منطق ریاضی

پریسا فارسی

- **مقدمه**

می گویند هستی موضوع هیچ علمی، به تنهایی نیست.این گفته بدین معنی است که پرداختن به زمینه های یک علم،فقط گوشه های بسیاری از هستی را برای ما روشن می کند. برای آن که دامنه ی شناخت وسعت یابد ، لازم است چند شاخهٔ علمی به هم بخورد و از روش های یکی، در دیگری استفاده شود. ریاضیات به عنوان یک علم پایه ای و زیر بنایی حضور خود را در بسیاری از علوم به اثبات رسانده است
تحقیقات علمی درباره منطق ریاضی، در پی بروز پرسش های نوین در بنیان‌های ریاضیات پدید آمد. به عنوان نمونه، فرگه می‌کوشید تا ریاضیات را بر پایهٔ اصول برآمده از منطق و نظریهٔ مجموعه‌ها قرار دهد. راسل ، در حذف تناقضات ناشی از دستگاه منطق فرگه تلاش کرد و هدف هیلبرت نشان‌دادن این امر بود که "روش‌های مورد قبول عام در ریاضیات هرگاه که به‌طور همه‌جانبه ، کلی نگرانه و به‌عنوان یک کل واحد ، در نظر گرفته شود ، به هیچ نوع تناقضی منجر نخواهد شد ." (این موضوع به برنامه هیلبرت شهرت یافته است .)درادامه به تعریف وصحبت درباره ی منطق ریاضی می پردازیم.

نگرشی بر پیشینه تاریخی منطق ریاضی

بخش بزرگی از فلسفه ای که امروزه رواج دارد نشأت گرفته از آراء افرادی چون وایتهد وراسل است که شالوده ی ریاضی جدید را **منطق** بنانهادند. در واقع منطق ریاضی را باید از مبانی ریاضیات جدید و فلسفه ی تحلیلی به دست آورد کاری که به دست برخی از فلاسفه در این حوزه آغاز گردید، بطور عمده به اصول ریاضیات و رابطهٔ ریاضیات و منطق مربوط می شود، اما نتایج چنان گسترده ای ببار آورد که به تدریج در فلسفه تأثیر عمیق بر جای گذاشت

نخستین کاشف صریح و ثبت‌شدهٔ منطق صوری (formal logic) در تاریخ، ارسطو فیلسوف مشهور یونانی است. نوشته‌های ارسطو دربارهٔ منطق در دوره بیزانسی بصورت مجموعه‌ای واحد تدوین و به نام ارگانون (ارغنون) گردآوری شد. این مجموعه شامل شش بخش است بنام‌های: «مقولات»، «عبارت(قضایا)»، «قیاس»، «برهان»، «جدل» و «مغالطه». بعدها برخی از شارحین ارسطو، دو رساله «شعر» و «خطابه» را به ارگانون افزودند. «ایساغوجی»رساله دیگری است که با اقتباس از دو رساله برهان و جدل بعنوان مدخلی برای منطق ارسطو در نظر گرفته شد. بدین ترتیب آنچه بدست حکیمان مسلمان رسید، منطق نُه بخشی ارسطو بود و شفای ابن سینا نیز شرحی بر همین منطق است. البته این نوشته‌ها امروزه شاملِ منطق و فلسفهٔ منطق و برخی بحث‌های دیگر در حاشیهٔ منطق محسوب می‌شوند. آنچه ما امروزه به نام منطقِ صوری می‌شناسیم در کتابِ آنالوطیای (analytic) اول دیده می‌شود. در قرنِ هجدهم فیلسوفِ مشهورِ آلمانی ایمانوئل کانت ادعا نمود که منطق دیگر به پایان رسیده‌است و نیازی به چیزی بیش‌تر از منطقِ ارسطویی وجود ندارد. بااین‌حال در اواخرِ قرنِ نوزدهم انفجاری در علمِ منطق روی داد و حجمِ انبوهی از مطالعات به آن افزوده شد. این پیشرفت‌ها با کارهای ریاضیدان و فیلسوفِ آلمانی فرگه و شاگردِ انگلیسیِ وی راسل آغاز گردید. پس از آن‌ها نیاز به کارهای دیگری در زمینهٔ منطق احساس شد که در ابتدا عجیب یا غیرضروری می‌رسید: انواع تازه‌ای از منطق مانندِ منطق

ربط، منطق زمان، منطق موجهات، و منطق‌های چند ارزشی که در اثر این احساس پدید آمدند که منطق فرگه و راسل برای برخی اهداف یا نیازها کافی نیستند. نگرش کلی بر پیشینهٔ تاریخی منطق ریاضی و فراهم نمودن زمینه برای مباحث گسترده تر بعدی،از اهداف این مقاله است.

تاريخچه ي رياضي در قرن 17

این قرن يكي از مهمترين قرنها در تاريخ رياضيات است زيرا اساساً دامنه تحقيقات گسترده در رياضي، در همين قرن بر بشر گشوده شد، شايد به دليل آزاديهاي فكري بيشتر، پيشرفتهاي سياسي، اقتصادي و اجتماعي و در نتيجه رفاه بيشتر زندگي-به ويژه در مقابل سرما و تاريكي شمال اروپا.

پيشرفت علم رياضي در اين قرن آنقدر وسيع و گوناگون است كه حتي نوشتن خلاصه اي از آن نيز مثنوي هفتاد من كاغذ خواهد شد. به ناچار بايد به گزينش بعضي از كارهاي اصيلتر و مهم تر در تاريخ رياضي اين قرن تن داد. از مهمترين اكتشافات - و شايد هم اختراعات - رياضي در اين قرن مي توان به مطالب زير اشاره كرد:

الف) كشف لگاريتم

ب) تدوين علامات و نمادگذاريهاي كنوني جبري

ج) گشوده شدن پهنه جديدي در هندسه محض به ويژه هندسه تصويري

د) آغاز اتصال جبر و هندسه با كشف هندسه تحليلي

ه) پيشرفتي شگرف در نظريه اعداد و نيز تولد نظريه احتمال

و) كشف يكي از بزرگترين دستاوردهاي بشر يعني حساب ديفرانسيل و انتگرال

شايد بهترين راه براي بررسي تاريخ رياضي اين قرن، شرح مختصري از زندگاني رياضيدانان برجسته قرن هفدهم باشد.

رياضيدانان برجسته قرن هفدهم:

1. **نپر**: چهار اختراع، بشر را در فن محاسبه چيره دست كرد: نماد گذاري هندي-عربي، چگونگي محاسبه مربوط به كسرها، لگاريتم و رايانه ها. «جان نپر» سومين اختراع را به نام خود ثبت كرد. او به طرز عجيبي، هم سياسي و هم مذهبي بود و نبوغ او در پيشگويي وسايل جنگي چهار قرن بعد از خود اعجاب آور است. تعريف لگاريتم به وسيله نپر، بيشتر فيزيكي است تا رياضي. بد نيست بدانيم كه پايه لگاريتم نپر بر خلاف تصور عموم، عدد e نيست بلكه معكوس e است كه البته خود او چيزي در اين زمينه نمي دانست. تذكر اين نكته لازم است كه در تكميل مفهوم لگاريتم و جداول مربوط به آن، «هنري بريگز» كه يكي از دوستان نپر بود، سهم بسزايي دارد و لگاريتم معمولي در پايه ۱۰ را معمولاً «لگاريتم بريگزي» مي نامند. لگاريتم به معناي «عدد نسبت» است كه البته اين مفهوم، همان طور كه ذكر شد بر اساس تابع تواني -كه هم اكنون تدريس مي شود- به وجود نيامد و يكي از امور خلاف قاعده در تاريخ رياضيات، كشف لگاريتم، پيش از به كار بردن نماهاست. البته سه اختراع مهم ديگر نيز در تاريخ رياضي، به نام جان نپر به ثبت رسيده است. (مراجعه كنيد به صفحه ۴ جلد دوم كتاب تاريخ رياضيات هاوارد د. ايوز.)

2. **پاسكال:** اين نابغه فرانسوي، يكي از بنيانگذاران هندسه محض و پيشرفته و نيز نظريه احتمال است. خواص اصلي اشكال معروف هندسي را در كودكي، بدون معلم و فقط با تلاشهاي خودش به دست آورد. در شانزده سالگي مقاله اي درباره مقاطع

مخروطي نوشت و در هجده يا نوزده سالگي، اولين ماشين حساب مكانيكي را اختراع كرد. اما متاسفانه در طول ۳۹ سال زندگي، به دليل افراط و تفريطهاي مذهبي، جسم ضعيف خود را بارها و بارها آزرد و چندين بار از رياضيات دست كشيد و دوباره به آن بازگشت. پاسكال را به عنوان يكي از بزرگترين «چه ها كه مي شد!!» در تاريخ رياضيات شمرده اند.

قرن بیستم

فرگه از نقطهٔ دیگری کار را آغاز نمود. پیش از او این امر شناخته شده بود که با منطق ارسطویی برخی از استدلال‌ها را نمی‌توان صورت‌بندی نمود. بااین‌حال این استدلال‌ها درست هستند. به نمونهٔ زیر توجه کنید:

یا علی برادر رضا است یا حسن برادر رضا است.

علی برادر رضا نیست.

نتیجه: حسن برادر رضا است.

این استدلال را نمی‌توان به اشکال Aها B هستند و غیره درآورد. از قدیم تلاش‌هایی برای این کار انجام شده و به شکست منجر گردیده بود. فرگه منطق را از این قبیل صورت‌ها آغاز نمود. او نمادهایی مانندِ P و Q و غیره را به عنوان جانشین گزاره‌ها (p اول proposition به معنی گزاره‌است) و علایمی دیگر را به عنوان رابطِ جملات به کار برد. اگر P و Q گزاره باشند ~P خوانده می‌شود «نقیض P» و P→Q خوانده می‌شود «اگر P آنگاه Q». منطق فرگه و راسل قادر است به بررسی روابطِ بین گزاره‌ها و استدلال‌هایی که به دلیل چینش این روابط معتبر اند بپردازد. به همین دلیل آن را حسابِ گزاره‌ها یا منطق جملات می‌نامند. در مقابل به آن‌چه با منطق ارسطویی آغاز گردید منطق

محمولات گفته می شود (زیرا گزاره‌ها را به موضوع و محمول تقسیم می‌کند).

روش‌ها و پایه‌ها

ریاضیات همواره شبهه ناپذیرترین ،دقیق ترین و روشن ترین معرفت تلقی می شود. بدین جهت ،بسیاری از فلاسفه در ریاضیات تحقیق کرده اند تا دریابند،ریاضیات واحد چه خصیصه ای است که نتایج حاصل از آن اینچنین وثیق و مورد اعتماد است؟و آیا چنین خصیصه ای را می توان برای کسب سایر اقسام معرفت بکار برد؟

به طور کلی منطقی که امروزه رواج دارد، منطقی بر پایه‌های منطق ارسطویی و دو ارزشی است که به مرور تکامل یافته است. از پایه‌های این منطق قانون طرد شق وسط می‌باشد. این قانون از مشخصات منطق دو ارزشی است و بیان می‌کند که گزارهٔ ما هر چه باشد یا درست است یا نادرست و به بیانی دیگر یا گزارهٔ ما درست است یا نقیض آن درست است. این اصل تا به امروز اساس حل بسیاری از مسائل به ویژه حل به روش برهان خلف بوده است اما با این وجود، بحث ها و جنجال های بسیاری در رابطه با ناکافی بودن این منطق وجود دارد. به عقیدهٔ بعضی از منطق شناسان و ریاضیدانان مکتب شهودی همچون براوئر،هیتینگ و بیشاپ نتیجه گرفتن وجود یک چیز تنها به این دلیل که وجود نداشتن آن ممکن نیست کافی نیست.

در سال های اخیر پژوهش هایی در زمینهٔ منطق چند ارزشی توسط افرادی چون لوکاسیویچ، پست (شخص) وتاریکی انجام شده است اما هنوز به عنوان یک منطق قابل قبول ویا جایگزین در نیامده است.

تعریف در منطق

با آن که با استفاده از منطق می‌توان بسیاری از چیزها را تعریف کرد و بسیاری از تعاریف را اثبات کرد اما تمامی اساس

منطق بدون تعریف و زیر سئوال است، شاید دلیلش این باشد که منطق بر اساس فکر آدمی بنا شده و ما انسان ها دربارهٔ پدیده‌های غیر از فکر خود می‌توانیم تفکر کنیم زیرا که تفکر کردن درباره تفکر کردن بی معنا و مفهوم است و ما را وارد دور می‌کند که باطل است. البته بررسی ذهن به عنوان یک دستگاه منطقی ما را قادر می سازد تا بتوانیم منشأ منطق که همانا ذهن آدمی است را بیشتر کشف کنیم.

منطق

مَنطِق را عموماً بررسیِ استدلال‌ها می‌دانند. گرچه در تعریفِ دقیقِ منطق بینِ فیلسوفان و منطق‌دانان بحث است ولی در هر حال کاربردِ منطق در تشخیصِ استدلالِ درست از استدلالِ نادرست و مغالطه است.
در گذشته منطق صرفاً شاخه‌ای از فلسفه شمرده می‌شد ولی از میانهٔ سال‌هایِ ۱۸۰۰ در ریاضیات و در دهه‌هایِ اخیر در علمِ رایانه نیز به آن می‌پردازند.

تعاریف و تعابیرِ ممکن از منطق

یک تعبیرِ ممکن از منطق روشِ درست فکر کردن است. این تعبیر نمی‌تواند این مشاهده را بخوبی تبیین کند که افرادی که منطق می‌دانند باز هم کماکان در برخی استدلال‌ها دچارِ اشتباه می‌شوند و افرادی که منطق نمی‌دانند نیز می‌توانند استدلال‌هایِ درست انجام داده و بعضاً آن‌ها را از نادرست تشخیص دهند. البته می‌توان از این تعبیر بدین ترتیب دفاع نمود که منطق‌دانان بسیار کم‌تر از افرادِ عادی در استدلال‌ها اشتباه می‌کنند.
یک تعبیرِ کم‌تر روان‌شناسانه از منطق این است که منطق، علمِ مطالعهٔ ساختارهایِ زبانی ،زبان‌هایِ طبیعی است. البته این تعبیر نیز مشکلاتِ خود را دارد. منطق، یکی از علومِ طبیعی و تجربی مثلِ فیزیک نیست. گزاره‌هایِ منطق ضروری به نظر می‌آیند و توصیفی از وضعِ ممکنات ارایه نمی‌کنند. جنسِ گزاره‌ای مانندِ

«اجتماع نقیضین محال است» شبیه به گزاره‌ای مانندِ «سرعتِ نور برابر با مقدارِ ثابتِ c است» به نظر نمی‌رسد.تعبیر دیگری، منطق را خطا سنج اندیشه می‌نامد. منطق چارچوبهای خاصی را کشف و معرفی نموده‌است که اندیشه در آن قالبها از خطا و بیراهه رفتن مصون می‌ماند. البته تعریف دیگری هم از منطق می‌توان ارائه داد که عموماً فیلسوفان اسلامی به کار می‌برند. آن ها در تعریف منطق می‌گویند که منطق آلت و ابزاری از سنخ قانون است که فکر را از افتادن در خطاها مصون نگه می‌دارد و آن را به سمت استدلال هایی کاملاً پایدار رهنمون می سازد. لذا اگر کسی به کلی منطق را در استدلال هایش به کار برد، (البته در صورت صحت مواد) به هیچ عنوان دچار خطای در تفکر و مغالطه نخواهد شد [1].

منطق ریاضی

منطق ریاضی،شاخه ای از ریاضیات است که به تعریف منطق می پردازد وگاه به آن منطق نمادی نیز می گویند.این نام را جوزپه پئانو ریاضیدان ایتالیائی بر این رشته ی علمی گذاشت.بیشتر لایب نیتز و لامبرت کوشش های بسیاری در این خصوص کرده بودند.در اواخر قرن نوزدهم ،با کارهای آگوستوس دی مورگان، جورج بول،گوتلوپ فرگه،برتراند راسل ،داوید هیلبرت و دیگران این علم، به پیشرفت قابل ملاحظه ی منطق امروزه در ریاضیات ، منطق در فلسفه است که اساس خود را با نظریه ی مجموعه ها به اشتراک دارد.

منطق صوری چیست؟

کشفِ اساسیِ ارسطو این بود که درستی و نادرستیِ استدلال‌هایی که ما در زبانِ طبیعی انجام می‌دهیم نه به محتوای

[1] . اگرچه بوعلی در اشارات خود تحولی در منطق ارسطویی پدید آورد و منطق دوبخشی را مطرح کرد: «*منطق تعریف* » و «*منطق استدلال* »

آن‌ها بلکه به صورت (= form)،تصور یا قالبِ آن‌ها بستگی دارد. به دلیلِ همین بستگی به صورت است که این منطق را «صوری» (formal) می‌نامند. این کشفِ بسیار مهمی محسوب می‌شود، هرچند که شاید پس از حل گشتن معمایی آسان به نظر رسد. هنگامی که استدلالِ زیر را انجام می‌دهیم:

همهٔ انسان‌ها فانی اند.

سقراط انسان است.

نتیجه: سقراط فانی است.

به دو جملهٔ اول «مقدماتِ» استدلال (در سنتِ ایرانی کُبرا و صُغرا) و به جملهٔ آخر نتیجه می‌گویند. بعلاوه به «سقراط» در مقدمهٔ دوم «موضوع» گفته می‌شود و به «انسان» در همان جمله «محمول» اطلاق می‌گردد.درستی استدلال بالا ربطی به این امر ندارد که دربارهٔ انسان، سقراط یا فانی بودن صحبت می‌کند. بلکه فقط و فقط به این دلیل است که چینشِ کلمات بنحوِ خاصی صورت گرفته‌است:

همهٔ Aها B هستند.

a یک A است.

نتیجه: a یک B است.

هر استدلالی که واژه‌های آن همین صورت یا فورم را داشته باشند یک استدلالِ معتبر است. این نتیجهٔ جالب انسان را به فکر می‌اندازد که شاید بتوان همهٔ صورِ معتبر و نامعتبرِ استدلال را کشف و دسته‌بندی نمود. ارسطو نیز به همین فکر افتاد. او استدلال‌های سالم و عقیم (یا مغالطه) را یافت و دسته‌بندی نمود. بعدها نشان داده شد که می‌توان برخی از انواعِ استدلال را به انواع دیگر تبدیل نمود و در نتیجه تعدادِ آن‌ها را کاهش داد. این

که چرا ما انسان‌ها برخی از صور استدلال را می‌پذیریم درحالی که برخی دیگر را نامعتبر می‌شماریم پرسشی است که هرگز به آن پاسخ داده نشده‌است.

گزاره (منطق)

گزاره، جمله‌ای است خبری که تنها می‌تواند درست یا نادرست باشد، هر چند که درستی یا نادرستی آن بر ما پوشیده باشد.
بنابراین جملات امری، پرسشی و عاطفی نمی‌توانند به عنوان یک گزاره گرفته شوند، همچنین همهٔ جملات خبری نیز گزاره نیستند.
برای نمونه، جملهٔ «۲۳ عددی اول است» یا «۹۹۹<۰» هر دو جمله‌های خبری هستند که گزاره نیز می‌باشند، ولی اینکه «فردوسی بهترین شاعر ایران است» هرچند که جمله‌ای خبریست، ولی نمی‌توان آن را یک گزاره دانست، چرا که درستی یا نادرستی آن بر ما روشن نیست(سلیقه‌ایست). همچنین جملات امری، پرسشی و عاطفی را هم نمی‌توان گزاره دانست، چون بررسی درستی یا نادرستی آن‌ها بی‌معنیست.
گزاره‌های درست را با «د» یا « ۱ » یا "T" نشان می‌دهیم و گزاره‌های نادرست را با «ن» یا « ۰ » یا "F" نشان می‌دهیم. به این حالت‌ها، حالت‌های منطقی یا امکان‌های منطقی گویند. درستی یا نادرستی یک گزاره را ارزش آن گزاره گویند.

نقض گزاره‌ها

نمی توان آن را تعریف کرد، زیر اگر بخواهیم آن را تعریف کنیم باز نیاز به استفاده از خودش برای تعریف خودش داریم. به چند تعریف زیر توجه کنید :

1 - نقیض یک گزاره ، گزاره‌ای است که دارای ویژگی های آن گزاره نباشد.

2 - نقیض یک گزاره یعنی اگر گزاره‌ای درست باشد آنگاه نقیض آن نادرست است.
3 - نقیض یک گزاره یعنی مکمل حالت هایی که آن گزاره شامل نیست.
و تعاریفی مانند این ها ...
تعاریف بالا گرچه مفهوم را می رسانند و منظور از آوردن آن ها القاء مفهوم نقیض بوده است اما غلط هستند چون در آنها به نوعی از خود مفهوم نقیض استفاده شده است.
برای مثال در جملهٔ اول، عبارت دارای ویژگی های آن گزاره نباشد. خود نقیض عبارت دارای ویژگی های آن گزاره باشد.
است، همچنین در جملات بعدی عبارات نادرست و نیست خود به ترتیب نقیض عبارات درست و هست می‌باشند

گزاره‌های فصلی و عطفی

در منطق دو ارزشی همه چیز بر پایهٔ دو حالت بنا شده است ، بنابر این ما در این منطق دو عملگر اصلی داریم. " یا " ، " و " عملگرهای اصلی این منطق هستند و عملگرهای دیگر به صورت شکل دیگری از ترکیب این دو عملگر و نقایض آن ها ایجاد می‌شوند.گزاره‌های فصلی : گزاره‌هایی هستند که در آنها حرف ربط "یا" به کار رفته است. گزاره‌های چند جزئی که با حرف ربط "یا" به یکدیگر مربوط می‌شوند حتی اگر یکی از گزاره‌ها درست باشد شرط درست است و برای نادرستی شرط باید تمامی گزاره‌ها نادرست باشند.گزاره‌های عطفی : گزاره‌هایی هستند که در آنها حرف ربط "و" به کار رفته است. گزاره‌های چند جزئی که با حرف ربط "و" به یکدیگر مربوط می‌شوند حتی اگر یکی از گزاره‌ها درست نباشد شرط نادرست است و برای درستی شرط باید تمامی گزاره‌ها درست باشند.همانطور که در بالا دید ید هر دو دارای تعریفی مشابه و نقیض یکدیگر هستند، پس می‌توان گفت که نقیض گزاره‌های فصلی به شکل عطفی است و نقیض گزاره‌های عطفی به شکل فصلی است.

گزارشی از منطق ریاضی

منطق، مورد بررسی روش های شناختی قرار گرفته است و آن چه در دانش، عنوان منطق را حمل می کند عمدتاً حاصل چنین بررسی هائی است. به عبارتی منطق بیش از آن چه یک مقوله ی منفرد و یک روش باشد، موضوع روش های گوناگون بوده است. از قدیمی ترین و مهم ترین این ها می توان از منطق فلسفی philosophical logic (منطق مورد بررسی روش فلسفی) و منطق ریاضی mathematical logic (و همچنین...) نام برد. گرچه با پیدایش و افزایش اهمیت روش های دیگر منطق موضوع روش ها دیگر نیز شده است (بیشتر روش های تجربی، واقع و نتیجه گرا) اما هنوز می توان تمام روش شناسی های منطق را در قالب این دو قرار داد.

منطق در دسته بندی دیگری از نظر محتوا information و صورت form در دو حالت صورت گرا formal یا محتوا گرا informal تقسیم می شود. در استدلال
اگر "باران ببارد"، "زمین خیس می شود"
"باران آمده است"
بنابراین "زمین خیس است"
اگر به جای جملات داخل نشان گیومه جملات دیگری قرار بگیرد استدلال همچنان درست خواهد بود؛ پس می توان چنین استدلالی را صرف نظر از محتوایی که می رساند و جملات آن به کار برد. در حقیقت چیزی که می تواند در یک استدلال جای یک جمله بنشیند (نمایندگی) و درستی استدلال را صرف نظر از جملات حفظ کند صورت استدلال است. منطق صورت گرا خود در حالت صورت گرایی تام به منطق نمادین symbolic logic تبدیل می شود که در آن نماد ها برای تمام آن چه بیان می شود نماینده هستند و درستی استدلال ها کاملا مستقل از چیزی خواهد بود که نماد ها می نمایند. منطق نمادین همان منطق ریاضی است.
[متاسفانه برای گزارشی از روش ریاضی و پایه های آن موقعیت مناسبی نیست]

در روش ریاضی چهارچوب هر منطق در حالت کلی از سه شی ء ریاضی تشکیل شده است:

1. یک زبان نمادین formal (symbolic) language یا یک واحد نحوی که در آن توالی نماد ها طبق قواعد نحوی syntax rules واحد های بزرگ تر آن زبان را، گزاره proposition (جمله sentence) را می سازند. هر توالی در چنین زبانی یک جمله ی درست نحوی نخواهد بود. جملات درست ساخته شده ی این زبان با عنوان regular expression یا well-formed formula (wff) شناخته می شود.
2. یک دستگاه منطقی برای استنتاج جملات نتیجه از فرض ها. این دستگاه استنتاجی formal deduction system مجموعه ای است از اصول منطقی logical axiom و چند قاعده ی استنباط rules of inference. این دستگاه ریاضی نیز مانند قبلی (زبان نمادین) قسمتی از واحد نحوی Syntetical unit منطق مورد نظر خواهد بود. از این رو که با نماد ها و قواعدی کار می کند که مستقل از معنای آن ها می باشند.
3. یک ارزش دهی valuation، تعبیر interpretation، معنادهی semantics، ساختار ریاضی structure، مدل model یا دنیای سخن domain of discourse (هر کدام از این واژه ها در بخش های مختلف منطق ریاضی مورد استفاده قرار می گیرند و همگی در تناظر با قسمت سوم هستند) [در ادامه ی متن معنا semantic در کل به چنین قسمتی از یک منطق اشاره می کند]. این واحد از یک منطق ریاضی به واسطه ی معنایی که به نماد ها و جملات می دهد از دو واحد دیگر که نحوی syntetic بودند متمایز می شود.

در منطق های ریاضی دستگاه منطقی و معنادهی متمایز کننده هستند از آن جایی که زبان نمادین در تمام منطق ها مشابه است و

علاوه بر آن زبان نمادین به تنهایی ویژگی مشخص یک منطق ریاضی خاص نیست. طرح کلی یک زبان نمادین به این صورت است:

- مجموعه ای از نمادهای جمله ای sentetial symbols مانند A, B, C, ...
- مجموعه ای از نمادهای رابط connectives مانند "و " &، "یا " |، "آنگاه " =>، ...
- چند قاعده برای ساخت wff ها از wff مثلا مانند: اگر p و q هر دو wff باشند آنگاه p &q نیز wff خواهد بود.

نمادهای جمله ای می توانند به موجودات مشخصی در یک semantics اشاره کنند مثلا نماد Soc به سقراط در دنیای انسان ها و نماد 0 به عدد صفر در دنیای (domain of discourse) حساب اشاره می کنند، به این ها نماد های ثابت constants گفته می شود. در وضعیت مقابل ممکن است یک نماد نماینده ی هر موجودی از semantics باشد که در آن صورت آن را متغیر variable می خوانیم. مثلا در عبارت x=5 نماد x با هر موجودی از semantics قابل جایگزینی است و همان طور که می دانیم فقط به ازای نمایندگی 5 این عبارت درست خواهد بود. با توجه به این مطلب هر عبارتی در زبان نمادین قابل ارزش دهی توسط semantics نیست مثلا نماد 5 درست یا غلط نخواهد بود ولی جمله ی "سقراط انسان است " قابل ارزش دهی است. کوچک ترین واحد زبانی که توسط یک semantics قابل ارزش دهی است فرمول تجزیه ناپذیر atomic formula نامیده می شود. فرمولی قابل ارزش یابی که درست یا غلط بودن آن دقیقا مشخص است (یعنی متغیر ها در همیشه درست یا همیشه غلط بودن آن نقشی ندارند) جمله sentence یا گزاره proposition نامیده می شود، در غیر این صورت گزاره نما یا formula.

تا این جا زبان نمادین و semantics رابطه ی متقابلی در بیان گزاره ها و ارزش یابی درستی آن ها در یک دنیای سخن

خاص داشتند. اکنون نقش دستگاه منطقی در این مرحله مشخص می شود؛ کار دستگاه منطقی نتیجه گیری درست یا غلط بودن جملات (در یک semantics خاص) بر اساس درست-غلط بودن جملاتی دیگر است و نه بر اساس آن چه از semantics می آید. البته این نتیجه باید با semantics یکی باشد در غیر این صورت با دستگاه منطقی نادرستی روبه رو هستیم. یک دستگاه منطقی شامل موارد زیر است:

- مجموعه ای از فرض ها (جملات) در ارتباط با یک domain of discourse که درستی آن ها را در آن domain of discourse فرض گرفته ایم. به این جملات مجموعه ی فرض ها premises می گویند. اگر فرض ها های یک دستگاه منطقی مجموعه ای ثابت باشند عنوان اصول موضوع axiom را به آن ها می دهیم.
- مجموعه ای از اصول منطقی logical axiom که صرف نظر از یک منطق ریاضی خاص و یک زیان نمادین متمایز یا اصول موضوع وجود دارند و درستی آن ها را می پذیریم . به طور مثال قانون طرد شق ثالث exclusion of third middle که به صورت "p درست است یا p~ درست است " بیان می شود (~ نماد نقیض است).

چند قاعده ی استنباط rules of inference برای نتیجه گیری های منطقی. به طور مثال قاعده ی قیاس یا وضع مقدم modus ponen که ساده ترین و متداول ترین قاعده ی استنباط هستند: p & p => q آن گاه q نتیجه می شود.

مجموعه ی اصول منطقی و قواعد استنباط دارای یک ماهیت هستند و آن خود منطقی است که می شناسیم و وجود لااقل یکی از این ها در هر دستگاه استنتاجی الزامی است ولی می توان یکی از آن ها را حذف کرد.

اهمیت دستگاه استنتاجی نه تنها در منطق ریاضی بلکه در تمام علوم واضح است؛ درستی تعداد محدودی از گزاره ها قابل ارزیابی و آزمایش در دنیای سخن یا حتی دنیای واقع است.

مطلوب است بتوانیم تمام آن چه قابل ارزیابی و دانستن است را از تعدادی گزاره و قاعده نتیجه بگیریم (چه در روش ریاضی و چه در روش علمی) به این صورت نقش آزمایش در تئوری ها کمتر خواهد شد و همه چیز به سمت مختصر شدن در گزاره پیش خواهد رفت [reductionism] و البته بررسی درستی چنین تئوری هایی نیز ساده تر خواهد بود (بررسی زبانی).
منطق ریاضی که یکی از موضوعات ریاضی است خود یکی از پایه ی های ریاضیات به شمار می آید (به همراه نظریه ی اصل موضوعی مجموعه ها) بنابراین منطق های ریاضی از این نظر که چه قدر در ریاضی نقش دارند (به عنوان سنگ بنای ریاضیات) به دو دسته تقسیم می شوند:

- منطق های عمومی
- *منطق ریاضی*، نظریه ی اصل موضوعی مجموعه ها، نظریه ی مدل، نظریه ی اثبات، نظریه ی محاسبه

دسته ی دوم دقیقا آن چیزی است که بیشتر با نام منطق ریاضی شناخته شده است. این دسته شامل موضوعاتی از ریاضی است که درباره ی روش ریاضی (منطق مورد استثاده ی آن)، اثبات در ریاضی، مفاهیم بنیادی ریاضی و البته خود ریاضی بحث می کنند. *منطق ریاضی* [از این پس حروف ایتالیک (کج) به این منطق خاص اشاره دارد] که در دسته ی دوم آمده است انواع مختلفی از نظر پیچیدگی دارد: منطق گزاره ها propositional logic (جمله ها) یا منطق مرتبه ی صفر، منطق محمولی predicate first order logic یا منطق مرتبه اول، منطق مرتبه دوم و مراتب بالاتر. موقتا بحث در ارتباط با *منطق ریاضی* کنار گذاشته و به سراغ چند نمونه منطق عمومی می رویم؛

جزایری منطقی در اقیانوس ریاضی.

منطق های عمومی گسترده تر از آن هستند که قابل تعیین باشند در حقیقت این ها هر کدام یک تئوری ریاضی هستند که یک منطق فلسفی یا روزمره را مدل می کنند و به واسطه ی داشتن عناصر اساسی یک منطق با این عنوان طبقه بندی شده اند. این

تئوری ها هر کدام به طور منفرد و مستقل از دیگر منطق ها بررسی می شوند و عموما هر کدام کاربرد خاصی دارند. به طور مثال منطق فازی fuzzy logic، منطق وضعی modal logic، combinatory logic، quantum logic و ...
هر کدام از این منطق ها ویژگی خاصی به همراه دارند. به طور مثال در منطق چند ارزشی multi-valued logic بر خلاف *منطق ریاضی* و خیلی از منطق های ریاضی دیگر تابع ارزش یاب (که جملات تجزیه ناپذیر را ارز یابی می کند) فقط به دو ارزش (درست، نادرست) نمی نگارد. بنیان گذار این منطق لوکاسیویچ است. حتی این امکان وجود دارد که تابع ارزش یاب به پیوستاری از اعداد حقیقی بنگارد که مهم ترین ویژگی منطق فازی می باشد. بنیان گذار این منطق لطفی زاده است. بنابراین دو ارزشی بودن یا بولی Boolean logic بودن منطق یک ویژگی برای آن است نه یک منطق جدا گانه، البته در ریاضیات.
منطق کوانتمی نیز مانند منطق های چند ارزشی است ولی نه با یک تابع ارزش یاب با برد مشخص. چنین منطق هایی شبکه ای lattice از گزاره ها دارند که از نظر ارزش قابل ترتیب هستند. دیگر ویژگی مهم این منطق نبود قانون توزیع *و* & ، *یا* | نسبت به هم است. یعنی این منطق در اصول منطقی دستگاه خود با بقیه ی منطق ها تفاوت دارد. بنیان گذاران این منطق Birkhoff & Neumann هستند.
منطق ترکیبی combinatory logic منطقی است که در آن نیاز به وجود متغیر ها حذث شده است و برای پیاده سازی منطق روی ماشین های کامپیوتری بسیار مناسب است. بنیان گذار این منطق Haskell Brooks Curry است.
منطق شهودی intuitionistic logic یا منطق سازنده constructivism logic به جز نگرش بسیار متفاوتی که در قیاس با *منطق ریاضی* معمول به ریاضی دارد بسیاری از توانایی های منطقی یک دستگاه استنتاجی را ندارد. به طور مثال نبود قانون نقیض نقیض که در ریاضیات به ویژه در روش اثباتی برهان خلث بسیار آشنا است از آن جمله است. بنابراین اگر در

منطق شهودی نقیض گزاره ای نادرست باشد آن گزاره لزوما درست نخواهد بود. همین جا تفاوت عمده ی دیگری با منطق های دیگر پیدا می شود و آن امکان نامعین بودن درستی گزاره هاست. به عبارتی از نظر یک شهود گرا این امکان وجود دارد یک گزاره نه درست باشد و نه نادرست و در نتیجه قانون طرد شق ثالث یکی دیگر از حذفیات این دستگاه استنتاجی است. منطق شهودی توسط Arend Heyting بنیان گذاری شد و گرچه در اوایل قرن بیستم یکی از گزینه ها برای بنیان ریاضی بود (یا *منطق ریاضی* بودن) ولی بسیار زود کنار گذاشته شد.
منطق وضعی modal logic منطقی بسیار کهن است که از زمان ارسطو بنیان گذاری شده است و در دوره ی معاصر زیر همین عنوان در ریاضی مدل شده است و در دسته ی منطق عمومی قرار می گیرد. در منطق وضعی دو عملگر وضعیت برای گزاره ها در نظر گرفته می شود (الزامی به دو گانگی بودن وضعیت وجود ندارد). یکی برای الزام و دیگری برای امکان. بنابراین در چنین منطقی اول در زبان نمادین دو نماد جدید برای عملگرها و قواعد نحوی که آن ها را شامل شود وجود دارد، دوم در دستگاه استنتاجی قواعد استنباط جدیدی مختص عملگرهای الزام و امکان اضافه شده است به طور مثال اگر M نماد عملگر الزام و L نماد امکان و ~ نماد نقیض قاعده ی و p یک گزاره، قواعد جدید زیر را خواهیم داشت:

$$Mp = \sim L \sim p$$

$$L\ p = \sim M \sim P$$

در معنا دهی و ارزش دهی وضعیت به کل متفاوت از دیگر منطق هاست. صورت ریاضی این منطق توسط Lewis بنیان گذری شد.

جستارهای وابسته

در اینجا اشاره ای داریم به برخی از منطق های وابسته به این منطق:

منطق فازی
منطق ریاضی
منطق در فضای آگاهی
حساب گزاره‌ها
منطق محمولات
انکار مقدمات
منطق موجهات
منطق ربط
منطق زمان
منطق‌های توصیف
پارادوکس استلزام مادی
منطق امری
منطق بایایی
منطق کاربردی
منطق مادی
منطق صوری

منابع :

1-موحد ضیاء،درآمدی به منطق ریاضی، انتشارات علمی و فرهنگی.
2-هاک سوزان،فلسفه ی منطق ،ترجمه ی محمد علی حجتی،کتاب طه.
3-منطق،احدفرامرزفراملکی،انتشارات دانشگاه پیام نور.

4-آشنایی با منطق ریاضی ،هربوت اندرتون،غلامرضا برادران خسروشاهی.
5-مدخل منطق صورت(منطق ریاضی)،غلامحسین مصاحب.
6-منطق ریاضی،مجمد شیری، انتشارات هرس با همکاری مرکز بین المللی گفتگوی تمدن ها.
7- www.mathhuose.com.
8- fa.wikipedia.org.
9- www.huppu.com.
10-ویکیپدیا دانشگاه آزاد اسلامی.