مقدمه

همه شما حتي اگر از هندسه نيز چيزي ندانيد بارها نام آن را شنيده ايد. و حتماً مي دانيد كه «جبر، حساب و هندسه» سه شاخه مهم از رياضيات است، همين سه عنوان در رياضيات پايه گذار پيشرفت در تمام علوم محسوب مي شوند.شايد همين حس مسئوليتي كه رياضيات به تمام بخش هاي علوم دارد آن را بسيار جدي و در نظر بسياري، علمي خشك و در عين حال سخت جلوه داده است. در اين ميان هندسه نقش بسيار مهمي را حتي در شاخه هاي رياضي برعهده دارد .هندسه كه مي توان به آن علم بازي با اشكال لقب داد، خود پايه گذار ديگر شاخه هاي رياضي است. زيرا تمام قسمت هاي ديگر در رياضيات و علوم ديگر تا به صورت مشهودي قابل بررسي دقيق و اصولي نباشد جاي پيشرفت چشمگيري براي آنها نمي توان درنظر گرفت. با اين اوصاف، شايسته است به هندسه لقب «مادر بزرگ علوم» دهيم.شايد اگر زماني كه حوزه اطلاعاتمان از اعداد تنها به مجموعه اعداد طبيعي منتهي مي شدو معلم درس رياضيات از ما مي خواست تا ضلع سوم مثلث قائم الزاويه اي را كه طول هر ضلعش يك سانتي متر است اندازه بگيريم نمي توانستيم عددي را با چنين ويژگي بيابيم .سال ها پيش اقليدس با حل مسئله اي نظير اين (محاسبه قطر مربعي كه هر ضلعش ۱ واحد بود)، سلسله اعداد جديدي را به مجموعه هاي شناخته شده اضافه كرد كه يكي از شاهكارهاي بي نظير در پيشرفت رياضيات و البته علوم بود. بله اين عدد عجيب و غريب «راديكال ۲» بود.عموم تحصيلكردگان با هندسه اقليدسي آشنا هستند. زيرا دست كم در طول دوران تحصيل خود به اجبار هم كه بوده در كتاب هاي درسي با اين هندسه كه اصول آن بر مبناي اندازه گيري است آشنا شده اند .اما هندسه اقليدسي تنها به بررسي اشكال كلاسيك موجود در طبيعت مي پردازد. در اين هندسه اشكال و توابع ناهموار، آشفته و غير كلاسيك به بهانه اينكه مهار ناپذيرند، جايي نداشتند.بالاخره در سال ۱۹۹٤، طلسم يكي از تئوري هاي رياضي كه از سال۱۸۹۷، عنوان شده بود، شكست و « مندلبرات(۱) » رياضيدان لهستاني، پايه گذار هندسه جديدي شد كه به آن هندسه بدون اندازه يا هندسه فركتالي گويند. هندسه بدون اندازه يكي از شاخه هاي جديد رياضيات است كه در برابر تفسير و شبيه سازي اشكال مختلف طبيعت از خود انعطاف و قابليت بي نظير نشان داده است. با به كارگيري هندسه فركتالي، افق روشني پيش روي رياضيدانان و محققان در زمينه بازگو كردن رفتار توابع و مجموعه هاي به ظاهر ناهموار و پر آشوب قرار گرفت.

تاریخچه

هندسه فركتالي يا هندسه فركتال ها پديده ايست كه چندي پيش پا به دنياي رياضيات گذاشت. پيش از اينكه مندلبورت اين واژه را ابداع كند، براي چنين اشكالي، از واژه «منحني‌هاي هيولايي» استفاده مي‌شد. واژه فراکتال مشتق گرفته شده از واژه لاتینی فراکتوس به معنای سنگ است که به شکل نا منظم شکسته و خرد شده. که در سال ۱۹۷٦ توسط رياضيدان لهستاني به نام بنوئيت مندلبرات وارد دنياي رياضيات شد.

او در سال ۱۹۸۷ پرفسوري خود را در رشته رياضيات گرفت.

مندلبرات وقتي كه بر روي تحقيقي پيرامون طول سواحل انگليس مطالعه مي نمود به اين نتيجه رسيد كه هر گاه با مقياس بزرگ اين طول اندازه گرفته شود بيشتر از زماني است كه مقياس كوچكتر باشد.

فرهنگستان زبان هم واژه برخال را تصويب كرده و همچنين براي واژه فركتالي واژه برخالي را تصويب كرده است.

واژه فركتال به معناي سنگي است كه به شكل نامنظم شكسته شده باشد.

تئوریسین فراکتال ها

بنویت مندلبروت نظریه پرداز هندسه برخالی (فرکتالی) است. وی در سال ۱۹۲٤ در لهستان بدنیا آمد. پدر او دستفروش لباس های دست دوم بود و مادرش پزشکی می کرد. او مبانی ریاضیات را از دو عموی خود فرا گرفت و به همراه خانواده خود در سال ۱۹۳٦ به فرانسه مهاجرت کرد. در آنجا با کمک یکی دیگر از عموهایش که پروفسور ریاضیات بود اقامت فرانسه را گرفتند.

این مهاجرت باعث شد تا وی بیشتر به ریاضیات علاقمند شود اما جنگ جهانی دوم شروع شده بود و مندلبورت هراس این را داشت که نتواند به ریاضیات بپردازد. درباره او می گویند: "جنگ، تنگدستی و نیاز به زندگی او را از مدرسه و تحصیل دور کرد و به همین دلیل بود که او را حداکثر یک معلم دبیرستانی خودآموز خوب می دانستند".

عدم تحصیل دانشگاهی برای او یک مزیت بود چرا که او دیگر به پدیده های هستی به چشم یک ریاضیدان یا دانشمند دانشگاهی نمی نگریست، این طرز آموزش همچنین به وی فرصت داد تا روشهای بسیار جالبی برای استفاده از هندسه در ریاضیات ابداع کند. نبوغ ذاتی او در

هندسه باعث شد تا بتواند بسیاری از مسائل ریاضی را با روشهای هندسی حل کند. او در سال ۱۹٤٤ فرصت آنرا یافت تا در آزمون های پلی تکنیک شرکت کند و توانست بسهولت قبول شود و این سرآغاز تحصیلات جدی وی بود. پس از پایان تحصیلات (دریافت دکترا به امریکا رفت و در بنیاد مطالعات پیشرفته پرینستون (Advanced Study in Princeton) مشغول به فعالیت شد.

پس از ده سال دوباره به پاریس بازگشت و شروع به کار برای مرکز ملی پژوهشهای علمی فرانسه نمود. طولی نکشید که ازدواج کرد و دوباره به امریکا برگشت. و در آنجا با شرکت IBMآغاز به همکاری نمود. وی همواره از این موضوع صحبت می کند که در IBM چقدر آزاد است و می تواند روی هر پروژه ای کار کند و فرصتی که IBM در اختیار او قرار داده است هیچ دانشگاهی نمی تواند به او بدهد.

از جمله اتفاقاتی که برای او رخ داد آشنایی وی با پژوهشهایی بود که پیشتر توسط Gaston Maurice Juliaدر سال ۱۹۱۷ انجام شده بود. این پژوهشها را عمویش در سال ۱۹٤٥ در اختیار او قرار داده بود اما وی تا سال ۱۹۷۰ آنها را جدی نمی گرفت. با توجه به تجاربی که او در زمینه رایانه در شرکت IBM کسب کرده بود و با توجه نگاه مجدد به پژ جولیا او توانست تئوری زیبای برخالها (فراکتال) را ارائه کند.

تئوری برخالها علاوه بر زیبایی خاصی که از دید ریاضی دارد یکی از روشهای بسیار کاربردی در تفسیر و مدلسازی طبیعت می باشند. آشنایی با برخالها به هنرمندان اجازه می دهند تا آثار هنری بسیار زیبایی را بیافرینند.

تعریف آشوب

فصل مشترک تعاریفی که برای مفهوم آشوب ارائه شده است ، تاکید بر این نکته است که آشوب دانش بررسی رفتار سیستم هایی است که اگرچه ورودی آنها قابل تعیین واندازه گیری است ، اما خروجی این سیستم ها ظاهری کتره ای و تصادفی دارد.

شاید به همین دلیل بود که استوارت ریاضیدان برجسته این موضوع را مفهومی احتمالاتی می دانست ، اما چیزی نگذشت که وی تعریف خود را اصلاح کرد و به تعریفی رسید که تقریبا مورد تایید عمومی قرار دارد.

بر اساس این تعریف ، آشوب به توانایی یک الگو و مدل ساده گفته می شود که اگرچه خود این الگو هیچ نشانی از پدیده های تصادفی در خود ندارد، اما می تواند منجر به ظهور رفتارهای بسیار بی قاعده در محیط شود.

برای مثال ، یک دنباله ریاضی از اعداد را در نظر بگیرید که برای توضیح یک پدیده مشخص وضع شده است. بیایید هربار پاسخ معادله را به عنوان متغیر جدید به این سیستم وارد کنید.

سری جوابی که به دست خواهد آمد، دنباله ای از اعداد است که رفتاری آشوبناک دارد و اگر آنها را تصویر کنیم به یک الگوی واقعی آشوب می رسیم ؛ مثلا معادله ساده x3+c که در آن cیک عدد مختلط است ، اگر یک بار یک عدد به x نسبت دهیم و دفعات بعد به جای عددلخواه پاسخ قبلی معادله را بهx نسبت دهیم ، نمونه بسیار جذابی از یک رابطه آشوبناک به دست می آید؛ رابطه ای که زیبایی های خود را آشکار خواهد کرد، اما نکته ای هم مشخص است.

همین طور که از مثال مشخص شده ، یکی از شناسه های مهم سیستم های آشوب در این است که بازخورد یک رفتار بر ادامه فعالیت آن تاثیر می گذارد؛ یعنی همواره اولین محصول خروجی در ادامه روند نقش بازی می کند؛ همانند زاد و ولد موجودات ، اگر بخواهیم روند زاد و ولد انسان یا هر موجود دیگری را در نظر بگیریم ، باید توجه کنیم که نسل اول کودکان اگرچه محصول این سیستم هستند، اما در تعیین ادامه روند سیستم نقش بازی می کنند.

فراکتال ها

در کاربرد محاوره ای ، یک فراکتال ، یک شکل هندسی چندپاره یا ناهموار است که می تواند به بخشهایی تقسیم شود که هر کدام از آنها (حداقل به طور تقریبی) یک کپی کاهش یافته از لحاظ اندازه، از کل شکل می باشد.این اصطلاح در سال ۱۹۷۵ توسط بنوا مندلبرات ابداع شده و از واژه لاتین fractus به معنی شکسته یا گسیخته مشتق شده است.

یک فراکتال به عنوان یک شکل هندسی ، به طور کلی خصوصیات زیر را داراست :

- دارای ساختاری ظریف در مقیاسهای کوچک دلخواه است.
- بی قاعده تر از آن است که با زبان سنتی هندسه اقلیدسی ، بسادگی توصیف شود.
- خود مشابه است(حداقل به طور تقریبی یا تصادفی).
- دارای بعد Hausdorff است که بزرگتر از بعد مکانی(توپولوژیک) آن است (گرچه این شرط توسط منحنی های پرکننده فضا مانند منحنی هیلبرت برآورده نمی شود).
- دارای یک تعریف ساده و بازگشتی می باشد.

از آنجاییکه فراکتالها در تمام سطوح بزرگنمایی ، مشابه به نظر می رسند ، فرض می شود که بطور نامحدودی پیچیده اند(در اصطلاح غیر رسمی).اشیای طبیعی که تا حدودی به فراکتالها تقریب زده می شوند عبارتند از : ابرها ، رشته کوهها ، صاعقه ، خطوط ساحلی و برفدانه ها.با این حال ، تمام اشیای خودمشابه فراکتال نیستند ؛ برای مثال خط حقیقی (یک حط راست اقلیدسی) ظاهراً خودمشابه است اما سایر مشخصات فراکتال را دارا نیست.

ابعاد فراکتال ها

یکی از نکات بسیار جالب در بررسی فراکتال ها، بعد آنها است. مثلاً می دانیم که مربع يك شیء ریاضی دوبعدی است. این بعد دوم را می توان اینگونه به دست آورد که از تقسیم هر ضلع مربع به N قسمت مساوی و وصل کردن نقاط روبه رو به هم، N2 مربع به دست می آید که اندازه هر کدام1/N2 برابر مساحت مربع اولی است. این شکل، يك ساختار فراکتالی دارد که هر ضلع مربع های کوچك با ضریب N به اندازه ضلع مربع اصلی تبدیل می شود. بنابراین بعد هر جسم را می توان اینگونه تعریف کرد: نسبت لگاریتم تعداد اشکال خودمتشابه به لگاریتم عامل بزرگ نمایی. **logN2/logN=2=D**

حال اگر همین کار را با مجموعه کانتور انجام دهیم چون با دو مجموعه کانتور می توان يك مجموعه کانتور به طول ۳ برابر مجموعه های اولی ساخت داریم:

D=log2/log3=0/631

یعنی يك مجموعه کانتور، موجودی ۰,۶۳۱ بعدی است. حال اگر به شکل مجموعه کانتور نگاه کنیم ما می بینیم که این مجموعه نه يك خط کامل است که بعد يك داشته باشد و نه يك نقطه که بعد صفر داشته باشد بلکه موجودی بین آن دواست.

برای فراکتال کخ که بیشتر از خط (بعد۱) و کمتر از صفحه (بعد ۲) است، داریم:

D=log4/log3=1/262

یا برای فراکتال سرپینسکی که فضای بیشتری را نسبت به فراکتال کخ می پوشاند،اما به يك صفحه کامل نمی رسد،داریم: **D=log3/log2=1/58**

در فراکتال ها این بعد فراکتالی است که مهم است و نه مقیاس. زیرا در هر اندازه ای، این بعد فراکتالی حفظ می شود و بیانگر خاصیت اصلی فراکتال است. {همین امر کاربرد فراکتال ها را در علم امروزی زیاد کرده است.

در کیهان شناسی، ساختار يك کهکشان با يك خوشه کهکشانی (مجموعه ای از هزاران کهکشان) و يك خوشه نیز با يك ابرخوشه (مجموعه ای از هزاران خوشه کهکشانی) قابل قیاس

است. رشد نمونه های میکروبیولوژیکی در محیط های کشت و یا نحوه کارکردهای پلیمرهای صنعتی (مثل لاستیك ها) و پلیمرهای حیاتی (مثل DNA و پروتئین ها) از مواردی هستند که دانش فراکتال ها را می توان در آنها به کار برد.}

ایجاد فراکتال

سه تکنیک معمول برای ساخت فراکتال عبارتند از :

- فراکتالهای زمان گریز : این فراکتالها با یک رابطه بازگشتی در هر نقطه در فضا تعریف می شوند(مانند صفحه مختلط).مثالهایی از این نوع عبارتند از مجموعه مندلبرات ، مجموعه جولیا و فراکتال کشتی شعله ور و فراکتال لیاپونوف.
- سیستم توابع تکراری : این فراکتالها یک قاعده جایگزینی هندسی ثابت دارند.مجموعه کانتور ، فرش سیرپینسکی ، منحنی پینو ، برفدانه کخ ، مربع T ، اسفنج منگر برخی از مثالهای این نوع فراکتال هستند.
- فراکتالهای تصادفی : به جای فرایندهای قطعی ، با فرایندهای تصادفی ساخته می شوند.

طبقه بندی فراکتالها

فراکتالها می توانند برحسب خودتشابهیشان نیز طبقه بندی شوند. سه نوع خود تشابهی در فراکتالها یافته می شود :

- خودتشابهی دقیق (کامل) : قویترین نوع خودتشابهی است؛فراکتال در مقیاسهای مختلف یکسان ظاهر می شود.فراکتالهای تعریف شده بوسیله سیستم توابع تکراری،اغلب خودتشابهی دقیق را نشان می دهند.
- شبه خودتشابهی(نیمه خودتشابهی) : یک حالت ناکامل از خودتشابهی است؛فراکتال در مقیاسهای مختلف ،تقریباً (نه دقیقاً) یکسان ظاهر می شود.فراکتالهای تعریف شده بوسیله روابط بازگشتی،معمولاً شبه خودتشابهند ولی خودتشابه کامل نیستند.
- خودتشابهی آماری : ضعیفترین نوع خودتشابهی است؛فراکتال اندازه های عددی یا آماری دارد که در سرتاسر مقیاسها حفظ می شوند.بیشتر تعاریف عوامانه متعارف فراکتال،بر شکلی از خودتشابهی آماری دلالت می کند.

فراکتالهای تصادفی نمونه هایی از فراکتالهایی هستند که به شکل آماری خودمشابه هستند ؛ اما خودمشابه کامل یا شبه خودمشابه نیستند

هندسه فراکتال

فراكتال يك شكل يا الگوي هندسي ساخته شده از قسمتهاي يكسان است كه در برگشت به داخل جزئيات نشان دهنده الگوي كلي است .

-به عبارت ديگر به هر جزء از شيء كه نگاه كنيم تصوري از كل شيء در ذهن ما ايجاد ميشود –واژه فراكتال در سال ۱۹۷۵ توسط بنويت مندلبرات براي توصيف اشياء هندسي پيچيده كه درجه بالائي از خودتشابه دارد تشكيل شده است

واحد اساسي برفدانه كخ كه توسط هلگ ون كخ رياضيدان(۱۸۷۰-۱۸۲٤) رسم شده مثلث متساوي الاضلاعي است كه ميتواند وسعت پيدا كند اما در عين حال هنوز شبيه الگوي اوليه است .هر قسمت از برفدانه در هر مقياس از ان كه ديده ميشود به طور يكنواخت در كنار هم واقع شده اند. بعضي از فراكتالهاي فوق العاده قابل ملاحظه مجموعه هاي جوليا است كه توسط رياضيدان فرانسوي گالتون جوليلا (۱۸۹۳-۱۹۷۸) اختراع شد . مجموعه جوليا با كاربرد قانون غير خطي مكرر توليد ميشود كه بر اساس يك تابع قانون مربعي خيلي ساده است.

$$F(C) = 2Z + CZ$$

كه در ان Z يك نقطه روي صفحه Xoy است و C يك نقطه ثابت با هر دو مؤلفه X و Y است .CX و CY نتايج خيلي جالب وشگفت انگيز بودند . هيچكس گمان نمي كرد كه چنين تابع ساده اي بتواند به شكل گيري تصاوير پييچيده اي كه تحليل و تفسير آن كار اساني نيست منجر شود .

نظريه رياضي مدرن كه به طور ريشه اي از هندسه اقليدسي باستاني جدا ميشود , هندسه فراكتالي است كه به توصيف اشيائي مي پردازد كه خود متشابه يا متقارن اند . اين بدان معنا است كه وقتي اين اشياء بزرگنمائي شوند به نظر ميرسد كه بين اجزاي انها تشابه دقيقي برقرار است و اين شباهت جزء به جزء تا بينهايت ادامه مي دهند.

و اما ماهيت فراكتالها كه در واقع در خود كلمه منعكس شده, اين واژه توسط مندلبرات رياضيدان از فعل لاتين شكستن گرفته شده و منسوب به صفت فراكتوس به معني سنگي كه به طور نامنظم شكسته و خرد شده است مي باشد .

فراكتالها شكلهايي هستند كه برعكس شكلهاي هندسه اقليدسي به هيچ وجه منظم نيستند . اين شكلها اولا سراسر نامنظم اند ثانيا ميزان بي نظمي انها در همه مقياسها يكسان است.

تولید اشکال فراکتالی :

اشکال فراکتالی معمولا به کمک توابع بازگشتی تولید می شوند.مثلا تابع بازگشتی f(n)=f(n)*f(n)+c یا f(n)=f(n)^2+c یک تابع فراکتال است. این معادله ی به خصوص یک فراکتال معروف ، موسوم به مجموعه ی جولیا را تشکیل می دهد.در این معادله c یک عدد مختلط (شامل یک عدد موهومی) است که می تواند هر مقداری باشد و نتیجه ی آن یک مجموعه ی جولیای متفاوت باشد. n به جای مختصات نقطه قرار می گیرداین موضوع را در نظر داشته باشید زیرا به زودی به آن باز می گردیم . این مختصات ویژه هستند زیرا همان طور که حدس زدید اعداد موهومی را در بر می گیرند.هنگامی که این مختصات (x,y) هستند ، در هندسه ی فراکتال به صورت x + iy نشان داده می شوند . به عبارت دیگر ، x مقداری ثابت و y یک عدد موهومی است . همان طور که در مبحث اعداد مختلط مشاهده کردید، محور x نشان دهنده ی اعداد حقیقی و محور y نشان دهنده ی اعداد موهومی است . حال به تابع فراکتال بر می گردیم . از مختصات (x +iy) به جای n استفاده می کنیم . حالا می پرسید که این تابع چه طور نمودارهای بزرگ فراکتال را می سازد . بسیار خوب ، نتیجه ی یک تابع ، به جای این که یک خط شود ، تنها یک نقطه را نمایش می دهد ـ که اگر ما به تعریف یک نقطه نگاه کنیم ، می تواند بی نهایت کوچک باشد ـ که بیان می کند چه طور می توانیم یک قسمت از یک فراکتال را بزرگ کرده و به فراکتال جدید کاملی برسیم . نقطه در مختصات n قرار دارد . البته فراکتال ها بسیار رنگارنگ هستند. حالا این رنگ ها چه طور انتخاب می شوند؟ مثل هر چیز دیگر ، نسبتاً ساده است . ابتدا لازم است که یک نقطه را رنگ کنید ، بیایید نقطه (2+1i)

را در نظر بگیریم . برای مقدار c از (1+1i) استفاده می کنیم . به خاطر آورید که c می تواند هر عدد مختلطی باشد . حال این را در معادله قرار می دهیم .

$$f(n)=f(2+1i)=(2+1i)(2+1i)+(1+1i)$$

$$=2*2+2i+2i+i^2+1+1i=5+5i-1=4+5i \quad (i^2=-1)$$

a)روی نمودار قرار نمی گیرد (مثال : در یک نمودار ۱۰*۱۰ مؤلفه های جدیدی که به دست می آیند(۹۷ ، ۲۳۴-) هستند)

b)هرگز نمودار را ترک نمی کند (این قانون بعداز ۲۰۰ بار تکرار ، اگر نقطه باز هم روی نمودار باشد ، صادق است.)

نحَوه ی انتخاب رنگ به این صورت است که اگر نقطه بعد از یک بار تکرارنمودار را ترک کند ، یک رنگ به آن نسبت می دهیم . هر نقطه بعد از آن ، که بعد از یک تکرار نمودار را ترک کند ، همان رنگ را دارد . تمام نقاطی که بعد از ۲ تکرار نموداررا ترک می کنند ، با یک رنگ مشخص نشان داده می شوند و هر نقطه ای که نمودار را هرگزترک نکند با رنگ متمایز معمولاً سیاه علامت گذاری می شود . بعد از انجام این فرایند، برای تمام نقاط داخل این صفحه ، نتیجه ای نظیر این مجموعه ی جولیا می شود .

تابع$f(x)=f(x-1)^2+c$ فراکتال دیگری را موسوم به مجموعه ی مندلبرات میسازد.

همان طور که می بینید ، در بسیاری از حالات ، ۲۰۰ تکرارلازم است تا تنها یک نقطه تعیین شود . در اغلب کامپیوترها ، معمولاً تعداد نقاط برای یک فراکتال ۳۰۳،۲۰۰ تاست . به همین دلیل است که برای محاسبه ی عملیات زیاد و دقت انجام آنها به کامپیوتر نیاز داریم .فراکتال هاتصویری از یک زندگی واقعی دارند . کامپیوترها می توانند یک شکل واقعی را بگیرند وبا انجام تکرار زیاد به آن شکل تخیلی بدهند.این روزها از فراکتال ها به عنوان یکی از ابزارهای مهم در گرافیک رایانه ای نام می برند،اما هنگام پیدایش این مفهوم جدید بیشترین نقش را در فشرده سازی فایلهای تصویری بازی کردند.این ها مختصات جدید ما هستند . به یاد آورید که اگر یک مجموعه از مختصات را در یک تابع قرار دهید ، نتیجه یک مجموعه ی جدید از مختصات است . $4+5i$ مجموعه ی مختصات جدید است . هنوز کار تمام نشده است ، عمل بالا یک تکرار را نشان می دهد .

الگوهای رویش برخالی

ایده خود متشابه در اصل توسط لایبنیتس بسط داده شد. او حتی بسیاری از جزئیات را حل کرد. در سال ۱۸۷۲ کارل وایرشتراس مثالی از تابعی را پیدا کرد با ویژگیهای غیر بصری که در همه جا پیوسته بود ولی در هر جا مشتق پذیر نبود .گراف این تابع اکنون برخال نامیده می شود. در سال ۱۹۰۴ هلگه فون کخ به همراه خلاصه‌ای از تعریف تحلیلی وایرشتراس ، تعریف هندسی‌تری از تابع متشابه ارائه داد که حالا به برفدانه کخ معروف است. در سال ۱۹۱۵ واکلو سرپینسکی مثلثش را و سال بعد فرش‌اش (برخالی) را ساخت. ایده منحنیهای خود متشابه توسط پاول پیر لوی مطرح شد او در مقاله اش در سال ۱۹۳۸ با عنوان «سطح یا منحنیهای فضایی و سطوحی شامل بخش‌های متشابه نسبت به کل» منحنی برخالی جدیدی را توصیف کرد منحنی لوی .c گئورگ کانتور مثالی از زیرمجموعه‌های خط حقیقی با ویژگیهای معمول ارائه داد. این مجموعه‌های کانتور اکنون به‌عنوان برخال شناخته می‌شوند. اواخر قرن

نوزدهم و اوایل قرن بیستم توابع تکرار شونده در سطح پیچیده توسط هانری پوانکاره، فلیکس کلاین، پیر فاتو و گاستون جولیا شناخته شده بودند. بااین وجود بدون کمک گرافیک کامپیوتری آنها نسبت به نمایش زیبایی بسیاری از اشیایی که کشف کرده بودند، فاقد معنی بودند. در سال ۱۹۶۰ بنوا مندلبرو تحقیقاتی را در شناخت خود متشابه‌ای طی مقاله‌ای با عنوان « طول ساحل بریتانیا چقدر است؟ خود متشابه‌ای آماری و بعد کسری » آغاز کرد. این کارها بر اساس کارهای پیشین ریچاردسون استوار بود. در سال ۱۹۷۵ مندلبرو جهت مشخص کردن شئی که بعد ((هاوسدورف بیسکویچ)) آن بزرگ‌تر از بعد توپولوژیک است کلمه برخال راایجاد کرد. اواین تعریف ریاضی را از طریق شبیه سازی خاص کامپیوتری تشریح کرد.

مجموعه جولیا

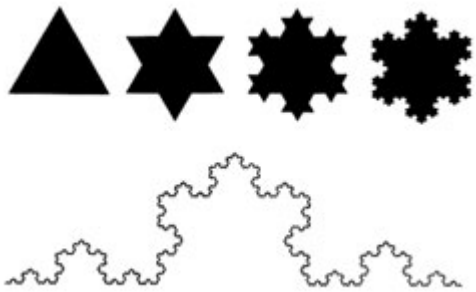
بر خالها از نظر روش مطالعه به برخالهای جبری و بر خالهای احتمالاتی تقسیم می شوند. از طرف دیگر برخالها یا خود متشابه اند (self similarity) یا خود الحاق (self affinity) هستند .در مورد خود متشابه‌ای شکل جز شباهت محسوسی به شکل کل دارد این جز، در همه جهات به نسبت ثابتی رشد می کند و کل را به وجود می آورد. اما در خود الحاقی شکل جز در همه جهات به نسبت ثابتی رشد نمی کند. مثلاً در مورد رودخانه‌ها وحوضه‌های آبریز بعد برخالی طولی متفاوت از بعد برخالی عرضی است .74 - .72 = Vx و .52 - .51 = Vy (ساپوژنیکوف و فوفولو ،۱۹۹۳) لذا شکل حوضه آبریز کشیده‌تر از زیر حوضه‌های درون حوضه است. به خود متشابه‌ای همسانگرد (isotropy) می‌گویند. به خود الحاقی ناهمسانگرد (anisotropy)می‌گویند.

گسترش رو به رشد رویکرد مونوفراکتالی (تک برخالی) اخیر، داده‌ها را با مجموعه فراکتالی، بجای بعد منفرد فراکتالی توصیف می‌کند. این مجموعه طیف چند برخالی (multifractal spectrum)نامیده می شود و روش توصیف تغییر پذیری بر اساس طیف سنجی چند برخالی به آنالیز چند برخالی (multifractal analysis) معروف است (فریش و پاریسی، ۱۹۸۵). روش چند برخالی به اندازه خود متشابه‌ای آماری-(statistical self similar)دلالت دارد که می تواند به صورت ترکیبی از مجموعه های متقاطع برخالی (interwoven fractal sets)مطابق با نمای مقیاس گذاری نمایش داده شود. ترکیبی از همه مجموعه‌های برخالی طیف چند برخالیی راایجاد می کند که تغییر پذیری و ناهمگنی متغیر

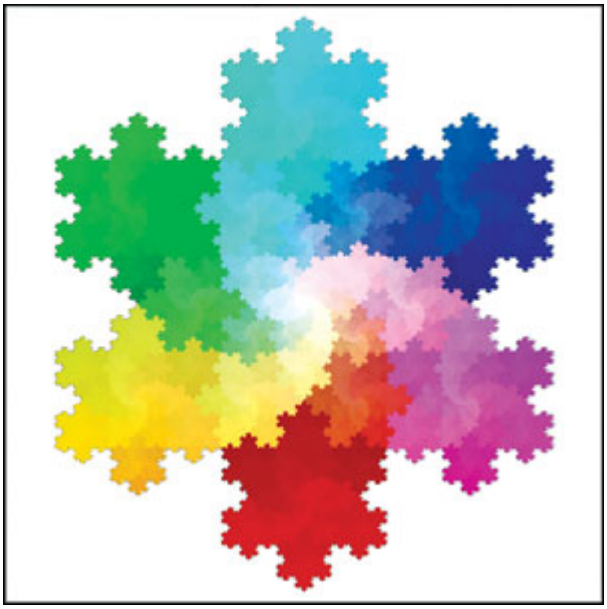
مورد مطالعه را مشخص می‌کند. مزیت رویکرد چند برخالی‌این است که پارامترهای چند برخالی می توانند مستقل از اندازه موضوع مورد مطالعه باشند Cox and Wang, (۱۹۹۳).

فراکتال های هندسی

یکي از مشهورترین فراکتال‌ها توسط ریاضیدانی به نام «فون‌کخ» در سال ۱۹۰٤ ابداع شد. در این فراکتال که به «دانه برفی کخ» شهرت دارد، ابتدا يك مثلث متساوی‌الاضلاع را در نظر مي‌گيريم و هر ضلع آن را به سه قسمت تقسيم مي‌كنيم؛ سپس به جاي پاره خط وسط هر ضلع، یک مثلث متساوی‌الاضلاع دیگر جایگزین می‌کنیم و این عمل را بارها تکرار می‌کنیم. به این نوع فراکتال‌ها، فراکتال «خود متشابه» گفته می شود، چرا که هر قسمت آن با تکه بزرگـتر شبیه است.

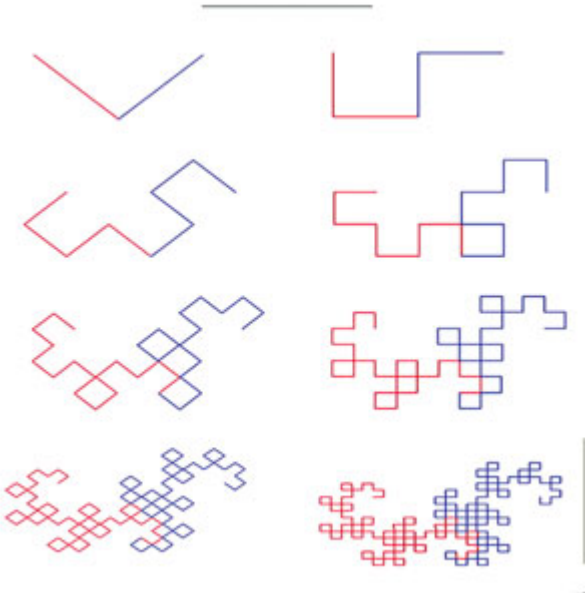


روش ساخت فراکتال« دانه برفي كخ» كه كوچك ترين جزء آن مثلث متساوي‌الاضلاع است



نمونه بزرگ شده فراکتال دانه برفي کخ

فراکتال دیگر به «اژدهای هرترهای‌وی» معروف است و بر خلاف اسم عجیبش روش ساخت ساده‌ای دارد! این شکل از یک تکه خط راست و تکرار و چسباندن آنها با زاویه 90درجه به یکدیگر تشکیل شده است.



جدول ساخت اژدهاي «هرترهاي وي »، به نحوه تکرار و بزرگ شدن شکل دقت کنید

اگر به جدول چگونگی ساخت این فراکتال دقت کنید، می‌بینید که هر خانه از تکرار خانه قبلی پدید آمده است. البته باید گفت که در بسیاری از فراکتال‌ها روند بزرگ‌شدن، از دستورهای

ریاضی ویژه‌ای پیروی می‌کند که هر یک در طبقه‌بندی جداگانه‌ای قرار دارند .
یکی از ویژگی‌های مهم و در عین حال پیچیده فراکتال‌ها این است که بُعد کسری یا اعشاری دارند. همان‌طور که می‌دانید نقطه بُعد ندارد و خط یک بُعد و صفحه دو بُعد و حجم‌ها سه بُعد دارند .

اما در هندسه فراکتال‌ها صحبت از شکل‌هایی می‌شود که بُعدهای کسری دارند. مثلاً اگر صفحه‌ای از کاغذ (با ضخامت نزدیک به صفر) را مچاله کنیم، حجمی به دست می‌آید که بُعد اعشاری دارد .



نوعي كلم بروكلي كه نمونه‌اي از فراكتال طبيعي تلقي مي‌شود

همان‌طور که در ابتدا گفته شد، نمونه‌های زیبایی از فراکتال‌ها در طبیعت وجود دارد که می‌توانید به سراغشان بروید و نحوه ساخت آنها را از نزدیک بررسی کنید. کلم بروکلی، برگ سرخس، ریشه درخت‌ها، دانه‌های برف و... از این قبیل هستند.

سازه های فراکتالی



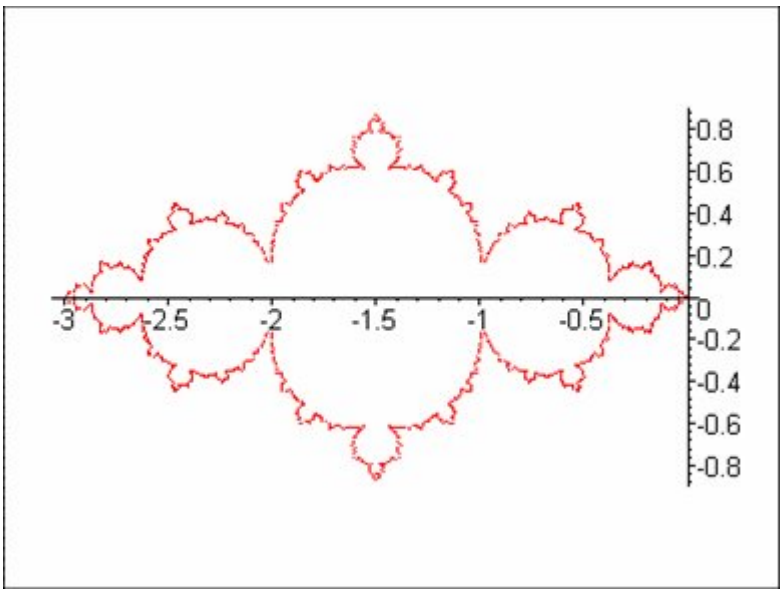
مکعب آبی، گروه معماران PTW ، شرکت اوو آروپ

این نام، برای مرکز شنا و بازی های آبی المپیک سال ۲۰۰۸ پکن در نظر گرفته شده. پروژه به شکل یک مکعب بسیار ساده ، ولی پیچیده در نظر گرفته شده که سعی در شبیه شدن آن به اجتماع مولکول های آب شده. ابعاد این مکعب بزرگ ۱۷۷*۱۷۷ متر و ارتفاع آن ۳۱ متر است. الهام بخش این نوع سازه ، شکل ارگانیک حباب های صابون و کف بوده ، گرچه این نوع سازه به کرات در طبیعت قابل مشاهده هست : در سلول های زنده ، در کریستال های تشکیل دهنده ی مواد و ... این ساختار توسط دو دانشمند به نام های "phelan" & "weaire" برای تقسیم بندی فضا پیشنهاد شد : یکی ۱۴ وجهی (شامل ۱۲ پنج ضلعی و دو شش ضلعی منتظم) و دیگری یک ۱۲ وجهی (شامل ۱۲ پنج ضلعی منتظم) این راه حل در حال حاضر بهترین روش برای تقسیم فضای سه بعدی است و به رغم ظاهر پیچیده، قابلیت تکرار پذیری فوق العاده ای دارد. در این نوع هندسه فقط سه نوع سطح، چهار نوع لبه و سه نوع گوشه (گره) به کار رفته. برای بیان پدیده های طبیعی، همیشه هندسه ی اقلیدسی کاربرد نداره. در اکثر موارد باید از نوع دیگه ای از هندسه استفاده کرد تا بشه عوارض طبیعی و فرم ها و ... رو نشون داد. فراکتال ها بهترین زبان برای بیان این چنین پدیده هایی هستند که می تونن حتی در معماری هم نمود پیدا کنن. یکی از بناهایی که از این نوع هندسه بهره گرفته ، " مرکز شنا و بازی های آبی المپیک ۲۰۰۸ چین " هست که برای تحلیل سازه ای انتخاب کردیم. و اما Cube Water :



نظریه ی گراف و هندسه ی فراکتالی

جالب است بدانید که نظریه گراف هم ارتباطاتی با هندسه فراکتال دارد . به عنوان مثال فراکتال زیر مربوط به گراف ساده مسیر با ۳ راس P3 می باشد که آنرا با نرم افزار ریاضی ترسیم کرده اند.



توجه کنید که به راحتی می توان ثابت کرد که همه فراکتال های گرافها فشرده هستند. و این موضوع هنوز در مورد همبندی کامل پاسخ داده نشده است!

هنر و فراکتال

الگوی فراکتالها در نقاشیهای هنرمند آمریکایی؛جکسون پولاک یافت شده است.در حالیکه به نظر می رسد نقاشیهای پولاک مرکب از قطرات نامنظم و آشفته است،تحلیل کامپیوتری،الگوی فراکتالها را در کار او یافته است.

فراکتالها در هنر و معماری آفریقایی نیز رایج است.خانه های مدور در دایره هایی از دایره ها ظاهر می شوند؛خانه های مستطیلی در مستطیلهایی از مستطیلها و مانند آنها.چنین الگوهای مقیاس بندی،در منسوجات،مجسمه سازی و پیکرتراشی آفریقایی نیز دیده می شود.









فرکتال در طبیعت

فراکتالهای تقریبی، بسادگی در طبیعت یافت می شوند.این اشیا ساختاری خودمشابه در یک امتداد؛ اما در بازه مقیاس محدودی را نشان می دهند.مثالها عبارتند از: ابرها،برفدانه ها،کریستالها،رشته کوهها،صاعقه،شبکه رودخانه ها،گل کلم یا براکلی(نوعی کلم) وسیستم گردش خون (رگهای خونی) و رگهای ریوی.

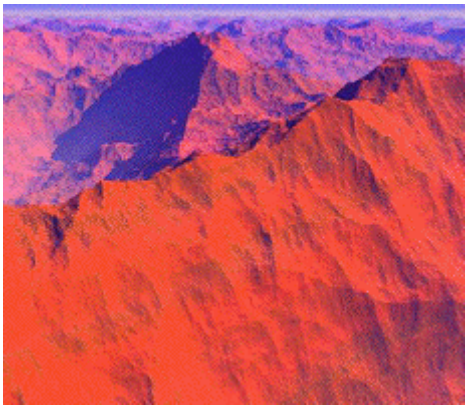
درختان و سرخسها،فراکتالهای طبیعی هستند و می توانند بر روی یک کامپیوتر و با استفاده از یک الگوریتم بازگشتی مدلسازی شوند.این طبیعت بازگشتی در این مثالها مشهود است-یک

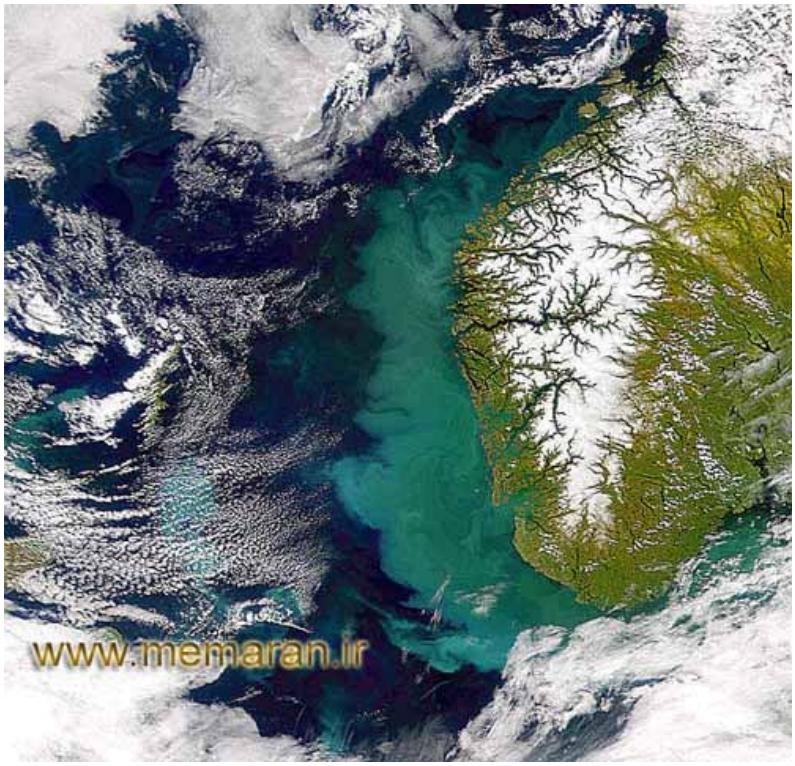
شاخه از یک درخت یا ساقه یک سرخس،نسخه المثنایی از کل است؛هرچند نه یکسان اما در طبیعت همانند آن.

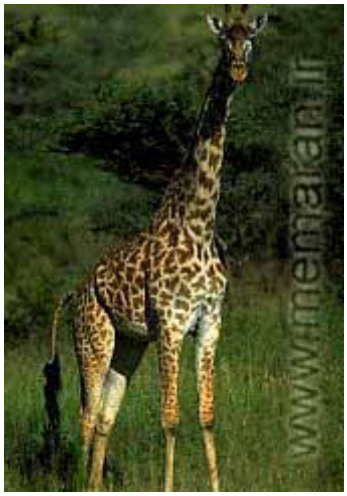
این فرم ها همانطور که از اسم آنهاپیداست داراي فرمي طبيعي هستند (عدم دستبرد دست بشر) . شايد بسيار در عكاسي معماري (براي عكس از يك سوژه) به يك منظره برخورد كرده باشيد كه در دوردست تپه ها و كوه ها ديده مي شوند ، بد نيست بدانيد كه خود اين منظره داراي فرمي فركتال است و با هندسه فركتال قابل حل!!








www.memaran.ir


www.memaran.ir





حتي زمين لرزه اي كه اكنون قابل پيش بيني نيست ، در موقع اتفاق به صورت فركتال عمل مي كند ! (در ترك روي گسل ها)

كاربردها

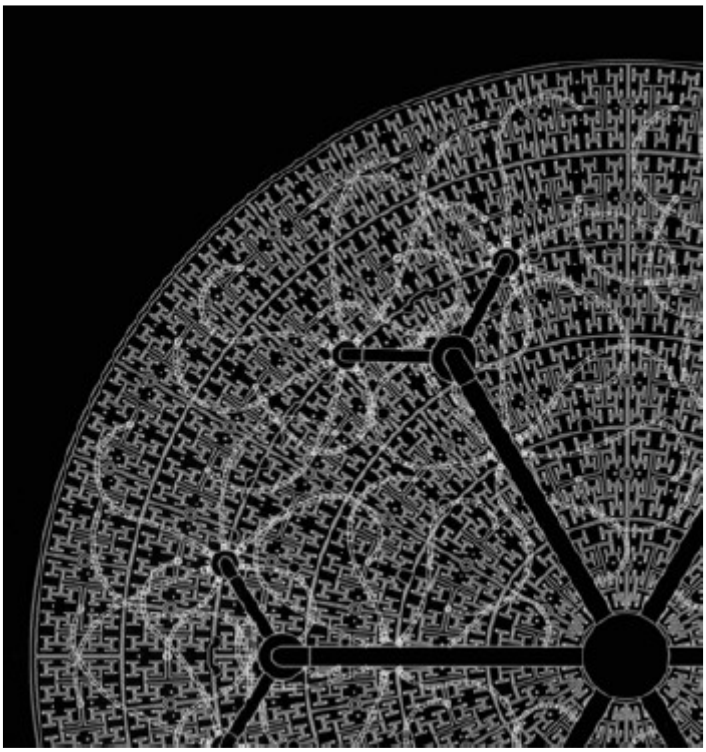
از فراکتال هابه منظور تسهیل در امور مربوط به مدل‌سازی‌پیچیدگی در زمینه‌های گوناگون علمی و مهندسی استفاده به عمل می‌آید. از جملهٔ زمینه‌های مهم کاربردی موارد زیر را می توان برشمرد :

یکی از کاربردهای فراکتال در مکانیک سیالات و شیمی است .....

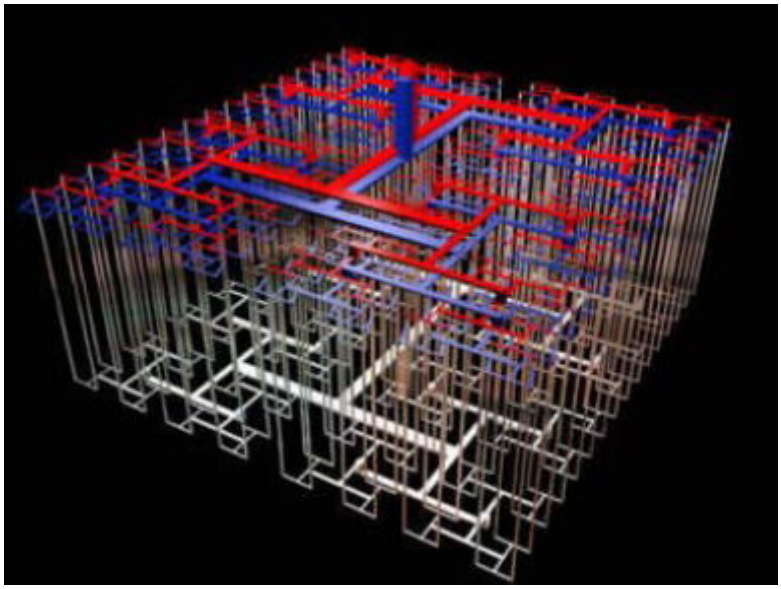
تعدادی از این کاربرد ها به صورت زیر است:

کروماتوگرافی(جدا کردن عناصر رنگی از هم) سیال های دوفازی یا تک فازی ، تبادل یونی ، جذب از سطح ، تقطیر ، هوادهی به مایعات ، جدا سازی ناخالصی ها از گاز ها ، استخراج ، ته نشین سازی و تصفیه ، مخلوط کردن و عملیات راکتور ها.
مقیاس بندی ذرات سیال و پخش آن از ملزومات کار با سیالات(مخلوطی از ذرات و حلال) است که در روند انجام عمل مخلوط سازی و اصلاح هندسی سیال به کار می رود. فراکتال ها به لحاظ ساختاری دارای مقیاس بندی عمیقی هستند و همین خاصیت آنها را مخاطب مسائل مشخصی می نماید ، مثلا در یکنواخت سازی سیال و روند افزایش مقیاس به طریقی که هدایت شده و منطقی باشد. در موارد مشخصی می توان یک فراکتال مهندسی شده و کارآمد را جایگزین آشفتگی روش های قبلی کرد. با استفاده از این فراکتال های مهندسی شده سرشت

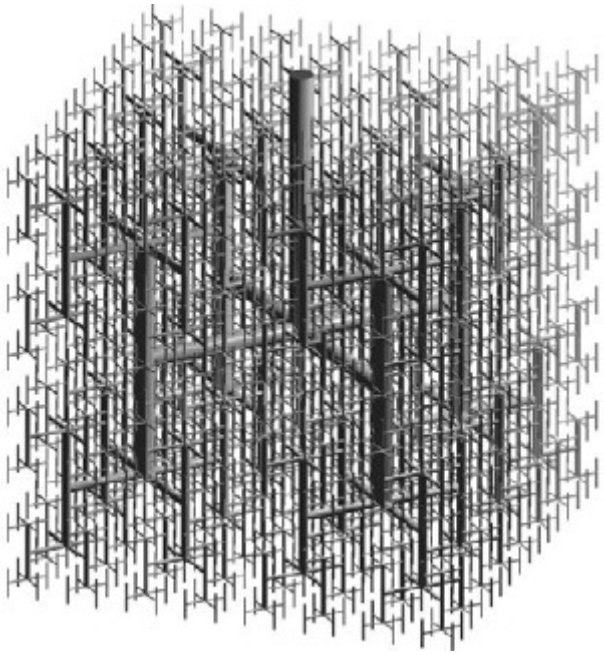
اتفاقی بودن " آبشار جریان آشفته " با هم آراستگی و یکدستی جایگزین می شود.این روش سبب کاهش مصرف انرژی ، کاهش در حجم مراحل انجام کار و همچنین واکنش یکنواخت می شود.
به طور کلی می توان گفت فراکتال های مهندسی شده کنترل دقیقی بر روند مقیاس بندی و توزیع سیال ایجاد می کنند طوریکه کیفیت کار با سیالات بالا می رود.
نمونه ها:
در ادامه مطلب نمونه هایی از این فراکتال ها ارائه می شود.



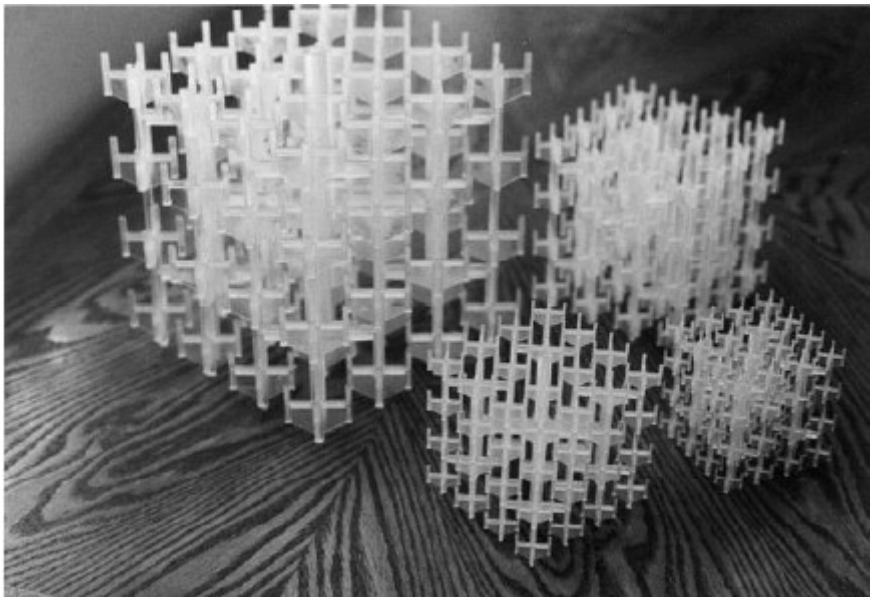
فراکتال توزیع که در موارد گوناگون توزیع و جمع آوری سیال بطور یکنواخت کاربرد دارد، اندازه این وسیله از چند سانتیمتر تا بالای ٦ متر تغییر میکند و در فرآیند های چند فازی شامل گازها ، آب و حلال های ارگانیک ، اسید های غلیظ و سایر محیط های خورنده فلزات کاربرد دارد.

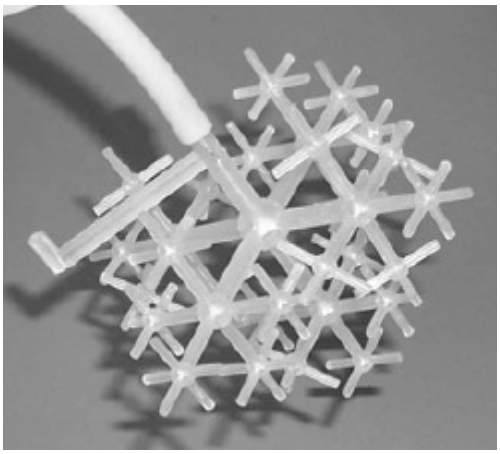


این وسیله بر پایه تکنولوژی چند فراکتالی ساخته شده و به طور کلی برای مقیاس بندی و توزیع دو سیال یا بیشتر به طور همزمان کاربرد دارد. این وسیله با انژری کم کار می کند و گرداب های غیر یکنواخت را حذف میکند و همچنین دارای واکنش آنی به تغییرات فرآیندی است.(اینرسی فرآیندی پایین)



تصویر بالا هم برای توزیع و جمع آوری مایعات در حجم به کار میرود تصاویر پایین متعلق به نمونه های اصلی است از فراکتال ها برای چگالی های متفاوت و در اندازه ای متفاوت است.تصویر آخری هم نمونه ای از فراکتال های حجمی با بعد نا صحیح (۲,۳۲) است .بعد یک فراکتال بر ویژگی فضا پر کنی آن تاثیر دارد.





مدل سازی سطوح درزه ها با استفاده از هندسه فراکتال

پدیده های ناهموار با اشکال نامنظم و بی قاعده از اصول هندسه اقلیدسی پیروی نمی کنند. هندسه ای که برای این پدیده ها و ابعاد ناصحیح آنها به کار می رود هندسه فراکتال نامیده می شود. اهمیت اصلی هندسه فراکتال در این است که مدل و توصیفی ریاضی برای بسیاری از اشکال پیچیده که در طبیعت یافت می شوند ارائه می کند. به عنوان مثال اشکال طبیعی مانند سطوح زبر و ناهموار درزه ها و شکستگیهای توده سنگ را با هندسه فراکتال به طور دقیق می توان توصیف نمود .

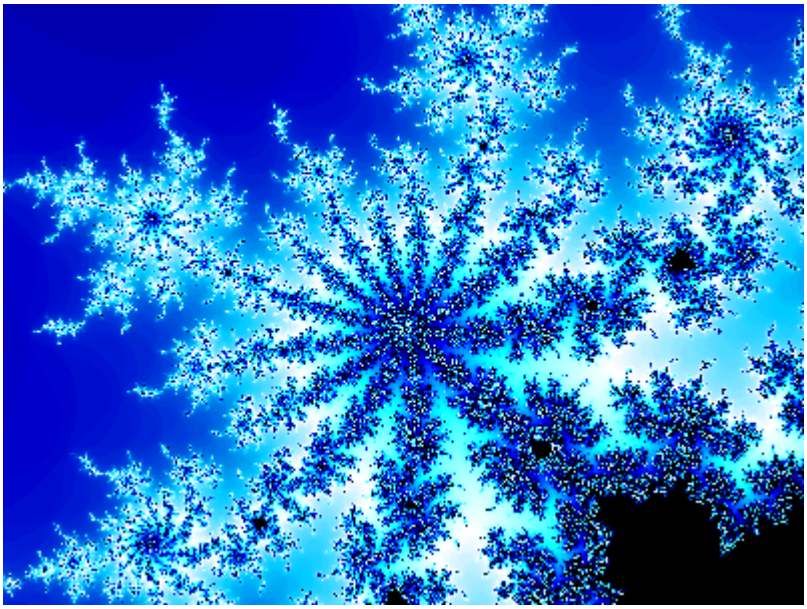
زبری سطوح درزه ها یکی از عوامل مهمی است که در مقاومت برشی سنگ در امتداد گسستگیها موثر می باشد. بارتون (Barton) ضریب زبری درزه ها (JRC) را به عنوان پارامتر کمی جهت محاسبه مقاومت برشی بین سطوح درزه ها به کار برده است. با عنایت به اصول هندسه فراکتال ارتباط مستقیمی بین بعد فراکتال و زبری درزه ها و به تبع آن ضریب زبری درزه ها (JRC) وجود دارد، با پیدا کردن بیان ریاضی این ارتباط، توصیف کمی زبری سطوح درزه ها با اندازه گیری بعد فراکتال پروفیل آنها امکان پذیر شده است. در این تحقیق با اندازه گیری بعد فراکتال پروفیل های استاندارد بارتون و بررسی ارتباط ابعاد فراکتال با عدد JRC مربوطه، رابطه ای ریاضی جهت برآورد میزان JRC از ابعاد فراکتال ارائه شده است.

تصاویری زیبا

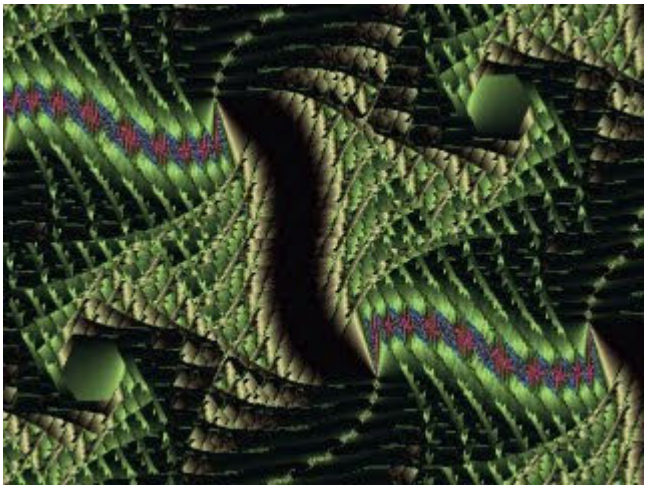


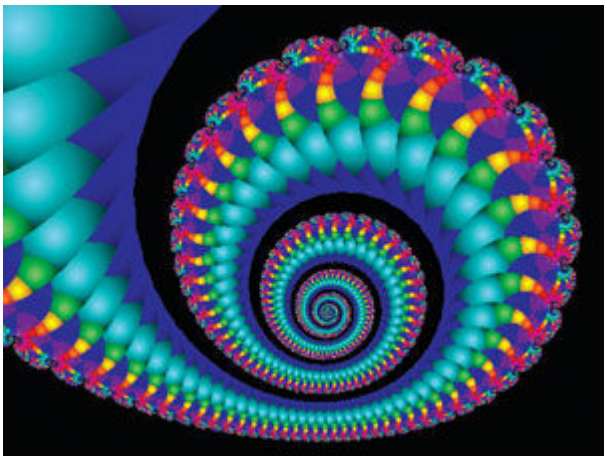




















منابع

www.p30world.net
www.jawedan.com
www.pca.ir
www.ariyamath.persianblog.ir

www.iran-eng.com
www.ngdir.ir
www.mylonelinessisland.blogfa.com
www.maths6.blogsky.com
www.irangenius.mihanblog.com
www.iranblog.com
www.choogh.com
www.daneshema.com
www.sevvomiha.parsiblog.comwww.forum.iranblog.com