‌کنیم $M_۱ \neq M$. دراین‌صورت چون $M_۱$، N را به‌عنوان یک مینور دارد، با توجه به مینور–مینیمال بودن M نتیجه می‌گیریم که $M_۱$، ۳–همبند نیست. بنابراین چون $\lambda_۲(M''') = ۲$، نتیجه می‌گیریم که $\lambda_۲(M_۱) \geq \lambda_۲(M''')$. حال $T(M''')$ دو رأس دارد، یکی از آن‌ها یک مثلث است و دیگری یکریخت با M'' می‌باشد. اما بنا به لم ۴.۳.۳، $T(M_۱)$ حداقل سه رأس شامل یک مثلث یا یک سه‌تایی H دارد که شامل عضو منحصربفرد x از $E(M_۱) - E(M''')$ می‌باشد. بنابراین $T(M''')$ که برابر $T(M_۱/x)$ است اگر H یک مثلث باشد و برابر با $T(M_۱ \backslash x)$ است، اگر H یک سه‌تایی باشد،

رأسی دارد که متناظر با یک دور یا هم‌دور با حداقل چهار عضو می‌باشد. این تناقض نتیجه می‌دهد که $M_1 = M$.

حال می‌دانیم M مینور– مینیمال است که M''' را به‌عنوان یک مینور دارد و در رابطه $k_M(T_e^* - e, E(M''') - T_e^*) > 1$ صدق می‌کند. دراین‌صورت بنابه لم ۲.۳.۳، مجموعه‌های منحصر بفرد P و Q وجود دارند به‌طوری‌که $M''' = M\backslash P/Q$ و اعضای $P \cup Q$ را می‌توان به‌صورت z_1 ، z_2،... ،z_m برچسب گذاری کرد به‌طوری‌که این اعضا متناوباً در P و Q هستند. حال بنا به قسمت (ج) لم ۲.۳.۳، $X_{z_1} = T_e^* - e$. به‌علاوه $\{X_{z_1}, Y_{z_1}\}$ یک ۲–جداسازی از مترویدِ ۲–همبند M_{z_1} است. بنابراین X_{z_1} یک ۲–دور یا یک ۲–هم‌دور از M_{z_1} است. چون M''' یک مینور از M_{z_1} و X_{z_1} یک هم دور از M''' است، نتیجه می گیریم که X_{z_1} یک ۲–هم‌دور از M_{z_1} است. چون X_{z_1} یک ۲–هم‌دور از M نیست، نتیجه می‌گیریم که $z \in P$ و بنابه لم ۱۵.۲.۳، $X_{z_1} \cup z_1$ یک سه‌تایی از M است. بنابراین $e = z_1$، درغیراین‌صورت بنابه قضیه ۳.۲.۴، $M^*|(T_e^* \cup z_1) \cong U_{2,4}$، بنابراین M/e، ۳–همبند می‌شود، که با مینور–مینیمال بودن M در تناقض است.

حال $X_{z_2} = T_e^*$. چون $\{X_{z_2}, Y_{z_2}\}$ یک ۲–جداسازی از M/z_2 است ولی $\{X_{z_2}, Y_{z_2} \cup z_2\}$ یک ۲–جداسازی از M نیست، نتیجه می‌گیریم که T_e^* در M، z_2 را توسیع می‌دهد. بنابراین بنابه قسمت (ب) قضیه ۴.۲.۳، M دوری مثل C دارد به‌طوری‌که $z_2 \in C \subseteq T_e^* \cup z_2$. اگر $e \notin C$، آن‌گاه C یک مجموعه سه‌عضوی است که شامل یک دور و یک هم‌دور از $M\backslash e$ است، بنابراین $Co(M\backslash e)$ ۳–همبند نیست، که این یک تناقض است. لذا $e \in C$.

چون $e \in U$، نتیجه می‌گیریم که N یک مینور از M/e است. چون بنابه لم ۴.۳.۴، $T_e^* - e \subseteq E(N)$ و $T_e^* - e$، $z_۲$ را در M/e توسیع می دهد، پس باید $z_۲$ را از M/e حذف کنیم تا N را به دست بیاوریم، بنابراین

N یک مینور از $M/e\backslash z_۲$ است. (۱۲)

چون $z_۲ \in Q$، نتیجه می‌گیریم که $z_۲ \in U$ و بنابراین بنابه لم ۷.۳.۳، $T_{z_۲}^*$ وجود دارد. بنابه تعامد، $T_{z_۲}^* \cap C \neq \{z_۲\}$، بنابراین $T_{z_۲}^* \cap T_e^*$ شامل یک عضو از C است. حال $T_{z_۲}^* - z_۲ \neq T_e^* - e$، در غیراین‌صورت $\{(T_{z_۲}^* \cup T_e^*, E(M) - (T_{z_۲}^* \cup T_e^*)\}$ یک ۲–جداسازی از M خواهد بود. بنابراین

$$|T_{z_۲}^* \cap T_e^*| = ۱ \quad , \quad T_{z_۲}^* \cap T_e^* \subseteq C \qquad (۱۳)$$

در نتیجه $(T_{z_۲}^* - z_۲) \cup (T_e^* - e)$ یک زیرمجموعه سه‌عضوی از $E(N)$ است که اجتماعی از هم‌دورهای $M\backslash\{e, z_۲\}$ می‌باشد. این زیر مجموعه سه‌عضوی باید در یک کلاس سری مثل S از $M\backslash\{e, z_۲\}$ مشمول باشد، در غیراین‌صورت اجتماعی از هم‌طوقه‌های $M\backslash\{e, z_۲\}$ خواهد بود. بنابراین $M^*|(T_e^* \cup T_{Z_۲}^*) \cong U_{۲,۵}$ و به این تناقض می‌رسیم که M/e، ۳–همبند است، چون با مینور–مینیمال بودن M در تناقض است. پس $M\backslash\{e, z_۲\}$ دوری مثل D دارد که شامل S و یک عضو از $E(N) - S$ می‌باشد. اما $|E(N)| = ۴$، بنابراین $E(N) \subseteq D$. بنابه (۵)، $|E(M)| \geq ۱۰$. بنابراین بنابه لم ۸.۳.۳، D یک دور فراگیر از M است.

حال نشان می‌دهیم

$$|U| \geq ۳ \qquad (۱۴)$$

حال N یک مینور از $M\backslash e/z_۲$ است، بنابراین بنابه نکته ۵.۲.۴ داریم $N = M\backslash e/z_۲\backslash I^*/I$، که در

آن I مستقل و I^* در $M\backslash e/z_۲$ هم‌مستقل است. بنابراین بنا به ۶.۲.۴،

$$r(N) = r(M\backslash e/z_۲) - |I| = r(M) - ۱ - |I|$$

اما N یک دور ۴–عضوی است، بنابراین $r(N) = ۳$. درنتیجه

$$r(N) = r(M) - ۱ - |I|$$

$$|I| = r(M) - r(N) - ۱ = r(M) - ۴$$

فرض کنیم $I^* \cap D = \emptyset$. دراین‌صورت $D - E(N) \subseteq I$. اما

$$|D - E(N)| = |D| - |E(N)| = (r(M) + ۱) - ۴ = r(M) - ۳$$

این تناقض نتیجه می‌دهد که $I^* \cap D \neq \emptyset$. بنابراین اگر $f \in I^* \cap D$، آن‌گاه N یک مینور از $M\backslash f$ است. اما چون f در دور D قرار دارد و N نیز یک دور است، نتیجه می گیریم که N مینوری از M/f است. بنابراین $f \in U$. چون $f \notin \{e, z_۲\}$، نتیجه می‌گیریم که $|U| \geq ۳$.

e' را از $U - \{e, z_۲\}$ طوری انتخاب می‌کنیم که‌در صورت امکان، $e' \notin D$. حال نشان می‌دهیم که

$$T^*_{e'} \cap C = \emptyset \qquad (۱۵)$$

فرض می‌کنیم چنین نباشد. چون $e' \notin T^*_e \cup z_۲$ و $C \subseteq T^*_e \cup z_۲$، بنابه خاصیت تعامد، $T^*_{e'} \cap C = T^*_{e'} - e'$. حال $e, z_۲ \notin T^*_{e'}$، بنابراین $T^*_{e'} - e' = T^*_{e'} \cap C \subseteq C - e \subseteq T^*_e - e$. بنابراین $M^*|_{(T^*_e \cup T^*_{e'})} \cong U_{۲,۴}$ و بنابراین M/e، ۳–همبند است، که یک تناقض است. درنتیجه (۱۵) برقرار است.

حال در بحث بالا از e' به جای e استفاده می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم که U شامل عضو $z'_۲$ است به‌طوری‌که $T^*_{z'_۲} \cap T^*_{e'} \neq \emptyset$ و M' یک دور مثل C' دارد به‌طوری که $\{z'_۲, e'\} \subseteq C' \subseteq T^*_{e'} \cup z'_۲$. بنابراین $|C' \cap E(N)| \leq ۲$ و بنابراین چون $|D \cap E(N)| = |E(N)| = ۴$، نتیجه می‌گیریم که $C' \nsubseteq D$. به‌علاوه $C' - \{e', z'_۲\} \subseteq E(N) \subseteq D$. بنابراین $e' \notin D$ یا $z'_۲ \notin D$. با توجه به چگونگی انتخاب e'، نتیجه می‌گیریم که $e' \notin D$. در نتیجه $D \cap \{e, z_۲, e'\} = \emptyset$. با ترکیب (۱۳) و (۱۵)، نتیجه می‌گیریم که

$$T^*_e \cap T^*_{e'} \cap T^*_{z_۲} = \emptyset \qquad (۱۶)$$

حال نشان می‌دهیم که

$$T^*_e \cap T^*_{e'} = \emptyset \qquad \text{یا} \qquad T^*_{e'} \cap T^*_{z_۲} = \emptyset \qquad (۱۷)$$

فرض می‌کنیم (۱۷) نادرست باشد. می‌دانیم که $(T^*_e - e) \cup (T^*_{z_۲} - z_۲)$ در یک کلاس سری S از $M\backslash\{e, z_۲\}$ مشمول است. حال $|(T^*_e - e) \cup (T^*_{z_۲} - z_۲)| = ۳$ و $|(T^*_e - e) \cap (T^*_{z_۲} - z_۲)| = ۱$. چون $T^*_{e'} - e'$ باید با هردوی $T^*_e - e$ و $T^*_{z_۲} - z_۲$ اشتراک داشته باشد، اما بنابه (۱۶) $T^*_{e'} - e'$ اشتراکی با $(T^*_e - e) \cap (T^*_{z_۲} - z_۲)$ ندارد، نتیجه می‌گیریم که $T^*_{e'} - e' \subseteq (T^*_e - e) \cup (T^*_{z_۲} - z_۲)$. بنابراین e' یک هم‌طوقه از $M\backslash\{e, z_۲\}$ است، یا $e' \in S$. در حالت اول، $\{e', e, z_۲\}$ یک سه‌تایی از M است که اشتراکی با دور فراگیر D ندارد، که این یک تناقض است. در نتیجه $e' \in S$. بنابراین در $M\backslash\{e, z_۲\}\backslash e'$، اعضای $(T^*_e - e) \cup (T^*_{z_۲} - z_۲)$ هم‌طوقه هستند. اما این هم‌طوقه‌ها مشمول در D هستند، که یک دور از $M\backslash\{e, z_۲\}\backslash e'$ می‌باشد، که این یک تناقض است. پس نتیجه می‌گیریم که

(۱۷) برقرار است. ■

برای کامل کردن اثبات لم ۷.۳.۴، باید نشان دهیم که $E(M) - D \subseteq \{e', e, z_۲\}$. حال $D \cap \{e', e, z_۲\} = \emptyset$ و D یک دور فراگیر از M است. چون هر کدام از $T^*_{e'} - e'$، $T^*_e - e$ و $T^*_{z_۲} - z_۲$ اجتماعی از هم‌دورهای $M\backslash\{e', e, z_۲\}$ هستند که مشمول در D می‌باشند، نتیجه می‌گیریم که هر کدام از $T^*_{e'} - e'$، $T^*_e - e$ و $T^*_{z_۲} - z_۲$ یک هم‌دور از $M\backslash\{e', e, z_۲\}$ است. بنابه (۱۷)، دو تا از این ۲—هم‌دورها جدا از هم هستند و بنابراین اجتماع آن‌ها $E(N)$ می‌باشد. چون $|(T^*_e - e) \cap (T^*_{z_۲} - z_۲)| = ۱$، نتیجه می‌گیریم که سومین ۲—هم‌دور با آن دو تای دیگر اشتراک دارد. بنابراین $E(N)$ مشمول در یک کلاس سری از $M\backslash\{e', e, z_۲\}$ است. فرض کنیم $f \in E(M) - D - \{e', e, z_۲\}$. دراین‌صورت چون D در M فراگیر است، دوری از $M\backslash\{e', e, z_۲\}$ وجود دارد که شامل f است. به‌علاوه این دور ممکن است طوری انتخاب شده باشد که از $E(N)$ مجزا باشد، زیرا $E(N)$ مشمول در یک کلاس سری از $M\backslash\{e', e, z_۲\}$ است که مشمول در D می‌باشد. نتیجه می‌گیریم که f یک طوقه از $M\backslash\{e', e, z_۲\}/(D - E(N))$ است. چون $N = M/(D - E(N))\backslash(E(M) - D)$، بنابه لم ۷.۳.۳، نتیجه می گیریم که f یک هم‌طوقه از$M\backslash\{e', e, z_۲\}/(D - E(N))$ است، که یک تناقض است. پس نتیجه می‌گیریم که ۷.۳.۴، برقرار است. ■

فرض کنیم D یک دور فراگیر در M باشد که وجود آن بنابه (۷.۳.۴)، تضمین شده است. فرض کنیم $E(M) - D = \{f, g, h\}$، که در آن $T^*_h \cap T^*_g = \emptyset$. فرض کنیم $M' = M/(D - E(N))$. دراین‌صورت $(M')^*$ یک متروید از رتبه چهار است که در آن T^*_f مثلثی است که به هر کدام از

مثلث‌های T_g^* و T_h^* از طریق اتصال موازی در نقاط متفاوتی وصل می‌شود. این نتیجه می‌دهد که M' همبند است، به‌طوری‌که $T_g^* - T_f^*$ و $T_h^* - T_f^*$ کلاس‌های موازی دوعضوی مجزا از M' هستند، و M' هیچ کلاس موازی غیربدیهی دیگری ندارد. حال فرض کنیم Z یک زیرمجموعه مینیمال از $D - E(M)$ باشد به‌طوری که $M/(D - (E(N) \cup Z))$ هیچ کلاس موازی غیربدیهی ندارد. این امکان دارد، زیرا $M/(D - (E(N))$ دقیقاً دو کلاس موازی غیربدیهی، هرکدام با دقیقاً دو عضو دارد، به‌طوری که $|Z| \leq$ ۲. فرض می‌کنیم $M'' = M/(D - (E(N) \cup Z))$. دراین‌صورت برای هر x در $\{g, h\}$، کلاس موازی $T_x^* - T_f^*$ از $M/(D - E(N))$ مشمول در مثلث T_x از M'' است.

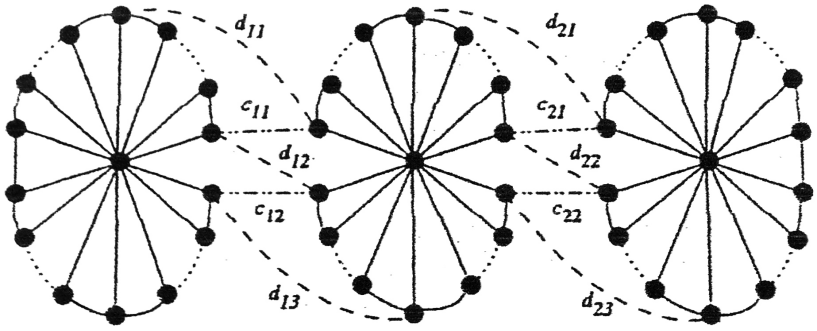
حال نشان می‌دهیم که M''، ۳− همبنداست. بنابه لم ۷.۳.۳، چون M''، هم طوقه‌ای ندارد، لذا M'' همبند است. به‌علاوه چون $M/(D - E(N))$ هم‌ساده است، بنابراین M'' نیز هم‌ساده است، و وقتی که $M/(D - E(N))$ دقیقاً دو ۲−دور داردکه هیچ کدام از آن‌ها یک ۲− دور از M'' نیست، نتیجه می‌گیریم که M'' ساده است. بنابراین M'' هیچ ۲−جداسازی غیربدیهی ندارد. فرض کنیم $\{X, Y\}$ یک ۲−جداسازی از M'' باشد. دراین‌صورت $min\{|X|, |Y|\} \geq$ ۳. حال $E(M'') = T_f^* \cup T_g \cup T_h$. دراین‌صورت X یا Y، مثلاً X، حداقل با دو تا از T_f^*، T_g و T_h در حداقل دو عضو اشتراک دارد. بنابه تقارن، می‌توانیم فرض کنیم $|X \cap T_g| \geq$ ۲. همچنین می‌توانیم فرض کنیم X در هر دوی M'' و $(M'')^*$ بسته است. بنابراین $T_g \subseteq X$ و چون $|T_g \cap T_g^*| =$ ۲، نتیجه می‌گیریم که $T_g^* \subseteq X$. توجه می‌کنیم که $|X \cap T_h| \not\geq$ ۲، درغیراین‌صورت $T_h^* \cup T_h \subseteq X$ و $|Y| \leq$ ۱، که یک تناقض است. لذا $|X \cap T_f^*| \geq$ ۲، بنابراین $T_f^* \subseteq X$. در نتیجه $Y \subseteq T_h$ و چون $|Y| \geq$ ۳، نتیجه می‌گیریم که $Y = T_h$ و T_h و T_g متمایز می‌باشند. بنابراین $r(M'') =$ ۵ و لذا

$r(X) = r(M'') + ۱ - r(Y) = ۴$. بنابراین T_h یک سه‌تایی از M'' است و در نتیجه یک سه‌تایی از M می‌باشد. لذا $M^*|(T_h \cup T_h^*) \cong U_{۲,۴}$، بنابراین M/h، ۳−همبند است، که یک تناقض است. پس نتیجه می‌گیریم که M''، ۳−همبند است.

چون M''، N را به‌عنوان یک مینور دارد و یک مینور ۳−همبند از M است، نتیجه می‌گیریم که $M'' = M$. اما $|E(M'')| \leq ۹$، در حالی که بنابه (۵)، $|E(M)| \geq ۱۰$. این تناقض اثبات قضیه ۱.۳.۴ را کامل می‌کند. ■

حال یک مثال برای قضیه ۱.۳.۴ ارائه می‌کنیم

مثال ۸.۳.۴ شکل زیر را در نظر بگیرید.



شکل ۴.۴

نشان می‌دهیم که برای هر عدد صحیح n که بزرگتر از یک می باشد، تعداد نامتناهی مترویدِ N که در حکم قضیه ۱.۳.۴ صدق می کند، وجود دارد، به‌طوری‌که $\lambda_۲(N) = n$. در حقیقت اگر فقط نیاز داشته باشیم که M یک مینور یکریخت با N و نه مساوی N داشته باشد، مثال ما نشان خواهد داد که کران قضیه ۱.۳.۴، نمی‌تواند بهبود یابد. برای هر i در $\{۱, ۲, \ldots, n\}$، فرض کنیم G_i با چرخی یکریخت باشد که رأس های عضو محیطی آن در ترتیب دوری $v_{i۱}، v_{i۲}، \ldots، v_{i(۴m+۶)}$ قرار دارند، که در آن m عددی بزرگ در نظر گرفته شده است، مثلاً $m = ۱۰۰n$. فرض کنیم G از اجتماع رأس− مجزای گراف‌های $G_۱، G_۲، \ldots، G_n$، و برای همه مقادیر i در $\{۱, ۲, \ldots, n-۱\}$،با افزودن یال‌های $d_{i۱}، d_{i۲}، d_{i۳}، c_{i۱}، c_{i۲}$ و حذف یال‌های $v_{i۱}v_{i۲}$ و $v_{(i+۱)(۲m+۴)}v_{(i+۱)(۲m+۵)}$ که‌در آن $d_{i۱} = v_{i(m+۳)}v_{(i+۱)(۲m+۴)}$، $c_{i۱} = v_{i۲}v_{(i+۱)(۲m+۴)}$، $d_{i۲} = v_{i۲}v_{(i+۱)(۲m+۵)}$، $c_{i۲} = v_{i۱}v_{(i+۱)(۲m+۵)}$ ، $d_{i۳} = v_{i۱}v_{(i+۱)(۳m+۶)}$ تشکیل شده باشد. حال $M = M(G)$ و $N = M(H)$ را در نظر می‌گیریم که در آن

$$H = G \setminus \cup_{i=۱}^{n-۱}\{d_{i۱}, d_{i۲}, d_{i۳}\} / \cup_{i=۱}^{n-۱}\{c_{i۱}, c_{i۲}\}$$

برای حالت $n = ۳$، گراف G در شکل (۴.۴) نمایش داده شده است. باید نشان دهیم که M یک مترویدِ ۳−همبند مینور− مینیمال است که یک مینور یکریخت با N دارد. مشاهده می‌کنیم که در N، یال‌هایی که بر مرکز هر چرخ G_i واقع هستند، یک هم‌دور رأسی با $۴m + ۶$ عضو تشکیل می‌دهند. به‌علاوه برای همه مقادیر i در $\{۱, ۲, \ldots, n-۱\}$، دو رأسی که از یکی کردن رأس‌های انتهایی $c_{i۱}$ و $c_{i۲}$ در G حاصل می شوند، یک ۲− جداسازی از N ایجاد می‌کنند، و هر ۲−

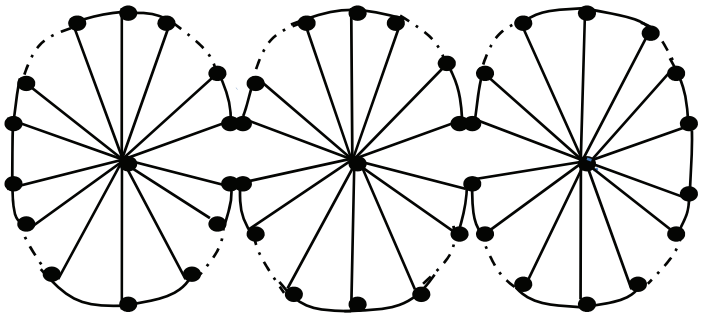
جداسازی N از این نوع است. برای به دست آوردن یک مینور از M که یکریخت با N باشد، باید همه $۵(n-۱)$ عضو را حذف و ادغام کنیم. فرض می‌کنیم $M \setminus D/C \cong N$. ابتدا باید نشان دهیم که $E(M) - E(N) = C \cup D$. اگر یک پره s از یکی از چرخ‌های G_i در C باشد، آن‌گاه $M(G/s)$ یک ۲−جداسازی دارد به‌طوری‌که در ۲− مجموع متناظر یکی از دو متروید یک شبکه سری−موازی با حداقل $m-۳$ عضو است. چون $m = ۱۰۰n$ و $|E(M) - E(N)| = ۵(n-۱)$، برای $M(G/s)$ امکان پذیر نیست که یک مینور یکریخت با N داشته باشد، در غیراین‌صورت N دارای یک ۲−جداسازی نیست. بنابراین هیچ پره از هر G_i در C نیست و به‌طور مشابه هیچ عضو محیطی از G_i در D نیست.

اگر برخی از پره‌های s از یکی از چرخ‌های G_i در D باشد، آن‌گاه $M(G \setminus s)$ دارای $n-۱$ هم‌دور رأسی با اندازه $۴m+۶$ است، یک هم‌دور رأسی با اندازه $۴m+۵$، و همه هم‌دورهای رأسی باقیمانده آن با اندازه حداکثر پنج هستند. اما N دقیقاً n هم‌دور رأسی با اندازه $۴m+۶$ دارد. چون $m = ۱۰۰n$، اما $|E(M) - E(N)| = ۵(n-۱)$، از ساختار N نتیجه می‌گیریم تنها راهی که بتوان برای N تعدادمورد نیاز هم‌دور رأسی با اندازه $۴m+۶$ به‌دست آورد، به‌وسیله ادغام یک پره از یکی از چرخ‌ها است، که قبلاً دیدیم غیر ممکن است. پس هیچ کدام از پره‌ها از هیچ G_i در D نیست. بنابراین هیچ‌کدام از اعضای محیطی هیچ G_i در C نیست. درغیراین‌صورت چون N ساده است، D باید شامل یک پره مجاور با این عضو محیطی باشد. پس نتیجه می‌گیریم $C \cup D = E(M) - E(N)$.

حال نشان می‌دهیم که

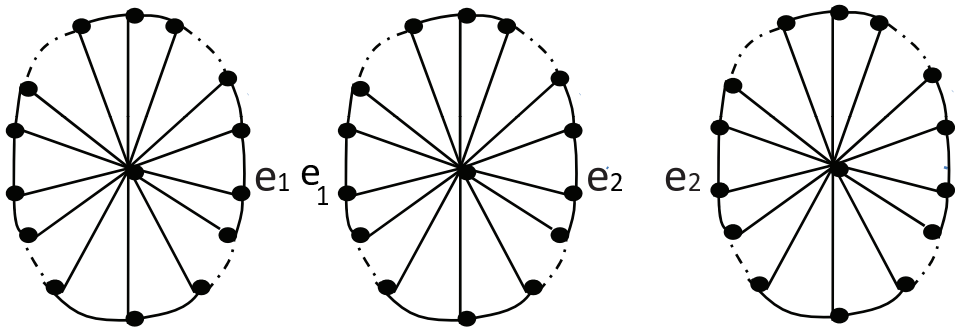
$$D = \cup_{i=۱}^{n-۱}\{d_{i۱}, d_{i۲}, d_{i۳}\} \quad و \quad C = \cup_{i=۱}^{n-۱}\{c_{i۱}, c_{i۲}\} \quad .$$

دنباله $d_{i۱}، c_{i۱}، d_{i۲}، c_{i۲}، d_{i۳}$ را در نظر می گیریم . حذف دو عضو متوالی این دنباله از M یک مترویدِ با یک ۲− جداسازی باقی می‌گذارد که یک طرف آن متناظر با یک شبکه سری −موازی با حداقل $۲m$ عضو است. این نتیجه می‌دهد که این مترویدِ نمی‌تواند یک مینور یکریخت با N داشته باشد. بنابراین هیچ دو عضو متوالی از $d_{i۱}، c_{i۱}، d_{i۲}، c_{i۲}، d_{i۳}$ در D نیست. واضح است که D نمی‌تواند شامل چهار عضو یا بیشتر از $d_{i۱}، c_{i۱}، d_{i۲}، c_{i۲}، d_{i۳}$ باشد. بنابراین D شامل حداکثر سه عضو از چنین اعضایی است. از ساختار M، نتیجه می‌گیریم که در M، D هم− مستقل و C مستقل است، پس $|C| = r(M) - r(N) = ۲(n - ۱)$. بنابراین C شامل دقیقاً دو عضو از هر مجموعه $\{d_{i۱}, c_{i۱}, d_{i۲}, c_{i۲}, d_{i۳}\}$ است، در غیراین‌صورت D شامل حداقل چهار عضو از چنین مجموعه‌ای خواهد بود. چون هیچ دو عضو متوالی از $d_{i۱}، c_{i۱}، d_{i۲}، c_{i۲}، d_{i۳}$ در D نیست، نتیجه می‌گیریم که $\{d_{i۱}, d_{i۲}, d_{i۳}\} \subseteq D$ و $\{c_{i۱}, c_{i۲}\} \subseteq C$. بنابراین $D = \cup_{i=۱}^{n-۱}\{d_{i۱}, d_{i۲}, d_{i۳}\}$ و $C = \cup_{i=۱}^{n-۱}\{c_{i۱}, c_{i۲}\}$. در نتیجه تنها مینوری از M که با N یکریخت است، خود N است. حذف هر یک از $d_{i۱}، d_{i۲}، d_{i۳}$ یا انقباض هر یک از $c_{i۱}$ و $c_{i۲}$ از M مترویدی تولید می‌کند که ۳− همبند نیست و هیچ مینور ۳− همبندی ندارد که دارای یک مینور یکریخت با N باشد. بنابراین واضح است N یک مترویدِ مینور− مینیمال است که یک مینور یکریخت با N دارد. نتیجه می‌گیریم که حتی اگر مجاز باشیم که N را با کپی یکریختی از آن جایگزین کنیم، نمی‌توانیم کران قضیه ۱.۳.۴ را دقیق تر کنیم.



(a)

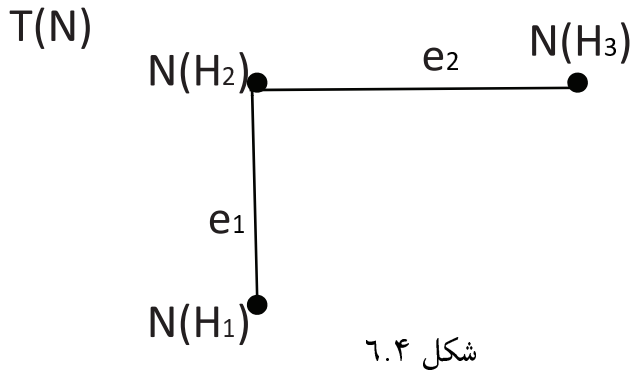
M(H)



H1 H2 H3

(b)

شکل ۵.۴



شکل ۶.۴

مشاهده می‌کنیم که $N = M(H)$ است در شکل (a) ۵.۴ نمایش داده شده‌است. درخت $T(N)$ در شکل ۶.۴ در حکم قضیه ۱.۱.۲ صدق می کند که در آن H_1 و H_2 وH_3 در شکل (b) ۵.۴ نمایش داده شده‌اند، در حالت $n = ۳$ داریم، $\lambda_۲(N) = ۳$. بنابراین بنابه قضیه ۱.۳.۴، $|E(M)| - |E(N)| \leq ۵(\lambda_۲(N) - ۱) = ۵(n - ۱)$،در نتیجه : $|E(M)| - |E(N)| \leq ۱۰$.

فصل ۵

یـ کران کلی

دراین فصل، نتیجه اصلی از فصل قبل را با برخی نتیجه‌های اکسترمال برای مترویدهای همبند ترکیب می‌کنیم، تا کران روی $|E(M)|$ را تنها بر حسب $|E(N)|$ ثابت کنیم، که در آن M یک مترویـد ۳–همبند مینور–مینیمال است که N را به‌عنوان یک مینور دارد. با یادآوری یک مدل مشابه از قضیه اصلی برای حالتی که تنها به همبند بودن M نیاز داریم شروع می‌کنیم.

در مرجع [٦] ثابت شده است که اگر N یک مترویـد با k مؤلفه همبند باشد و M یک مترویـد همبند مینور–مینیمال باشد که N را به‌عنوان یک مینور دارد، آن‌گاه $|E(M)| - |E(N)|$ حداکثر برابر $2k - 2$ است، مگر اینکه N یا دوگان آن آزاد باشند، که در این حالت خواهیم داشت $|E(M) - E(N)| \leq k - 1$.

۱.۵ نتایج اصلی

اثبات دو لم زیر در منبع [٦] آمده است.

لم ۱.۱.۵ فرض می کنیم N یک مترویدِ ناتهی و M مترویدِ همبندِ مینور– مینیمال باشد به‌طوری‌که N را به عنوان یک مینور دارد. دراین‌صورت $|E(M) - E(N)| \leq ۲\lambda_۲(N) - ۲$.

برهان : به [[٦] لم ۳.۲] مراجعه شود. ■

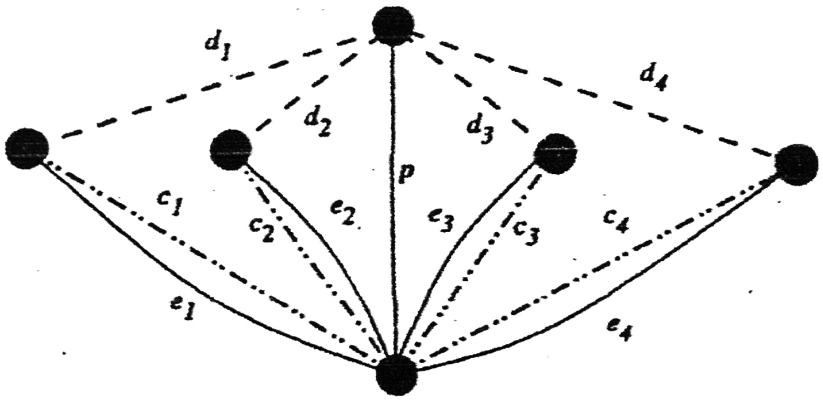
لم ۲.۱.۵ فرض می کنیم N یک مترویدِ ناتهی باشد. اگر M یک مترویدِ همبندِ مینور– مینیمال باشد به‌طوری‌که N را به عنوان یک مینور دارد، آن‌گاه : $|E(M)| \leq ۳|E(N)| - ۲$.

برهان : به [[٦] لم ۴.۲] مراجعه شود. ■

مثال ۳.۱.۵ برای همه مقادیر i در $\{۱, ۲, \ldots, n\}$، فرض کنیم M_i یک مترویدِ دوری از گرافی باشد که آن گراف از مثلث $\{p, d_i, c_i\}$ با افزودن یال e_i که موازی با c_i است به دست می آید. فرض می‌کنیم M اتصال موازی مترویدهای $M_۱، M_۲، \ldots، M_n$ با نقطه پایه p باشد و فرض می‌کنیم $N = M \setminus \{d_۱, d_۲, \ldots, d_n\}/\{c_۱, c_۲, \ldots, c_n\}$.

وقتی‌که $n = ۴$ باشد، مترویدِ M یک مترویدِ دوری از گراف شکل (۱.۵) است، به‌طوری‌که یال‌های حذف شده آن به‌صورت خطوط بریده و یال‌های ادغام شده آن به‌صورت نقطه چین و خطوط بریده هستند. مشاهده می‌کنیم که $N = N(G_۱)$ جمع مستقیم n طوقه $e_۱، e_۲، \ldots، e_n$ و هم‌طوقه p است که در شکل (b) نمایش داده شده است. بنابراین $|E(N)| = n + ۱$. به‌علاوه، $|E(M)| = ۳n + ۱ = ۳|E(N)| - ۲$. پس M یک مثال اکسترمال برای لم ۲.۱.۵ است مشروط بر این که M یک مترویدِ همبندِ مینور– مینیمال باشد که N یک مینور آن است. برای این که e_i و نه p یک طوقه در یک مینور از M باشد، باید اعضای d_i را حذف و اعضای c_i را ادغام کنیم. حذف d_i و

یا ادغام c_i از M مترویدی تولید می‌کند که در شکل (c) و (d) نمایش داده شده‌است، این مترويد یک مؤلفه مشمول در $\{e_i, c_i\}$ دارد و بنابراین ناهمبند است. بنابراین این مثال نشان می‌دهد که کران لم ۲.۱.۵ دقیق است.

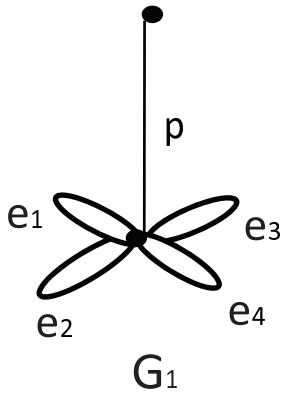


شکل ۵ .۱ یک مثال اکسترمال برای لم ۲.۱.۵

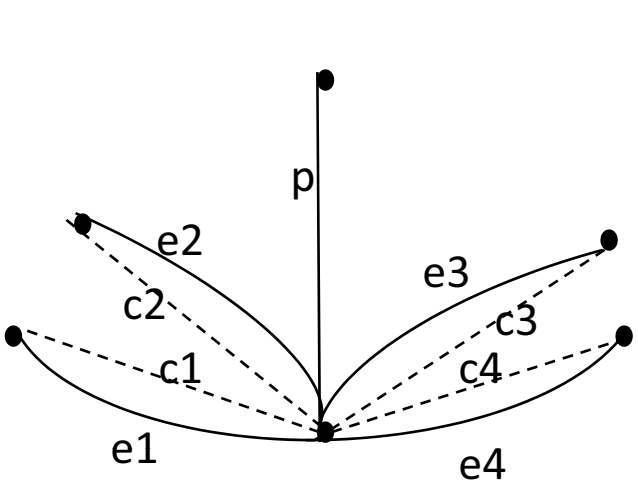
در شکل (b) گراف G_1 نمایش داده شده‌است که با حذف d_i ها و ادغام c_i ها به دست آمده است. مشاهده می کنیم:

$$|E(N)| = n + ۱ = ۵, \qquad |E(M)| = ۳n + ۱ = ۳|E(N)| - ۲ = ۱۳.$$

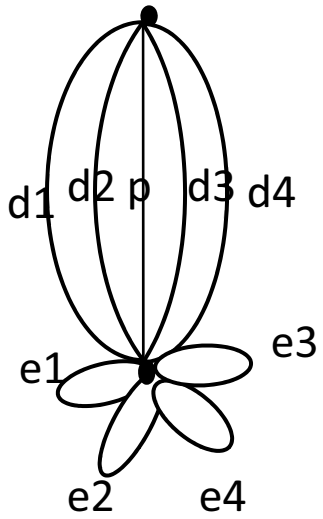
(b)



گراف حاصل از ادغام c_i ها در شکل (d) نمایش داده شده‌است و گراف حاصل از خذف d_i ها در شکل (c) نمایش داده شده‌است.



(C)



(d)

لم ۴.۱.۵ اگر M یک مترویدِ همبند باشد به‌طوری‌که $|E(M)| \geq ۳$، آن‌گاه $\lambda_۲(M) \leq |E(M)| - ۲$.

برهان : حکم را به استقرا روی $|E(M)|$ ثابت می‌کنیم. اگر $|E(M)| = ۳$، آن‌گاه M با $U_{۱,۳}$ یا $U_{۲,۳}$ یکریخت است و لم برقرار است.

فرض می‌کنیم که $|E(M)| \geq ۴$. اگر M، $۳-$ همبند باشد، آن‌گاه حکم برقرار است. بنابراین

می‌توانیم فرض کنیم که M، ۳− همبند نیست. دراین‌صورت مترویدهای M_1 و M_2 وجود دارند به‌طوری‌که $M = M_1 \oplus_2 M_2$. بنا به فرض استقرا، داریم که برای هر $i \in \{1, 2\}$، $\lambda_2(M_i) \leq |E(M_i)| - 2$. پس

$$\lambda_2(M) = \lambda_2(M_1) + \lambda_2(M_2) \leq |E(M_1)| + |E(M_2)| - 4$$

بنابراین حکم برقرار است، زیرا $|E(M)| = |E(M_1)| + |E(M_2)| - 2$. ■

قضیه ۵.۱.۵ فرض می‌کنیم N یک مترویدِ غیرتهی باشد. اگر M یک مترویدِ ۳− همبند مینور− مینیمال باشد که N را به‌عنوان یک مینور دارد، آن‌گاه: $|E(M)| \leq 18|E(N)| - 27$

برهان : فرض کنیم N' یک مترویدِ مینور− مینیمال همبند و یک مینور M باشد به‌طوری‌که N را به‌عنوان یک مینور دارد. با استفاده از لم ۲.۱.۵ و ۴.۱.۵ داریم:

$$\lambda_2(N') \leq |E(N')| - 2 \leq 3|E(N)| - 4$$

با استفاده از قضیه ۱.۳.۴ داریم:

$$|E(M)| - |E(N')| \leq 5(\lambda_2(N') - 1) \leq 15|E(N)| - 25$$

و بنابراین حکم با استفاده از لم ۲.۱.۵ ثابت می‌شود. ■

فصل ٦

اثبات قضیه اصلی

قضیه اصلی در فصل ۴ در حالتی که N همبند است ثابت شده است. در این فصل، اثبات قضیه اصلی را در حالت کلی کامل می‌کنیم. ابزار اصلی در اثبات، به غیر از قضیه ۱.۳.۴، لم ۱.۱.٦ می‌باشد.

۱.٦ نتایج نهایی

لم ۱.۱.٦ فرض کنیم N یک مترویدِ ناتهی باشد و M یک مترویدِ همبند مینور− مینیمال باشد که N را به‌عنوان یک مینور دارد. دراین‌صورت

$$\lambda_۲(M) \leq ۴(\lambda_۱(N) - ۱) + \lambda_۲(N)$$

برهان : فرض می‌کنیم قضیه برقرار نیست و (M, N) را مثال نقضی برای قضیه انتخاب می‌کنیم که نسبت به ترتیب الفبایی روی $(|E(M)|, -|E(N)|)$ مینیمال است. N' را به عنوان مینوری از

M انتخاب می‌کنیم به‌طوری‌که N' مینور− مینیمال است که N را به عنوان یک مینور دارد و در رابطه $\lambda_1(N') < \lambda_1(N)$ صدق می‌کند. با توجه به انتخاب N'، تنها یک مؤلفه H از N' وجود دارد به‌طوری که H مؤلفه‌ای از N نیست. فرض می‌کنیم X و Y زیرمجموعه‌های جدا از هم از اعضای H باشند به‌طوری‌که $N' \setminus X/Y = N$. اگر $z \in X \cup Y$، و N مینوری از هر دوی $N' \setminus z$ و N'/z باشد، آن‌گاه چون $\lambda_1(N' \setminus z) = \lambda_1(N')$ یا $\lambda_1(N'/z) = \lambda_1(N')$، یک تناقض با مینیمال بودن N' حاصل می‌شود. پس نتیجه می‌گیریم که مجموعه‌های X و Y منحصر بفردند. با در نظر گرفتن دوگان در صورت لزوم، می‌توانیم فرض کنیم $X \neq \emptyset$. عضو e را از X انتخاب می‌کنیم.

حال مترویدِ $H \setminus e$ ناهمبند است، در غیراین‌صورت $\lambda_1(N' \setminus e) = \lambda_1(N')$ و لذا وجود مترویدِ $N' \setminus e$ با نحوه انتخاب N' تناقض دارد. بنابراین عضوی از $\Lambda^u_2(H)$ که شامل e است یک دور C با حداقل سه‌عضو است. اگر $(C \cap (X \cup Y)) - e$ ناتهی بوده و f در این مجموعه قرار داشته باشد، آن‌گاه f یک هم‌طوقه از $N' \setminus e$ خواهد بود که با این حقیقت که مجموعه‌های X و Y منحصربفردند، تناقض دارد. بنابراین $C \cap (X \cup Y) = \{e\}$. فرض می‌کنیم $C - e = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ که در آن $C \cap E(N) = \{e_{l+1}, e_{l+2}, \ldots, e_k\}$. دراین‌صورت $k \geq 2$. هر عضو از $C \cap E(N)$ یک هم‌طوقه از N است. در $T(H)$، یال‌های واقع بر رأس متناظر با C، e_1، e_2، $\ldots$، e_l هستند. یال‌های $T(H)$ را به جز e_1، e_2، $\ldots$، e_l یکی پس از دیگری ادغام می‌کنیم و رأسی که به وسیله ادغام هر یال g با $2-$ مجموع مترویدهایی که قبلاً نقاط انتهایی g را برچسب گذاری می‌کردند به‌دست می آید، دوباره برچسب گذاری می‌کنیم. در نتیجه این فرایند، فرض می‌کنیم H_i مترویدی متفاوت با C باشد که یکی از نقاط انتهایی یال e_i را برچسب گذاری می‌کند. چون نقطه انتهایی دیگر e_i به‌غیر از

C با دوری در $T(N)$ برچسب گذاری نشده بود، متروید $Hi \setminus ei$ همبند است. بنابراین مؤلفه‌های $H \setminus e$، $H_1 \setminus e_1$، $H_2 \setminus e_2$، ...، $H_l \setminus e_l$ همراه با $k-l$ هم‌طوقه روی e_{l+1}، e_{l+2}، ...، e_k هستند.

هر مؤلفه از $H \setminus e$ باید با $E(N)$ اشتراک داشته باشد. زیرا اگر مؤلفه‌ای وجود داشته باشد که از $E(N)$ مجزا باشد، آن‌گاه مجموعه‌های X و Y منحصر بفرد نخواهند بود. به‌علاوه، هر مؤلفه از $H \setminus e$ شامل اعضایی از فقط یک مؤلفه از N است، در غیراین‌صورت $N' \setminus e$، N را به‌عنوان یک مینور دارد که تعداد مؤلفه‌های آن از تعداد مؤلفه‌های N کمتر است. بنابراین

$$\lambda_1(N) = \lambda_1(N') + k - 1 \qquad (18)$$

یادآوری می‌کنیم که با توجه به دوگان می توانیم فرض کنیم $X \neq \emptyset$. حال نشان می‌دهیم که $|X| = 1$. فرض می‌کنیم $f \in X - e$. بدون این که از کلیت مسئله کاسته شود، می‌توانیم فرض کنیم $f \in E(H_1) - e_1$. اگر $H_1 \setminus f$ همبند باشد، آن‌گاه $H \setminus f$ نیز همبند است، بنابراین $\lambda_1(N' \setminus f) = \lambda_1(N')$، که با انتخاب N' متناقض است. بنابراین $H_1 \setminus f$ ناهمبند است. چون $H_1 \setminus f$ نمی‌تواند e_1 را به عنوان یک هم‌طوقه داشته باشد، زیرا $H_1 \setminus e_1$ همبند است، نتیجه می‌گیریم که $H_1 \setminus f, e_1$ ناهمبند است. چون $H_1 \setminus e_1$ شامل اعضایی فقط از یک مؤلفه N است، نتیجه می‌گیریم که $H_1 \setminus f, e_1$ دارای یک مؤلفه است که از $E(N)$ مجزا است؛ و این یک تناقض با این حقیقت است که مجموعه‌های X و Y منحصر بفردند. پس نتیجه می‌گیریم که چنین fای وجود ندارد، بنابراین $|X| = 1$. چون X با استفاده از دوگان ناتهی فرض شده است، ما در حقیقت نتیجه‌های زیر را ثابت کردیم.

نتیجه ٢.١.٦ اگر $X \neq \emptyset$، آن‌گاه $|X| = ١$.

نتیجه مستقیم آن این است:

نتیجه ٣.١.٦ اگر $Y \neq \emptyset$، آن‌گاه $|Y| = ١$.

نتیجه ٤.١.٦ اگر $X = \{e\}$ و $Y = \{f\}$، آن‌گاه $|C| = ٣$ و عضوی از $\Lambda^u_٤(H)$ که شامل f است، هم‌دور ٣− عضوی C^* است.

می توانیم فرض کنیم $f \in E(H_١) - e_١$. دراین‌صورت $H_١/f$ ناهمبند است، زیرا در غیراین‌صورت N'/f متناقض با انتخاب N' خواهد بود. به‌علاوه $H_١/f \setminus e_١$ همبند است، زیرا در غیراین‌صورت $H_١/f \setminus e_١$ دارای یک مؤلفه است که از $E(N)$ مجزا است و بنابراین منحصر بفرد بودن X و Y نقض می‌شود. درنتیجه عضوی از $\Lambda^u_٤(H)$ که شامل f است، یک هم‌دور ٣− عضوی C^* است به‌طوری‌که شامل $e_١$ نیز می‌باشد. با توجه به دوگان عضوی از $\Lambda^u_٤(H)$ که شامل e است، یعنی C نیز دارای سه عضو است. بنابراین نتیجه ٤.١.٦ برقرار است. ■

با توجه به چگونگی انتخاب (M, N)، حکم لم ١.١.٦ برای (M, N') برقرار است و لذا

$$\lambda_٢(M) \leq ٤(\lambda_١(N') - ١) + \lambda_٢(N')$$

با توجه به رابطه (١٨) و این نامساوی داریم:

$$\lambda_٢(M) \leq ٤(\lambda_١(N) - ١) + \lambda_٢(N') - ٤(k - ١) \qquad (١٩)$$

با توجه به دوگان، نتیجه ٢.١.٦ و ٣.١.٦ دو حالت زیر را داریم:

(الف) $|X| = ١$ و $|Y| = ٠$، یا

(ب) $|X| = ١$ و $|Y| = ١$.

در حالت (الف) داریم:

$$\lambda_{۲}(N') - \lambda_{۲}(N) = \lambda_{۲}(H) - \lambda_{۲}(H \setminus X/Y) = \left(|C| - ۲ + \sum_{i=۱}^{l} \lambda_{۲}(H_i) \right)$$

$$- \left(k - l + \sum_{i=۱}^{l} \lambda_{۲}(H_i \setminus e_i) \right) = l - ۱ + \sum_{i=۱}^{l} (\lambda_{۲}(H_i) - \lambda_{۲}(H_i \setminus e_i)),$$

که‌درآن $|C| = k + ۱$. حال، می دانیم که

$$\lambda_{۲}(H_i) - \lambda_{۲}(H_i \setminus e_i) \leq ۱$$

برای همه مقادیر i برقرار است. بنابراین

$$\lambda_{۲}(N') - \lambda_{۲}(N) \leq ۲l - ۱ \leq ۲k - ۱$$

با ترکیب این نامساوی با نامساوی (۱۹) خواهیم داشت :

$$\lambda_{۲}(M) \leq ۴(\lambda_{۱}(N) - ۱) + \lambda_{۲}(N) - ۲k + ۳$$

و این یک تناقض با این حقیقت است که (M, N) یک مثال نقض برای لم می‌باشد، زیرا $k \geq ۲$. درنتیجه (الف) برقرار نیست.

در حالت (ب) بنا به نتیجه ۴.۱.٦، $|C| = |C^*| = ۳$. بنابراین $k = ۲$. همانند قبل، فرض می‌کنیم $C = \{e, e_{۱}, e_{۲}\}$ و $C^* = \{f, e_{۱}, e'_{۱}\}$. ابتدا فرض می‌کنیم $\{e_{۲}, e'_{۱}\} \subseteq E(N)$. دراین حالت، $e_{۲}$ یک هم‌طوقه و $e'_{۱}$ یک طوقه از N است و $H \setminus X/Y$ جمع مستقیم از طوقه $e'_{۱}$ و هم‌طوقه $e_{۲}$ می‌باشد. در این حالت، $\lambda_{۲}(N) = \lambda_{۲}(N')$. با جایگزین کردن این عبارت در (۱۹)،

به این تناقض می‌رسیم که (M, N) یک مثال نقض برای لم نیست. حال می توانیم فرض کنیم $|\{e_۲, e'_۱\} \cap E(N)| \leq ۱$. با توجه به دوگان در صورت لزوم، می‌توانیم فرض کنیم $e'_۱ \notin E(N)$. حال $H_۱ \setminus e_۱$ همبند است و $N = N' \setminus e/f$. بنابراین

$$\lambda_۲(H) = ۲ + \lambda_۲(H_۱ \setminus e_۱) + \sum_{i=۲}^{l} \lambda_۲(H_i)$$

و

$$\lambda_۲(H \setminus X/Y) = ۲ - L + \lambda_۲(H_۱ \setminus e_۱/f) + \sum_{i=۲}^{l} \lambda_۲(H_i \setminus e_i)$$

بنابراین

$$\lambda_۲(N') - \lambda_۲(N) = \lambda_۲(H) - \lambda_۲(H \setminus X/Y) = \lambda_۲(H_۱ \setminus e_۱) - \lambda_۲(H_۱ \setminus e_۱/f)$$

$$+l + \sum_{i=۲}^{l} (\lambda_۲(H_i) - \lambda_۲(H_i \setminus e_i))$$

حال هر مؤلفه از $H_۱ \setminus e_۱/f$ باید با $E(N)$ اشتراک داشته باشد، در غیراین‌صورت X و Y منحصربفرد نیستند. بنابراین $H_۱ \setminus e_۱/f$ همبند است، زیرا درغیراین‌صورت $N' \setminus e/f$ با انتخاب N' متناقض است، زیرا N' تعداد مؤلفه‌های کمتری نسبت به تعداد مؤلفه‌های N دارد و نیز N یک مینور آن است. بنابراین

$$\lambda_۲(H_۱ \setminus e_۱) - \lambda_۲(H_۱ \setminus e_۱/f) \leq ۱$$

به طور مشابه، برای هر i در $\{۲,\dots,l\}$ داریم:

$$\lambda_۲(H_i) - \lambda_۲(H_i \setminus e_i) \leq ۱$$

بنابراین

$$\lambda_۲(N') - \lambda_۲(N) \leq ۲L \leq ۲k = ۴$$

با جایگزین کردن این نامساوی در (۱۹) به‌دست می‌آوریم

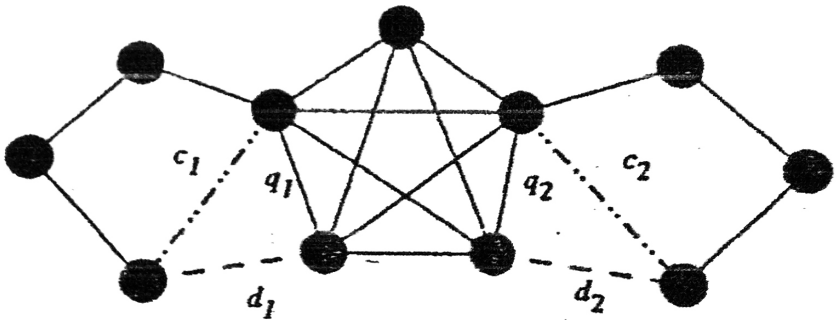
$$\lambda_۲(M) \leq ۴(\lambda_۱(N) - ۱) + \lambda_۲(N) + ۴ - ۴(k - ۱)$$

چون $k = ۲$، به تناقض می‌رسیم و این تناقض اثبات را کامل می‌کند. ■

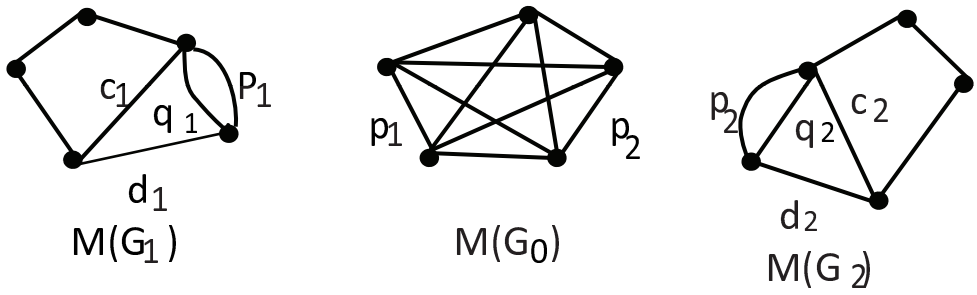
برای مشاهده این‌که کران ارائه شده در لم قبلی دقیق است، مثال زیر را بررسی می‌کنیم

مثال ۵.۱.٦ برای هر i در $\{۱, ۲, \dots, n\}$، فرض می‌کنیم G_i گرافی با ۷− یال باشد که شامل یک ۵−دور C_i با دو وتر c_i و q_i است، که‌درآن c_i مثلث $\{c_i, p_i, d_i\}$ را با استفاده از دو یال C_i می‌سازد، و q_i موازی p_i است. فرض می‌کنیم $G_۰$ گرافی باشد که با $K_{n+۳}$ یکریخت است و $P_۱$، $P_۲$،...، P_n یال‌های آن می‌باشند. مترویدِ M از $M(G_۰)$ با اتصال $M(G_۱)$، $M(G_۲)$، ... و $M(G_n)$ از طریق عمل ۲− مجموع به ترتیب در $P_۱$، $P_۲$،...، P_n حاصل می‌شود. فرض می‌کنیم $N = M \setminus \{d_۱, d_۲, \dots, d_n\}/\{c_۱, c_۲, \dots, c_n\}$. برای حالت $n = ۲$، مترویدِ M می‌تواند مترویدِ دوری گراف شکل (۱.٦) باشد، که در آن یال‌های حذف شده با خطوط بریده و یال‌های ادغام شده، به صورت نقطه چین و خطوط بریده نشان داده شده‌اند. مشاهده می‌کنیم که M یک مترویدِ همبند

مینور– مینیمال است که N را به عنوان یک مینور دارد. به‌علاوه $\lambda_1(N) = \lambda_2(N) = n + 1$، در حالی که برای همه مقادیر $i \geq 1$، $\lambda_2(M(G_i)) = 5$. بنابراین $\lambda_2(M) = 5n + 1$. حال نشان می‌دهیم که این مثال در کران تعریف شده در لم ١.١.٦ صدق می‌کند.

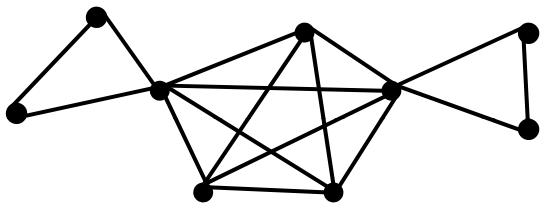


شکل ١.٦یک مثال اکسترمال برای لم ١.١.٦



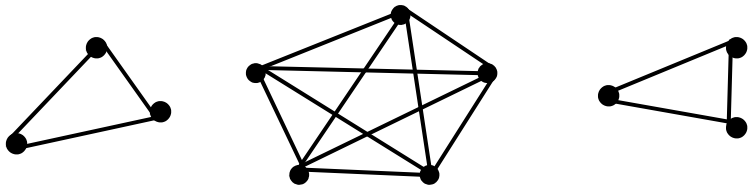
مشاهده می‌کنیم که M از طریق ٢–مجموع از این سه متروید حاصل می‌شود.

حال مترویدِ N را که یک مینور مترویدِ M است، می‌سازیم به‌طوری‌که $N = M\backslash\{d_1, d_2\}/\{c_1, c_2\}$.



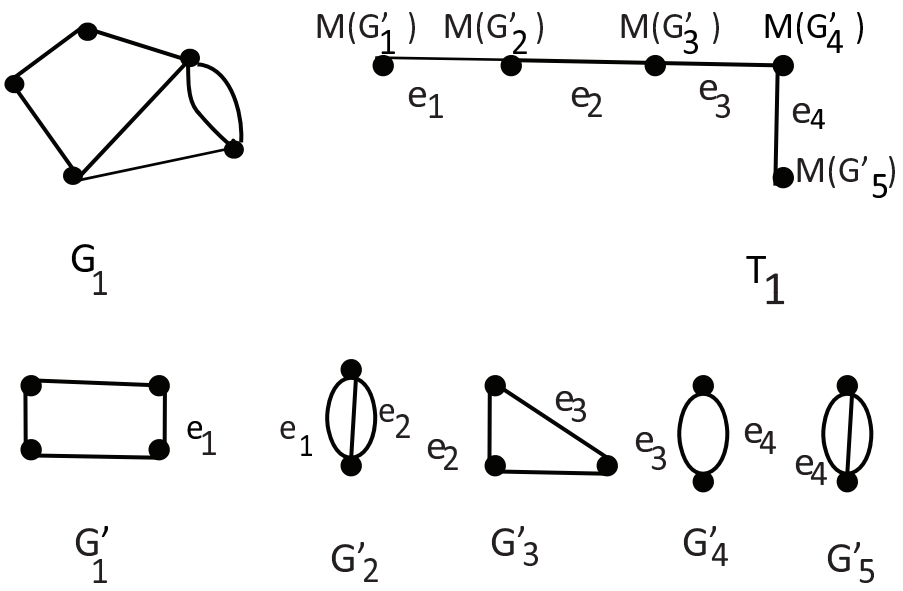
N=N(H)

مشاهده می‌کنیم که $\lambda_1(N) = 3$، حال مشاهده می‌کنیم که جمع مستقیم مترویدهای دوری $N(H'_1)$، $N(H'_2)$ و $N(H'_3)$ برابر مترویدِ N است. بنابراین $\lambda_2(N) = 3$.

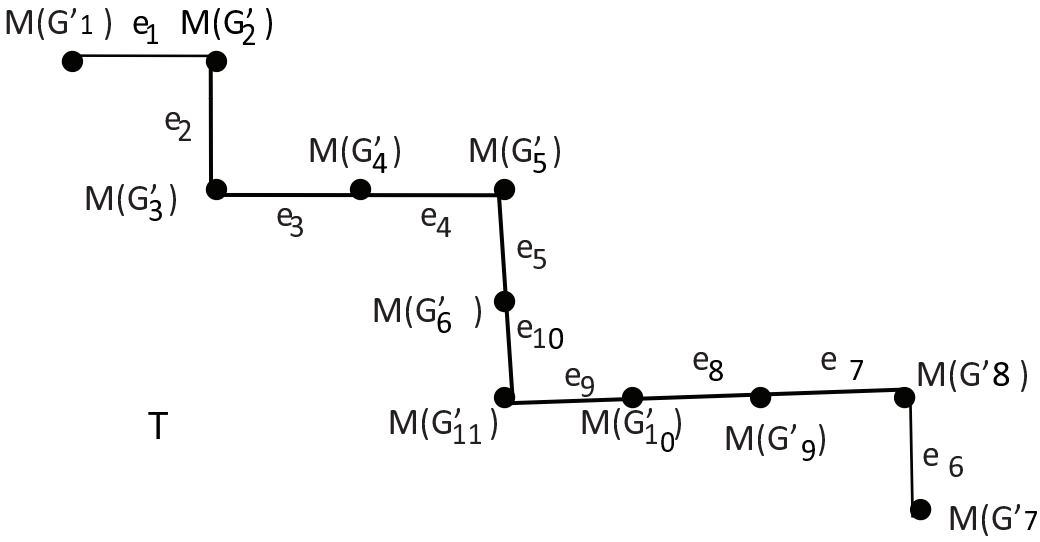


N(H'1) N(H'2) N(H'3)

برای مترویدِ $M(G_1)$، یک تجزیه درختی T_1 می‌سازیم که در حکم قضیه ۱.۱.۲ صدق می‌کند که در آن G'_1، G'_2، G'_3، G'_4 و G'_5 در شکل نمایش داده شده‌اند.



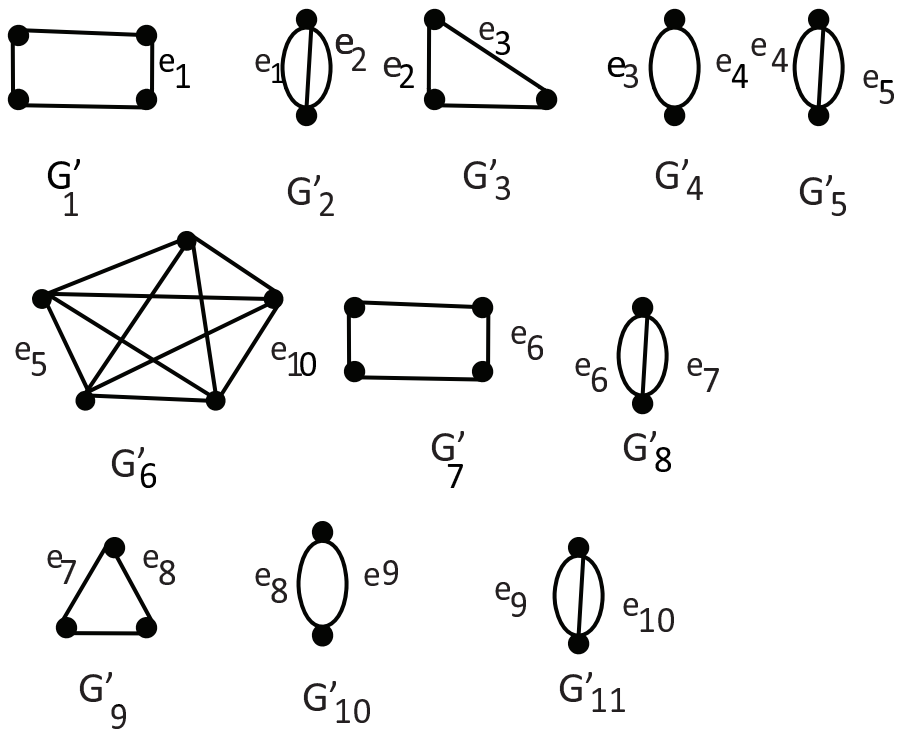
بنابراین مشاهده می‌کنیم که $\lambda_2(M(G_1)) = 5$، به‌طور مشابه برای $M(G_2)$ هم خواهیم داشت $\lambda_2(M(G_2)) = 5$. حال $\lambda_2(M(G))$ را به‌دست می آوریم.



درنتیجه مشاهده می‌کنیم که در حالت $n = 2$، $\lambda_2(M(G)) = 5n + 1 = 11$. حال N یک

مترویدِ ناتهی است و M یک مترویدِ همبندِ مینور–مینیمال است و N را به عنوان یک مینور دارد و داریم: $\lambda_{۲}(M) \leq ۴(\lambda_{۱}(N) - ۱) + \lambda_{۲}(N)$

حال چون $\lambda_{۲}(M) = ۱۱$ و $\lambda_{۲}(N) = \lambda_{۱}(N) = ۳$، این مثال در کران تعریف شده در لم ١.١.٦، صدق می‌کند.



حال آماده‌ایم تا اثبات قضیه اصلی را کامل کنیم.

اثبات قضیه اصلی : فرض می‌کنیم N' یک مینور همبند از M باشد به‌طوری‌که مینور–مینیمال است و N را به عنوان یک مینور دارد. با استفاده از لم ١.١.٦ داریم:

$$\lambda_٢(N') \leq ۴(\lambda_١(N) - ١) + \lambda_٢(N).$$

چون M یک مترویدِ ٣–همبند مینور–مینیمال است که N' را به عنوان یک مینور دارد، از قضیه ١.٣.۴ نتیجه می‌گیریم که

$$|E(M)| - |E(N')| \leq ۵(\lambda_٢(N') - ١).$$

بنابراین

$$|E(M)| - |E(N')| \leq ٢٠(\lambda_١(N) - ١) + ۵(\lambda_٢(N) - ١).$$

بنابه لم ١.١.۵ داریم

$$|E(N')| - |E(N)| \leq ٢(\lambda_١(N) - ١).$$

به این ترتیب با جمع دو نامساوی قبل قضیه ثابت می‌شود. ■

چون فرض قضیه ٢.٣.١ و ۵.١.۵ مشابه هستند، طبیعی است که کران‌های آن‌ها را با هم مقایسه کنیم. مشاهده می‌کنیم کران قضیه اول دقیق تر از قضیه دوم است، به شرط این که میانگین تعداد اعضای هر مؤلفه از N حداقل دو باشد. به ویژه، اگر N هیچ طوقه و هم‌طوقه‌ای نداشته باشد، آن‌گاه با توجه به مثال های ٣.١.۵ و۵.١.٦، قضیه ٢.٣.١ دقیق تر از قضیه ۵.١.۵ است. به هر حال اگر به‌عنوان مثال، N جمع مستقیم n طوقه و n هم‌طوقه باشد، آن‌گاه قضیه ۵.١.۵ دقیق تر از قضیه ٢.٣.١ است.

مراجع

[1] **S. Akkari, J. Oxley**, Some local extremal connectivity results for matroids, Combin. Probab. Comput. 2 (1993) 367 - 384.

[2] **R. E. Bixby**, A simple theorem on 3-connectivity, Linear Algebra Appl. 45 (1982) 123 - 126.

[3] **R. E. Bixby, C. R. Coullard**, On chains of 3-connected matroids, Discrete Appl. Math. 15 (1986) 155 - 166.

[4] **W. H. Conningham**, A combinatorial decomposition theory, Ph.D. Thesis, University of Waterloo, 1973.

[5] **M. Lemos**, On 3-connected matroids, Discrete Math. 73 (1989) 273 - 283.

[6] **M. Lemos, J. Oxley**, On packing minors into connected matroids, Discrete Math. 189 (1998) 283 - 389.

[7] **M. Lemos. J. Oxley**, On the 3-connected matroids that are minimal having a fixed spanning restriction, Discrete Math. 218 (2000) 131 - 165.

[8] **M. Lemos, J. Oxley**, On size circumference and circuit removal in 3-connected matroids, Discrete Math. 220 (2000) 145 - 157.

[9] **M. Lemos, J. Oxley, T. J. Reid**, On the 3-connected matroids that are minimal having a fixed restriction, Graphs combin. 16 (2000) 285 - 318.

[10] **J. G. Oxley**, Matroid Theory, Oxford University press, New York, 1992.

[11] **J. Oxley, H. Wu**, On the structure of 3-connected matroids and graphs, European J. Combin. 21 (2000) 667 - 688.

[12] **P. D. Seymour**, Decomposition of regular matroids, Combin. Theory Ser. B 28 (1980) 305 - 359.

[13] **K. Truemper**, Partial matroid representations, European J. Combin. 3 (1984) 377 - 394.

[14] **W. T. Tutte**, Menger's theorem for matroids, J. Res. Nat. Bur. Standards sect. B 69B (1966) 49 - 53.

[15] **W. T. Tutte**, Connectivity in matroids, Canad. J. Math. 18 (1966) 1301 1324.

[16] **D. B. West**, Introduction to Graph Theory, New Delhi, 2006.

Abstract

Let N be a minor of a 3-connected matroid M such that no proper 3-connected minor of M has N as a minor. This Thesis proves a bound on $|E(M) - E(N)|$.

For a matroid N, $\lambda_1(N)$ denote the number of connected components of N. Now N can be constructed from a collection $\Lambda_2(N)$ of direct sum and 2-sum. We find out $\Lambda_2(N)$ is unique up to isomorphism. $\lambda_2(N)$ be the number of matroids in $\Lambda_2(N)$. The following is the main result of the Thesis. Theorem 1.1. Let N be a non-empty matroid and M be a minor-minimal 3-connected matroid having N as a minor. Then

$|E(M)| - |E(N)| \leq 22(\lambda_1(N) - ١) + 5(\lambda_2(N) - ١)$.



Urmia University

facultuy of sience

Department of Mathematics

Urmia, Iran

On the minor-minimal 3-connected matroids having a fixed minor

Supervisor

Dr. Ghodratollah Azadi

By

Sara Koohi

Thesis submitted for the Degree of Master of Science

in Pure Mathematics

September/2010